ELEMENTE DER VERMESSUNGSKUNDE

Carl Maximilian von Bauernfeind

Elemente

der

Vermessungskunde

von

Carl Max Bauernfeind.

Vierte vermehrte und verbesserte Auflage

in zwei Bänden.

Zweiter Band.

Stuttgart.

Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung.

1873.

Buchdruckerei der J. G. Cotta'schen Buchhandlung in Stuttgart.

Inhaltsverzeichniss des zweiten Bands.

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Messungen.

I. Methode der kleinsten Quadrate.

A. Ausgleichung directer Beobachtungen.

B. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

C. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

II. Horizontalmessungen.

A. Messung der Linien.

B. Messung der Winkel und Dreiecke.

II. Planzeichnung.

Seite

A. Horizontal- oder Situationspläne.

B. Vertical- oder Nivellementspläne.

C. Berg- oder Grubenpläne.

III. Abzeichnen der Karten und Pläne.

A. Das Durchzeichnen.

B. Das Abzeichnen durch Quadratnetze.

C. Das Abzeichnen mit dem Pantographen.

Anhang.

22 Tafeln über verschiedene Gegenstände der Messkunde und ein ausführliches alphabetisches Sachregister für den zweiten Band dieses Werks.

Originalliteratur,

welche der Verfasser dieses Werkes benützt hat.

A. Bücher.

Amsler, über einen neuen Planimeter. Schaffhausen, 1856.
Baeyer, Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin. Berlin, 1840.
Bessel und **Baeyer,** Gradmessung in Ostpreussen. Berlin, 1838.
Bohnenberger, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung. Göttingen, 1795.
Breithaupt, Magazin mathematischer Instrumente. Cassel, 1835.
Gauss, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Göttingen, 1844.
Gerling, Ausgleichungsrechnungen der practischen Geometrie. Hamburg, 1843.
Grunert, Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Brandenburg, 1838.
Hansen, Instruction für die Triangulation von Thüringen. Weimar, 1848.
Hanstadt, Anleitung zur Markscheidekunst. Pesth, 1835.
Ohm, Grundzüge der Physik als Compendium zu seinen Vorlesungen. Nürnberg, 1854.
Salneuve, Cours de topographie et de géodésie. Paris, 1841.
Schwerd, Die kleine Speyerer Basis. Speyer, 1822.
Stampfer, Anleitung zum Nivelliren. Wien, 1852.
Woltman, Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg, 1790.

B. Zeitschriften.

Carl, Repertorium für physicalische Technik und Instrumentenkunde. München.
Crelle, Journal der reinen und angewandten Mathematik. Berlin.
Dingler, polytechnisches Journal. Augsburg.
Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch. Berlin.
Grunert, Archiv für Mathematik und Physik. Greifswald.
Poggendorff, Annalen der Physik und Chemie. Berlin.
Schlömilch und **Witschel,** Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig.
Schumacher, astronomische Nachrichten. Altona.
Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie der Wissenschaften. München.
Zenner und **Bornemann,** der Civilingenieur. Freiberg.

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Messungen.

§. 1. Die Aufgaben, welche mit den in der ersten Abtheilung dieses Buchs betrachteten Messinstrumenten gelöst werden können, sind ebenso zahlreich und mannichfaltig als die Anforderungen, welche von Seite der Staatsverwaltung, des Verkehrs, der Technik und der Wissenschaft an die Messkunst gestellt werden. Aus dieser Mannichfaltigkeit das Gleichartige herauszufinden und zusammenzustellen, und dieses selbst wieder so zu ordnen, dass eine klare Uebersicht aller Abtheilungen des Gebiets der Vermessungskunde gewonnen wird, ist die nächstgelegene Aufgabe der Lehre von den Messungen; ihre Hauptbestimmung aber ist, den geordneten Inhalt der Messkunst wissenschaftlich darzustellen.

Durch die Operationen der Messkunst können zwei verschiedene Zwecke erreicht werden: der eine besteht darin, die gegenseitige Lage von Punkten auf und unter der Erdoberfläche und die Geschwindigkeiten der Flüsse so zu bestimmen, dass sich danach Land- und Stromkarten, Situations- und Nivellementspläne, Terraindurchschnitte und Grubenrisse herstellen lassen; der andere aber zielt dahin ab, eine auf Karten und Plänen oder sonstwie vorgezeichnete Lage von Punkten so auf oder in das Terrain überzutragen, dass die natürlichen Projectionen der Terrainpunkte unter sich und gegen ihre Umgebung dieselbe relative Lage haben wie die gleichnamigen Projectionen der im Bilde gegebenen Punkte. Jene Operationen bezeichnet man kurz mit dem Worte Aufnehmen, diese aber mit dem Ausdrucke Abstecken. Das Aufnehmen und Abstecken macht den Inhalt [1] der zweiten Abtheilung der Vermessungskunde aus, und in der Lehre von der geometrischen Aufnahme und Absteckung besteht die Theorie der Messungen.

Zergliedert man die Lösungen aller Aufgaben der Messkunde, so zeigt sich, dass selbst die zusammengesetztesten nur aus der verschiedenartigen Verknüpfung einer mässigen Anzahl von Elementaraufgaben bestehen, und dass sich diese Aufgaben wiederum in vier Gruppen abtheilen lassen, nämlich

1) in Horizontalmessungen, welche bloss die Aufnahme und Absteckung von natürlichen Horizontalprojectionen bezwecken;

[1] Die meisten Lehrbücher der Messkunde ziehen nur das Aufnehmen in den Kreis ihrer Betrachtungen und lassen das Abstecken ganz weg.

2) in **Verticalmessungen**, deren Zweck im Aufnehmen und Abstecken von Höhen besteht;

3) in **Grubenmessungen**, welche eine Verbindung von Horizontal- und Verticalmessungen für bergmännische Zwecke sind; und

4) in **Wassermessungen**, welche sich aus Horizontal- oder Verticalmessungen und Zeitbeobachtungen zusammensetzen und hydrotechnischen Zwecken dienen.

Diese vier Gruppen von Messoperationen mit entsprechenden Unterabtheilungen, worin das Aufnehmen und Abstecken gehörig gesondert sind, bilden den Inhalt der Lehre von den Messungen, welche hier in der angegebenen Reihenfolge dargestellt wird, nachdem vorher die allen Gruppen gemeinsame Theorie von der Ausgleichung der Beobachtungsfehler oder die Methode der kleinsten Quadrate in ihren Grundzügen für die praktische Anwendung entwickelt worden ist.

Die Theorie der Beobachtungsfehler, welche zunächst für die Berechnung astronomischer Messungen erfunden und ausgebildet wurde, hat sehr bald Eingang in die Geodäsie gefunden, und es ist deren Anwendung auf die Ausgleichung von Hauptdreiecksnetzen für Landes- und Gradmessungen, sowie auf eine Reihe anderer geodätischer Aufgaben, wobei es sich um Herstellung der besten Resultate aus einer grossen Anzahl guter Messungen handelt, unzweifelhaft berechtigt und nothwendig; dagegen erscheint es als eine Uebertreibung und zugleich als eine irrige Auffassung des Wesens der Ausgleichungsrechnungen, wenn man dieselbe auf **alle** Feldmessungen, selbst die mit der Kette, anwenden will. Wer demnach nicht in der Lage ist, von der hier vorgetragenen Theorie Anwendung machen zu müssen, oder wer sie nicht aus wissenschaftlichem Interesse kennen lernen will, kann sie ohne Nachtheil für das Verständniss der folgenden Abschnitte überschlagen.

Erster Abschnitt.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

§. 2. **Beobachtungsfehler.** Alle Messungen sind mit kleinen Fehlern behaftet, welche theils von der Unvollkommenheit der dazu verwendeten Instrumente und Sinne der Beobachter, theils von äusseren Einflüssen herrühren, welche oft ganz unbekannt, immer aber unberechenbar sind. Diese Fehler, welche wir zwar durch Benützung der besten Instrumente und Aufwendung aller Sorgfalt beim Messen ausserordentlich klein machen aber nicht vermeiden können, heissen **zufällige Fehler**, und man kann sich jeden solchen Fehler aus einer unbestimmt grossen Anzahl von unendlich

kleinen, unter sich unabhängigen Elementarfehlern zusammengesetzt denken, welche gleich leicht im positiven, wie im negativen Sinne auf das Ergebniss der Beobachtung einwirken. Von diesen Fehlern wohl zu unterscheiden sind jene regelmässigen Fehler, welche unter gleichen Umständen in gleicher Weise auftreten, deren Ursachen und Gesetze wir kennen, deren Einwirkung auf die Beobachtung wir oft zu vermeiden, in jedem Falle aber nach Grösse und Richtung zu berechnen vermögen, und welche constante Fehler heissen.

Die Methode der kleinsten Quadrate beschäftigt sich nur mit zufälligen, nicht mit constanten Beobachtungsfehlern: diese letzteren (wie z. B. Indexfehler, Centrirungen, Refractionen etc.) müssen vielmehr von den Beobachtungen ferne gehalten, oder durch geeignete Messungsmethoden eliminirt, oder regelrecht berechnet und an den Beobachtungsresultaten als Verbesserungen angebracht werden. Wir setzen hier fortan Beobachtungen voraus, welche mit keinen constanten Fehlern mehr behaftet sind und stellen uns die Aufgabe: die diesen Beobachtungen zukommenden wahrscheinlichsten Fehler zu finden, hienach die Beobachtungsergebnisse selbst zu verbessern und deren Sicherheits- oder Genauigkeitsgrad anzugeben. Die Lösung dieser Aufgabe ist Gegenstand der Ausgleichungsrechnung oder der Methode der kleinsten Quadrate, wie diese Rechnungsweise nach dem ihr zu Grunde liegenden (von Gauss 1795 entdeckten aber erst 1809 publicirten und von Legendre 1806 unabhängig von Gauss gefundenen und veröffentlichten) Princip genannt wird.

§. 3. **Princip der Ausgleichung.** Durch einmaliges Messen einer Grösse haben wir noch keine Vorstellung von den hiebei begangenen Fehlern; erst wenn wir die Messung wiederholen, also mehr Beobachtungen machen als zur Bestimmung der Grösse unumgänglich nothwendig sind, werden wir uns des Daseins von Fehlern im Allgemeinen und von zufälligen im Besonderen bewusst. Wenn wir in einem ebenen Dreiecke bloss zwei Winkel messen und den dritten durch Rechnung bestimmen, so bleiben wir im Unklaren über die Grösse der begangenen Fehler; sobald wir aber auch den dritten Winkel messen, so gibt uns der Unterschied zwischen der Winkelsumme und 180° Aufschluss über die Güte unserer Arbeit, und dieser Aufschluss wird um so klarer und richtiger sein, je öfter und sorgfältiger wir die einzelnen Winkel gemessen haben. Wir entnehmen hieraus, dass es für unseren vorliegenden Zweck nicht genügt, bloss so viele Beobachtungen zu machen als Unbekannte zu bestimmen sind, sondern dass jederzeit mehr Beobachtungen als Unbekannte zur Verfügung stehen müssen, um daraus die besten Werthe der Unbekannten und den Genauigkeitsgrad der Beobachtungen abzuleiten.

Die überschüssigen Beobachtungen machen uns auf das Dasein von unvermeidlichen Fehlern dadurch aufmerksam, dass sie nicht übereinstimmen und diese Widersprüche auch auf die Folgerungen übertragen, welche aus ihnen gezogen werden; und da der Aussage jeder Beobachtung wenn nicht

das gleiche doch ein bestimmtes Gewicht beigelegt werden muss, so ist von vorne herein klar, dass wir aus den überschüssigen mit den zufälligen Fehlern behafteten Beobachtungen nicht die absolut richtigen Werthe der Unbekannten, sondern nur solche Werthe der letzteren finden werden, welche sich der Wahrheit möglichst nähern oder die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben, dass sie die richtigen sind.

Wenn nun keine der Beobachtungen als absolut richtig angenommen werden kann, so müssen wir, um zu den eben besprochenen Näherungswerthen der Unbekannten zu gelangen, offenbar jede Beobachtung um einen kleinen Betrag ihrer eigenen Grösse ändern oder verbessern, so zwar, dass alle Widersprüche zwischen den Beobachtungen aufgehoben werden. Diese Verbesserungen verlangt schon der gesunde Menschenverstand, welcher nichts als wahr anzuerkennen vermag, was Widersprüche enthält oder auf Widersprüche führt; und damit an den Aussagen der Beobachtungen so wenig als möglich geändert wird, so entspricht es demselben logischen Bedürfnisse unseres Geistes, wenn als Princip der Ausgleichungsrechnung der Satz aufgestellt wird: die Summe der Quadrate der Verbesserungen soll ein Minimum sein.

Wenn demnach $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$ die Ergebnisse von n gleich sorgfältigen Messungen einer Grösse (z. B. einer Linie oder eines Winkels) sind und man bezeichnet mit l den wahrscheinlichsten, d. i. der Wahrheit am nächsten kommenden Werth dieser Grösse, so sind $v_1 = l - l_1$, $v_2 = l - l_2$, $v_3 = l - l_3$ u. s. w. die gesuchten Verbesserungen, und es soll nach unserem Princip die Summe $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2$ oder $(l - l_1)^2 + (l - l_2)^2 + (l - l_3)^2 + \ldots + (l - l_n)^2$ ein Minimum werden. Setzt man die erste Ableitung dieser Function von l der Null gleich, wie dieses die Lehre vom Grössten und Kleinsten verlangt, so ergibt sich als derjenige Werth von l, welcher die Summe der Fehlerquadrate zu einem Kleinsten macht, das arithmetische Mittel aus sämmtlichen n Beobachtungen, ein Resultat, das genau mit unserem „praktischen Gefühle" übereinstimmt und dem unser Verstand unmittelbare Evidenz beizulegen gewohnt ist. Erscheint hier der Satz vom arithmetischen Mittel als eine Folgerung aus dem vorhin aufgestellten Princip, so liegt es umgekehrt sehr nahe, jenen Satz als Axiom zu betrachten und daraus das Princip der Ausgleichungsrechnung abzuleiten. In der That wurde ursprünglich die Methode der kleinsten Quadrate in dieser Weise begründet, und es gibt noch Mathematiker genug, welche diese Begründung für ausreichend erachten und dem complicirten Beweise durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorziehen.

§. 4. **Erläuterungen des Princips.** Da es für das Fortschreiten in jeder wissenschaftlichen Erkenntniss von grösster Wichtigkeit ist, über die Grundbegriffe derselben ganz im Klaren zu sein, so folgen hier noch einige Erläuterungen des Grundprincips der Methode der kleinsten Quadrate.

Bezeichnen wir mit [a] die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, mit [a b] die Summe $a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 + \ldots$, überhaupt mit einem von eckigen

Klammern eingeschlossenen Ausdruck eine Summe von gleichartigen und nur in den Ordnungszahlen verschiedenen Ausdrücken, und nennen wir ferner die an den beobachteten Werthen einer Grösse l anzubringenden Verbesserungen $v_1, v_2, v_3 \ldots$, so verlangt unser Princip, dass

$$[v v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots$$

ein Minimum werde und alle Widersprüche zwischen den Beobachtungen unter sich und allen daraus gezogenen Folgerungen verschwinden. Die Veränderliche in der vorstehenden Function [v v] ist offenbar der gesuchte Werth l, während die beobachteten Grössen $l_1, l_2, l_3 \ldots$ constante Werthe sind. Drückt man also die Fehler $v_1, v_2, v_3 \ldots$ durch $l - l_1, l - l_2, l - l_3 \ldots$ aus, wie es oben schon einmal geschehen ist, und setzt die erste Ableitung von [v v] nach $l = o$, so ergibt sich hieraus der Werth von l, welcher [v v] zu einem Minimum macht, und es bedarf hier nicht erst des Werths der zweiten Ableitung der Function, um zu entscheiden, ob der Werth von l wirklich ein Minimum gebe, weil es in der Natur der vorliegenden Sache liegt, dass er kein Maximum geben kann.

Ist die Function [v v] von drei Veränderlichen x, y, z abhängig, so müssen die Werthe von x, y, z, welche die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum machen, aus drei Gleichungen gesucht werden, welche sich dadurch ergeben, dass man die partiellen Differentialquotienten von [v v] nach x, y, z einzeln = o setzt, denn es handelt sich hier um ein absolutes, nicht um ein relatives Minimum der Function [v v].

Ist beispielsweise ein Punkt im Raume zu bestimmen, dessen rechtwinkelige Coordinaten x, y, z je 3mal gleich sorgfältig gemessen und gleich $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ gefunden worden sind, so hat man die Beobachtungsfehler $x - x_1 = v_1, y - y_1 = v_2, z - z_1 = v_3, x - x_2 = v_4, y - y_2 = v_5, z - z_2 = v_6, x - x_3 = v_7, y - y_3 = v_8, z - z_3 = v_9$, und als Function, welche ein Minimum werden soll:

$$[v v] = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2.$$

Werden die ersten Ableitungen dieser Function oder deren partielle Differentialquotienten nach x, y, z, beziehungsweise mit $[v v]^1{}_x$, $[v v]^1{}_y$, $[v v]^1{}_z$ bezeichnet, so ergeben sich folgende drei Bestimmungsgleichungen:

$$[v v]^1{}_x = 2 (x - x_1) + 2 (x - x_2) + 2 (x - x_3) = o$$
$$[v v]^1{}_y = 2 (y - y_1) + 2 (y - y_2) + 2 (y - y_3) = o$$
$$[v v]^1{}_z = 2 (z - z_1) + 2 (z - z_2) + 2 (z - z_3) = o$$

aus denen die Werthe folgen:

$$x = \tfrac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$$
$$y = \tfrac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$$
$$z = \tfrac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3).$$

In dem Ausdrucke für [v v] stellen die drei ersten Glieder desselben das Quadrat des Abstands des gesuchten Punkts x y z von $x_1\, y_1\, z_1$, die nächstfolgenden drei Glieder das Quadrat des Abstands des Punkts x y z von $x_2\, y_2\, z_2$, und die drei letzten Glieder das Quadrat des Abstands des Punkts

$x\ y\ z$ von $x_3\ y_3\ z_3$ vor: es ist also der gesuchte Punkt $x\ y\ z$ derjenige, dessen Abstände von den beobachteten die kleinste Quadratsumme geben.

Denkt man sich ferner die durch die beobachteten Coordinatenwerthe dargestellten Punkte mit gleichen Gewichten belastet, so findet man bekanntlich die Coordinaten des Schwerpunkts dieses Systems von gleich schweren Punkten gerade so, wie wir eben die Coordinaten des Punkts $x\ y\ z$ gefunden haben: Diese Analogie mit einem Satze der Statik sagt uns, dass jede einzelne vollständige Beobachtung des gesuchten Punkts $x\ y\ z$ (d. i. die Messung seiner 3 Coordinaten) dem dadurch gefundenen Punkte ($x_1\ y_1\ z_1 \ldots$) ein bestimmtes gleiches Gewicht beilegt, und dass der gefundene Punkt $x\ y\ z$ mit dem Gewicht aller einzelnen Punkte belastet zu denken ist, sowie man im Schwerpunkt eines Körpers dessen ganzes Gewicht vereinigt annehmen kann. Daher schreibt sich der Ausdruck „Beobachtungen ins Gleichgewicht setzen," welcher nichts anderes als „Beobachtungen ausgleichen" sagen will.

§. 5. **Erweiterung des Princips.** Es ist bereits bemerkt worden, dass die durch die Ausgleichungsrechnung zu suchenden Verbesserungen mit den beobachteten Grössen gleichartig und demnach wie diese benannte Zahlen (Millimeter, Sekunden etc.) sein müssen. Nun kann man aber nur mit unbenannten Zahlen rechnen, es sind daher die concreten Grössen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ mit anderen concreten Grössen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ derselben Art, die ihnen als Einheiten zu Grunde liegen, zu dividiren. In dieser vollständigeren Auffassung heisst das Princip der Ausgleichungsrechnung:

es soll die Quadratsumme $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ ein Minimum werden.

Unter den concreten Grössen m hat man die mittleren zu befürchtenden Fehler der einzelnen Beobachtungen zu verstehen, bei Winkelmessungen also denjenigen kleinen Winkel, bis auf den eine einzige Messung einen Winkel richtig gibt, bei Längenmesssungen die Länge, auf welche der Massstab das Mass richtig angibt. Diese kleinen Winkel und Längen muss man aus Erfahrung kennen, und darum ist es gut, bei jeder passenden Gelegenheit sich anzumerken, wie gross der mittlere Fehler des Instruments für eine einzige Beobachtung ist, damit man allen späteren Messungen und Ausgleichungen einen möglichst richtigen Werth von m zu Grunde legen kann. (Wie dieser mittlere Fehler in verschiedenen Fällen aus Beobachtungen zu berechnen ist, wird in den folgenden §§ entwickelt).

Sind alle auszugleichenden Beobachtungen mit einem und demselben Instrumente und unter gleich günstigen Umständen gemacht, so ist der Werth von m für alle v derselbe, wesshalb der gemeinsame Nenner mm vor das Summenzeichen [] gesetzt werden kann und bloss [vv], das man sich als eine Summe von unbenannten Zahlen zu denken hat, zu einem Minimum gemacht zu werden braucht. Sobald aber die mittleren Fehler der auszugleichenden Beobachtungen verschieden sind, kann mm nicht mehr als constanter Factor betrachtet und vor die Klammer gesetzt, sondern

muss in der ihm zukommenden Grösse als Divisor unter die betreffenden v gesetzt werden. Wäre z. B. ein und derselbe Winkel je 2mal mit 3 verschiedenen Theodolithen, welchen die mittleren Fehler 5", 10", 15" zukommen, gemessen worden, so hätte man die Zahl

$$\left[\frac{vv}{mm}\right] = \frac{v_1 v_1}{25} + \frac{v_2 v_2}{25} + \frac{v_3 v_3}{100} + \frac{v_4 v_4}{100} + \frac{v_5 v_5}{225} + \frac{v_6 v_6}{225}$$

oder auch

$$900 \left[\frac{vv}{mm}\right] = 36\, v_1^2 + 36\, v_2^2 + 9\, v_3^2 + 9\, v_4^2 + 4\, v_5^2 + 4\, v_6^2$$

zu einem Minimum zu machen.

Da es zu den Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gehört, die mittleren Fehler m erst zu bestimmen, so kann es auffallen, dass sie hier schon als bekannt vorausgesetzt werden. Es ist jedoch diese Voraussetzung nur für ungleichartige Beobachtungsgrössen und für die erste Berechnung der Verbesserungen und mittleren Fehler nothwendig; für diese Berechnung genügen selbst grobe Näherungswerthe von m, wie sie in den Angaben der Nonien, Mikrometerschrauben, Libellenscalen etc. vorliegen. Die mit den so erhaltenen Werthen von m durchgeführte zweite Berechnung der einzelnen Verbesserungen und mittleren Fehler gibt in der Regel schon hinreichend genaue Resultate, wäre es aber nicht der Fall, so führt die dritte Berechnung sicher zum Ziele.

§. 6. **Ausgleichungsaufgaben.** Die Anwendung des an und für sich einfachen Princips der Methode der kleinsten Quadrate erfordert in den verschiedenen Fällen der Praxis besondere Regeln, wesshalb man die hier zu behandelnden Aufgaben in drei Abtheilungen bringt, nämlich:

I. Die gesuchten Grössen sind unabhängig von einander und werden unmittelbar beobachtet, wie dieses in dem bereits vorgeführten Beispiele (§. 4) der Fall war. Hier hat man es mit der Ausgleichung directer Beobachtungen zu thun, und man kann jede unbekannte Grösse so behandeln, als ob sie nur allein vorhanden wäre.

II. Die gesuchten Grössen sind zwar auch unabhängig von einander, können aber nicht unmittelbar, sondern nur im Zusammenhange mit anderen Grössen beobachtet werden: in diesem Falle liegt die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen vor. Um hievon eine Anschauung zu erhalten, erinnere man sich, dass zwischen der Entfernung e und dem Lattenabschnitt l des Reichenbachschen Distanzmessers die Relation $e = c\,l + c'$ besteht, worin c und c' zwei von einander unabhängige Constante bezeichnen. Will man nun diese Grösse nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, so liefern die Beobachtungen nur zusammengehörige Werthe e_1, l_1; e_2, l_2; e_3, l_3 u. s. w., welche alle der eben angegebenen Bedingung genügen müssen, und es sind diese e und l die vermittelnden Beobachtungen, deren Ausgleichung zu den unbekannten Constanten c und c' führt.

III. Die gesuchten Grössen werden unmittelbar beobachtet, sind aber

nicht unabhängig von einander, sondern müssen gewisse Bedingungen erfüllen. Hier handelt es sich um die Ausgleichung bedingter Beobachtungen. Der einfachste hieher gehörige Fall ist die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecks. Man sucht diese 3 Winkel, von denen jeder gemessen, aber von den beiden anderen dadurch abhängig ist, dass er mit diesen eine bestimmte Winkelsumme geben muss.

Die bezeichneten drei Abschnitte zerfallen wieder in Unterabtheilungen, je nachdem Beobachtungen von gleicher oder ungleicher Genauigkeit vorausgesetzt werden.

I. Ausgleichung directer Beobachtungen.

A. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

§. 7. **Arithmetisches Mittel.** Es ist bereits gezeigt worden, dass die Ausgleichung directer Beobachtungen von gleicher Genauigkeit auf das arithmetische Mittel aus diesen Beobachtungen führt, so dass die unbekannte Grösse

$$x = \frac{[x]}{n} \tag{1}$$

wird und die einzelnen Verbesserungen ausgedrückt sind durch

$$v_1 = x - x_1, \; v_2 = x - x_2, \; v_3 = x - x_3, \; \ldots\ldots \; v_n = x - x_n.$$

Addirt man alle diese Verbesserungen, so ergibt sich

$$[v] = nx - [x] = 0 \tag{2}$$

und in dieser Formel liegt ohne Zweifel eine Controle der Rechnung, insoferne die Summe der positiven Verbesserungen jener der negativen gleich sein muss.

Aus den Werthen von $v_1, v_2, v_3 \ldots$ kann man $[vv]$ berechnen. Denkt man sich statt der wirklichen n Beobachtungen, welche die Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ liefern, n andere welche lauter gleiche Werthe und von einer solchen Grösse zur Folge haben, dass die Summe der Quadrate ihrer n gleichen Fehler (a) oder $[aa]$ jener der wirklichen Beobachtungen $[vv]$ gleich wird, so ergibt sich aus dieser Gleichheit der Werth von

$$a = \sqrt{\frac{[vv]}{n}}. \tag{3}$$

Diese Grösse heisst die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel und ist, wie man sieht, der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen umgekehrt proportional. Da diese Abweichung bei 1 Beobachtung $= 1$ ist, so wird sie bei 4, 9, 16 ... Beobachtungen beziehlich $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ sein. Die Reciproke von a oder

$$g = \sqrt{\frac{n}{[vv]}} \tag{4}$$

heisst die Genauigkeit des arithmetischen Mittels, und diese ist folglich der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl n direct proportional: wenn somit die Genauigkeit bei 1 Beobachtung 1 ist, so ist sie bei 4, 9, 16 ... Beobachtungen beziehlich 2, 3, 4 u. s. w.

§. 8. **Die Fehler einer Beobachtung.** Die mittlere Abweichung einer Beobachtung vom arithmetischen Mittel, welche in dem Ausdrucke für a enthalten ist, genügt für die Beurtheilung der Genauigkeit geodätischer Arbeiten nicht, man will die mittlere Abweichung der Beobachtungen von der Wahrheit oder die Grösse kennen lernen, welche man den mittleren Fehler einer Beobachtung nennt. Da man nun den wahren Werth einer beobachteten Grösse nicht erkennen und folglich auch den mittleren Fehler m nicht genau berechnen kann, so begnügt man sich mit einem Näherungsausdrucke, den die Wahrscheinlichkeitsrechnung dadurch an die Hand gibt, dass sie lehrt, es sei

$$[ww] = [vv] + mm,$$

wenn $w_1, w_2, w_3 \ldots$ die Verbesserungen bezeichnen, welche an den beobachteten Grössen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ in dem Falle anzubringen wären, dass man diese dem wahren x, das = X sein soll, gleich machen wollte. Setzt man für [ww] seinen Werth n.mm in vorstehende Gleichung ein, so wird

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}. \qquad (5)$$

Zu diesem Ausdrucke kann man auch durch folgende Betrachtung gelangen. Erfahrungsgemäss befindet sich unter einer grossen Zahl beobachteter Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots$ das Mittel x selbst ein oder mehrere Male, und wir schreiben in diesem Falle dem beobachteten x denselben mittleren Fehler m zu wie den $x_1, x_2, x_3 \ldots$. Umgekehrt dürfen wir einer zu den vorliegenden $x_1, x_2, x_3 \ldots$ hinzugedachten fehlerfreien Beobachtung eine Abweichung vom Mittel = m beilegen. Dadurch vermehrt sich [vv] um ein mm, ohne dass dadurch etwas an den vorhandenen n Beobachtungen geändert wird: die Summe [vv] + mm muss also auf letztere allein vertheilt werden, und hiedurch gelangt man zur Gleichung n.mm = [vv] + mm, aus der m wie oben angegeben folgt.

Der mittlere zu befürchtende Fehler m ist somit stets etwas grösser als die mittlere Abweichung a vom arithmetischen Mittel, beide Werthe nähern sich aber einander um so mehr, je grösser n ist, und in diesem Falle weicht das arithmetische Mittel nur sehr wenig vom wahren Werthe X ab.

Practiker der alten Schule nennen häufig auch den Quotienten, welcher sich ergibt, wenn man den absoluten Werth aller v oder [v] durch n dividirt, mittleren Fehler; diese Bezeichnung ist jedoch unrichtig: man kann diesen Quotienten höchstens den durchschnittlichen Fehler nennen, wenn n so gross ist, dass $\sqrt{n(n-1)} = n$ gesetzt werden darf; denn eigentlich ist der Durchschnittsfehler einer Beobachtung

$$d = \frac{[v]}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{6}$$

und es ist derselbe, wie der mittlere Fehler, auf den wahren Werth X bezogen; bezieht man ihn jedoch nur auf das arithmetische Mittel x, so wird in der That der Factor (n — 1) unter dem Wurzelzeichen = n und

$$d = d' = \frac{[v]}{n} \tag{7}$$

während der auf dasselbe Mittel bezogene mittlere Fehler gleich ist

$$m = a = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}. \tag{8}$$

§. 9. **Fehler des arithmetischen Mittels.** Das arithmetische Mittel x kann sich zwar dem wahren Werthe X sehr nähern, vollständig stimmt es aber mit diesem nie überein, es bleibt also noch ein Fehler $X - x = \mu$ übrig, welcher der Fehler des arithmetischen Mittels mehrerer Beobachtungen heisst. Bezieht man die an den beobachteten Werthen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ anzubringenden Verbesserungen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ auf den wahren Werth X, so müssen dieselben noch um $\pm \mu$ corrigirt werden, so dass die Verbesserungen $w_1 = v_1 \pm \mu$ u. s. w. entstehen und wieder, wie im vorigen Paragraphen, $n m^2 = [w^2]$, also auch

$$n \,.\, mm = [(v \pm \mu)^2] = [v\,v] \pm 2\,\mu\,[v] + [\mu\mu]$$

wird. Nun ist aber nach Gl. (2) die Summe $[v] = o$ und $[\mu\mu] = n \,.\, \mu\mu$, daher $n \,.\, mm = [v\,v] + n \,.\, \mu\mu$, und wenn man Gl. (5) beizieht,

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n(n-1)}}. \tag{9}$$

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels ist also m direct und $\sqrt{n}$ umgekehrt proportional: will man nun bei gleichbleibendem mittleren Fehler einer Beobachtung (m) den Fehler des arithmetischen Mittels auf $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{3}\mu$, $\frac{1}{4}\mu \ldots$ herabdrücken, so müssen die Beobachtungszahlen im quadratischen Verhältnisse der Nenner von μ vermehrt werden, d. h. 4 n, 9 n, 16 n . . . sein.

§. 10. **Wahrscheinliche Fehler.** Statt des mittleren Fehlers einer Beobachtung oder des arithmetischen Mittels einer Reihe von Beobachtungen gibt man häufig den wahrscheinlichen Fehler w oder denjenigen besonderen Werth von v an, für welchen die Wahrscheinlichkeit, dass er bei den einzelnen Beobachtungen nicht überschritten werde, $\frac{1}{2}$ beträgt. Mit andern Worten lässt sich der wahrscheinliche Fehler als diejenige Fehlergrenze bezeichnen, von der es eben so wahrscheinlich ist, dass sie überschritten als nicht erreicht wird, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines Fehlers v innerhalb der Grenzen $\pm$ r ist eben so gross als die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens ausserhalb dieser Grenzen. Der wahrscheinliche Fehler steht zum mittleren Fehler einer Beobachtung in einem constanten Verhältnisse, indem jederzeit

$$w = 0{,}674486 \,.\, m = \tfrac{2}{3}\, m \tag{10}$$

ist. Der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels ω steht zum wahrscheinlichen Fehler w einer Beobachtung in demselben Verhältnisse wie der mittlere Fehler μ des Mittels zum mittleren Fehler m einer Beobachtung, und es ist daher

$$\omega = 0{,}674486 . \mu = \tfrac{2}{3} \mu. \tag{11}$$

Ausser diesen Beziehungen liefert uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung noch ein wichtiges Resultat, dass nämlich die wahrscheinlichen Grenzen für die wahren Werthe von m, μ, w, ω (also diejenigen Werthe, welche eben so leicht überschritten als nicht erreicht werden) zwischen den beiden Werthen liegen, welche man erhält, wenn man m, μ, w, ω einmal mit $\left(1 + 0{,}476936 . n^{-\frac{1}{2}}\right)$ und dann mit $\left(1 - 0{,}476936 . n^{-\frac{1}{2}}\right)$ multiplicirt.

§. 11. **Genauigkeit der Messungen.** Die Methode der kleinsten Quadrate soll uns unter Anderem Aufschluss über die Genauigkeit ausgeführter Messungen geben. Wir können aber diese Genauigkeit nur nach dem mittleren oder dem wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung (m, w) oder des arithmetischen Mittels (μ, ω) beurtheilen, indem wir dieselbe diesen Fehlern umgekehrt proportional setzen: je kleiner diese Fehler sind, desto grösser ist die Genauigkeit der Arbeit. Gewöhnlich bezieht man diese Genauigkeit auf den mittleren Fehler μ des arithmetischen Mittels, und es wächst daher diese Genauigkeit, wie schon im §. 7 bemerkt, mit der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl.

Die Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, welche in diesem Abschnitte behandelt wurden, lassen sich nunmehr als solche bezeichnen, welchen durchaus der gleiche mittlere Fehler m zukommt; und wenn im §. 5 die den Messinstrumenten zukommenden mittleren Fehler in gewissen Fällen als bekannt vorausgesetzt sind, so ist jetzt der Weg gezeigt, auf dem sie durch entsprechende Beobachtungsreihen gefunden werden können.

Hätte man z. B. den Abstand zweier festen Punkte mit Messstangen 10 mal gleich sorgfältig gemessen und folgende Angaben erhalten (denen sofort die Verbesserungen v gegen das arithmetische Mittel und die vv beigefügt sind):

$125{,}\overset{m}{4}352$	$v = + 0{,}\overset{m}{0}002$	$vv = 0{,}00000004$
67	− 13	169
38	+ 16	256
49	+ 05	025
63	− 09	081
55	− 01	001
46	+ 08	064
69	− 15	225
57	− 03	009
44	+ 10	100
$x = 125{,}4354$	$[v] = 0{,}0000$	$[vv] = 0{,}00000934$

so ergäbe sich der wahrscheinlichste Werth für den Abstand $x = 125^{m}{,}4354$ mit einem mittleren Fehler der einzelnen Beobachtung von

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{9}} = 0^m{,}0010187$$

und einem mittleren Fehler des arithmetischen Mittels von

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{10}} = 0^m{,}00032215.$$

Während nun die einzelne Messung um $\pm$ $1^{mm}{,}019$ unsicher wäre, betrüge die Unsicherheit des arithmetischen Mittels nur $\pm$ $0^{mm}{,}322$, was in der Angabe des Resultats wie folgt bemerkt würde:

$$x = 125^m{,}4354 \pm 0^m{,}00032$$

und andeutete, dass die gesuchte Länge eben so gut $125^m{,}43572$ als $125^m{,}43518$ betragen könne.

B. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

§. 12. **Gewicht einer Beobachtung.** In §. 5 war bereits davon die Rede, dass im Grunde nur die unbenannten durch $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ vorgestellten Zahlen-Summen, deren einzelne Posten Quotienten aus den Quadraten der Beobachtungsfehler v und der mittleren Fehler m sind, zu einem Minimum gemacht werden können. Denkt man sich nun die Quadratsumme $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ mit einer constanten Zahl $m_0 m_0$ multiplicirt, welche ein Vielfaches aller in dieser Summe enthaltenen Nenner sein mag, so wird offenbar an dem Werthe, welcher diese Summe zu einem Minimum macht, nichts geändert; und bezeichnet man die Quotienten

$$\frac{m_0 m_0}{m_1 m_1}, \quad \frac{m_0 m_0}{m_2 m_2}, \quad \frac{m_0 m_0}{m_3 m_3} \; \ldots . \text{ beziehlich mit } p_1, \; p_2, \; p_3 \ldots .$$

so sind dieselben offenbar den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt und den Quadraten der Genauigkeiten der Beobachtungen direkt proportional. Diese Zahlen $p_1, p_2, p_3 \ldots$ nennt man die *Gewichte der Beobachtungen*.

Um diesen Begriff anschaulich zu machen, denke man sich zu den vorhandenen ungleich genauen Beobachtungen eine grosse Reihe anderer gleich genauer Beobachtungen, und betrachte jede vorhandene Beobachtung als das arithmetische Mittel aus einer gewissen Anzahl bloss gedachter Beobachtungen, so kann man die Anzahl der fingirten Beobachtungen, deren arithmetisches Mittel dieselbe Genauigkeit hat wie eine vorgegebene wirklich angestellte Beobachtung, das Gewicht der letzteren nennen, während jede der fingirten Beobachtungen die *Gewichtseinheit* vorstellt.

Um hierüber vollständig klar zu werden, denke man sich weiter, eine und dieselbe Grösse, etwa eine Länge, sei ursprünglich 6 mal mit gleicher Genauigkeit gemessen worden und es hätten diese Messungen die Längen $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ ergeben: so ist nach Abtheilung A die ausgeglichene Länge

$x = \frac{1}{6}[l]$, der mittlere Fehler einer Beobachtung $m = \sqrt{\frac{1}{5}[vv]}$ und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels $\mu = \frac{m}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{30}[vv]}$, also $m^2 = 6\,\mu^2$. Vereinigen wir jetzt die zweite und dritte Messung zu einem Mittel $\frac{1}{2}(l_2 + l_3) = l_2'$ und die vierte, fünfte und sechste Messung ebenfalls zu einem Mittel $\frac{1}{3}(l_4 + l_5 + l_6) = l_3'$; nennen wir ferner die Verbesserung, welche zu l_2' gehört und aus v_2 und v_3 sich zusammensetzt, v_2' und die zu l_3' gehörende aus v_4, v_5, v_6 sich zusammensetzende Verbesserung v_3', so ist ohne Zweifel $v_2' = \frac{1}{2}(v_2 + v_3)$, $v_3' = \frac{1}{3}(v_4 + v_5 + v_6)$ und das neue System von Fehlergleichungen folgendes:

$$v_1' = x - l_1' = x - l_1$$
$$v_2' = x - l_2' = x - \tfrac{1}{2}(l_2 + l_3)$$
$$v_3' = x - l_3' = x - \tfrac{1}{3}(l_4 + l_5 + l_6).$$

Damit nun die Ausgleichung dieser Fehler dasselbe Resultat wie die der der 6 gleichgenauen Messungen ergibt, kann man

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6}{6} = \frac{1 \,.\, l_1 + 2 \,.\, l_2' + 3 \,.\, l_3'}{1 + 2 + 3}$$

schreiben, was andeutet, dass l_2' zwei und l_3' drei ursprüngliche Messungen ersetzt: Ist also 1 das Gewicht jeder dieser Messungen, so wird 2 das Gewicht von l_2' und 3 das Gewicht von l_3' und wäre $p_1 = \frac{m_0^2}{m_1^2}$ das Gewicht von l_1, so wäre $p_2 = 2 \,.\, \frac{m_0^2}{m_1^2}$ das Gewicht von l_2' und $p_3 = 3 \,.\, \frac{m_0^2}{m_1^2}$ das Gewicht von l_3' entsprechend der Gleichung (7), wonach die Quadrate der mittleren Fehler sich umgekehrt und die der Genauigkeiten direct wie die Beobachtungszahlen 1, 2, 3 verhalten.

§. 13. **Aufgabe.** Es seien n directe Beobachtungen $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$, denen die Gewichte $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ zukommen, auszugleichen und die mittleren Fehler dieser Beobachtungen zu bestimmen. (Erweiterung der Aufgabe im Schlusssatze des §. 3, worin $p_1 = p_2 = p_3 = p_n = 1$)

Die Forderung, dass hier $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ oder $m_0\, m_0 \left[\frac{vv}{mm}\right]$ zu einem Minimum zu machen ist, nimmt nunmehr, nach Einführung des Begriffs und der Bezeichnung des Gewichts einer Beobachtung (§. 12), die selbstverständliche Form an:

$$[p\,v\,v] = p_1\, v_1^2 + p_2\, v_2^2 + p_3\, v_3^2 + \ldots + p_n\, v_n^2 = \min. \qquad (12)$$

Setzt man für $v_1, v_2, v_3 \ldots$ die entsprechenden Werthe, indem man x als den besten Werth von l ansieht, demnach $v_1 = x - l_1$, $v_2 = x - l_2$, $v_3 = x - l_3$ u. s. w. und verfährt nach den Regeln der Differentialrechnung, so hat man für x die Bestimmungsgleichung

$$[p\,v\,v]'_x = 2p_1(x - l_1) + 2p_2(x - l_2) + 2p_3(x - l_3) + \ldots\ldots + 2p_n(x - l_n) = 0$$

und daraus

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots\ldots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \qquad (13)$$

Dieser Werth von x wird in einem allgemeineren Sinne ebenfalls das arithmetische Mittel genannt, und es ist diese Bezeichnung insoferne gerechtfertigt, als man im ganzen [p] Beobachtungen von gleicher Genauigkeit zu machen hätte, um denselben Werth x zu erhalten, wie ihn der vorstehende Ausdruck liefert, von dem kaum bemerkt zu werden braucht, dass er im Grunde nur das vorausgegangene Beispiel verallgemeinert.

Will man in den vorstehenden Werth von x statt der Gewichte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ die mittleren Fehler der Beobachtungswerthe $l_1, l_2, l_3 \ldots$ einführen, so braucht man nur, indem man für die fingirten gleichgenauen Beobachtungen den mittleren Fehler m annimmt,

$$p_1 = \frac{m^2}{m_1^2}, \quad p_2 = \frac{m^2}{m_2^2}, \quad p_3 = \frac{m^2}{m_3^2} \qquad (14)$$

zu setzen, wodurch sich sofort x ohne Berechnung der Gewichte p ergibt. (Hiebei kann von den in §. 5 erwähnten Näherungswerthen für $m_1, m_2, m_3 \ldots$ Gebrauch gemacht werden.) Da die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3 \ldots$ nie mit grosser Sicherheit bestimmt werden können, so ist es durch Vornahme kleiner Aenderungen an denselben leicht möglich, die Gewichte in ganzen Zahlen darzustellen; übrigens ist es nur eine Forderung der Bequemlichkeit, nicht der Nothwendigkeit, die Gewichte in ganzen Zahlen auszudrücken, indem es bloss darauf ankommt, das Verhältniss der Gewichte richtig auszudrücken.

Schliesslich sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass in der Bestimmungsgleichung für x (Seite 15 unten) der Satz enthalten ist:

$$[pv] = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \ldots\ldots + p_n v_n = 0 \qquad (15)$$

welcher eben so wie der in Gl. (2) enthaltene zur Rechnungscontrole benutzt werden kann.

§. 14. **Die mittleren Fehler.** Man begreift leicht dass da, wo es sich um Ausgleichung von Beobachtungen verschiedenen Gewichts handelt, von einem allen Beobachtungen gemeinsamen Fehler keine Rede sein kann, wohl aber von einem mittleren Fehler der Gewichtseinheit jeder einzelnen Beobachtung und des aus dem allgemeinen arithmetischen Mittel gefundenen wahrscheinlichsten Werthes x.

Legen wir der Gewichtseinheit einen mittleren Fehler m bei, den wir als Abweichung von der Wahrheit auffassen, so gelten nach (15) die Gleichungen:

$$m^2 = p_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = p_3 m_3^2 = \ldots\ldots = p_n m_n^2$$

und es ist somit allgemein

$$m_n = \frac{m}{\sqrt{p_n}}. \qquad (16)$$

Hat der in Nr. 13 berechnete Mittelwerth x einen mittleren Fehler μ, so ist dieser Fehler zu berechnen aus der Gleichung

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}}. \tag{17}$$

Will man das Gewicht P des arithmetischen Mittels x kennen, so findet sich dasselbe aus der nach Nr. (9) gebildeten Gleichung $m^2 = P\,\mu^2$, welche in Verbindung mit (17)

$$P = \frac{m^2}{\mu^2} = [p] \tag{18}$$

liefert: es ist somit das Gewicht des Mittelwerths x gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen. Der mittlere Fehler m der Gewichtseinheit, welcher in den letzten drei Ausdrücken vorkommt und niemals genau zu berechnen, sondern nur zu schätzen ist, wird auf ähnliche Weise wie der mittlere Fehler einer Beobachtung aus n gleich genauen Werthen gefunden: man hat nämlich in jenem Ausdrucke für m nur [pvv] für [vv] und [p] für n zu setzen, wodurch

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{P-1}} \tag{19}$$

wird. Führt man diesen und den vorhergehenden Werth in den Ausdruck für μ ein, so wird der mittlere Fehler des allgemeineren arithmetischen Mittels

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{(P-1)\,P}}. \tag{20}$$

Ist z. B. ein Winkel mit demselben Theodolithen von demselben Beobachter und unter Umständen zweimal gemessen worden, für welche der mittlere Fehler einer Beobachtung $\pm$ 5″ beträgt, und war das Ergebniss der ersten aus 9 Wiederholungen sich zusammensetzenden Messung $w_1 = 63^0\,25'\,39,''5$ und das der zweiten, welche 16 Beobachtungen umfasste, $w_2 = 63^0\,25'\,43,''75$, so hat man zunächst nach Formel (9) die mittleren Fehler der arithmetischen Mittel w_1 und w_2

$$\mu_1 = \frac{5''}{\sqrt{9}} = \pm\frac{5''}{3} \text{ und } \mu_2 = \frac{5''}{\sqrt{16}} = \pm\frac{5''}{4}.$$

Es verhalten sich demnach die zu w_1 und w_2 gehörigen Gewichte

$$p_1 : p_2 = \frac{9}{25} : \frac{16}{25} = 9 : 16$$

und es wird folglich der beste Werth des Winkels (hier der Sekunden):

$$w = \frac{p_1\,w_1 + p_2\,w_2}{p_1 + p_2} = \frac{9\,.\,39{,}5 + 16\,.\,43{,}75}{9 + 16} = 42,''22$$

wobei der mittlere Fehler der Gewichtseinheit

$$m = \sqrt{\frac{9\,.\,(2{,}72)^2 + 16\,.\,(1{,}53)^2}{24}} = \pm\,2,''082$$

und jener des arithmetischen Mittels w gleich ist

$$\mu = \tfrac{1}{5}\,m = \pm\,0,''416.$$

Das Ergebniss unserer Ausgleichungsrechnung ist somit

$$w = 63^0\,25'\,42,''22 \pm 0,''416.$$

Genau zu demselben Resultat wäre man gekommen, wenn man die angestellten 25 gleich genauen Beobachtungen als solche für sich behandelt hätte.

C. Functionen direct beobachteter Grössen.

§. 15. **Mittlerer Fehler der Function.** Aus direct beobachteten und ausgeglichenen Grössen lassen sich die mannichfaltigsten Functionen zusammensetzen, und es entsteht dann die Frage nach dem mittleren Fehler einer solchen Function. Diese Frage lässt sich wie folgt beantworten.

Hat man die von einander unabhängigen Grössen $t_1, t_2, t_3 \ldots$, denen die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3 \ldots$ anhaften, direct beobachtet und ist

$$u = F(t_1, t_2, t_3 \ldots)$$

so wird die Aenderung m von u, welche aus der Aenderung von t_1 in $t_1 \pm m_1$, von t_2 in $t_2 \pm m_2$, von t_3 in $t_3 \pm m_3$ u. s. w. hervorgeht, nach dem Taylor'schen Satze gefunden. Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{du}{dt_1}, \frac{du}{dt_2}, \frac{du}{dt_3} \ldots \text{ mit } q_1, q_2, q_3 \ldots$$

und vernachlässigt die höheren Potenzen der Fehler $m_1, m_2, m_3 \ldots$, so erhält man zunächst $m = q_1 m_1 + q_2 m_2 + q_3 m_3 + \ldots$, wobei alle m eben so wohl positiv als negativ sein können, und dann durch Quadrirung (mit Rücksicht auf beide gleich mögliche Zeichen):

$$m^2 = q_1^2 m_1^2 + q_2^2 m_2^2 + q_3^2 m_3^2 + \ldots$$

Hieraus folgt der mittlere Fehler der Function, ausgedrückt durch die mittleren Fehler der direct beobachteten Grössen:

$$m = \sqrt{[q^2 m^2]} \cdot \tag{21}$$

Wäre $u = F(t_1 t_2 t_3 \ldots) = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \ldots + a_n t_n$, wobei $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ bestimmte Zahlencoefficienten sind, so hätte man einfach

$$q_1 = a_1, q_2 = a_2, q_3 = a_3 \ldots q_n = a_n \text{ und daher}$$
$$m^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + a_3^2 m_3^2 + \ldots + a_n^2 m_n^2 \text{ oder}$$
$$m = \sqrt{[a^2 m^2]} \tag{22}$$

zu setzen. Besässen alle Werthe von t gleiche Genauigkeit, so würden auch alle Fehler derselben einander und $= m_1$ sein; in diesem Falle wäre

$$m = m_1 \sqrt{[a^2]} \cdot \tag{23}$$

Käme hiezu noch die Gleichheit aller Coefficienten $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, so ginge der Fehler m über in

$$m = m_1 a_1 \sqrt{n} \tag{24}$$

und wenn die Function u lediglich eine Zusammensetzung der gemessenen Grössen $t_1, t_2, t_3 \ldots$ und demnach jeder Coefficient $a_1, a_2, a_3 \ldots = 1$ wäre, so hätte man

$$m = m_1 \sqrt{n} \tag{25}$$

d. h. der Fehler in der Zusammensetzung (z. B. einer Linie aus den Massstablängen) ist der Quadratwurzel aus der Zahl der Theile proportional:

damit ist also gesagt, dass man die Zahl der Theile möglichst gering, deren Ausdehnung aber möglichst gross machen soll (z. B. Messstangen, Messlatten etc. für Grundlinien).

Wäre u bloss von einer beobachteten Grösse t_1 abhängig, demnach $u = a_1 t_1$ und $m = a_1 m_1$, so betrüge der zu befürchtende mittlere Fehler in u das a_1 fache von m_1: desshalb soll man in einem solchen Falle wiederum t_1 möglichst gross nehmen, damit a_1 und hiemit auch m klein wird. Hätte man eine gerade Linie von bedeutender Länge auf irgend eine Weise in 9 gleiche Theile getheilt und wollte diese Länge bloss aus der Messung eines solchen Theils erschliessen, so wäre $u = 9\, t_1$ und der mittlere Fehler $m' = 9\, m_1$. Misst man dagegen alle 9 Theile, so ist $u = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_9$ und der mittlere Fehler $m'' = m_1 \sqrt{9} = 3\, m_1$; in dem zweiten Falle betrüge somit der mittlere Fehler in u nur den dritten Theil von dem des ersten Falls, ein Umstand der in der Praxis wohl zu berücksichtigen ist.

II. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

A. Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

§. 16. **Berechnung der Unbekannten.** Nach der in §. 6 gegebenen Definition handelt es sich hier darum, die in der linearen Function

$$u = ax + by + cz + \ldots\ldots$$

auftretenden constanten Coefficienten a, b, c ... auszumitteln, wenn für besondere Werthe der abhängigen Veränderlichen x, y, z ... also für $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, $x_3\, y_3\, z_3$ .... die Werthe o_1, o_2, o_3 .... der abhängigen Veränderlichen u beobachtet sind, und die Zahl n dieser Beobachtungen grösser als die Zahl k der Constanten ist.

Würden die beobachteten Werthe o_1, o_2, o_3 ... fehlerfrei sein, so könnte man aus folgenden k Gleichungen

$$\begin{aligned} o_1 &= ax_1 + by_1 + cz_1 + \ldots \\ o_2 &= ax_2 + by_2 + cz_2 + \ldots. \\ &\vdots \\ o_k &= ax_k + bx_k + cz_k + \ldots. \end{aligned}$$

die n Constanten a, b, c ... bestimmen und dieselben würden alle übrigen (n — k) Gleichungen befriedigen, d. i. zu identischen Gleichungen machen. Da nun aber die Grössen o_1, o_2, o_3 ... nicht fehlerfrei sind, vielmehr zwischen diesen beobachteten und den berechneten Werthen von u, nämlich

$$\begin{aligned} u_1 &= ax_1 + by_1 + cz_1 + \ldots \\ u_2 &= ax_2 + by_2 + cz_2 + \ldots. \\ u_3 &= ax_3 + by_3 + cz_3 + \ldots \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

kleine Unterschiede $u_1 - o_1 = v_1$, $u_2 - o_2 = v_2$, $u_3 - o_3 = v_3$ ..... bestehen, so muss man, um allen Beobachtungen möglichst gerecht zu werden,

die Constanten a, b, c ... so bestimmen, dass durch sie die Summe der Fehlerquadrate [vv] ein Minimum wird. Wenn nun

$$v_1 = u_1 - o_1 = a x_1 + b y_1 + c z_1 + \ldots - o_1$$
$$v_2 = u_2 - o_2 = a x_2 + b y_2 + c z_2 + \ldots - o_2$$
$$v_3 = u_3 - o_3 = a x_3 + b y_3 + c z_3 + \ldots - o_3 \text{ u. s. w.}$$

so soll die Summe

$$[vv] = [(ax + by + cz + \ldots - o)^2]$$

ein Minimum werden. Die Werthe von a, b, c ..., welche dieses bewirken können, ergeben sich nach den Regeln der Differentialrechnung aus folgenden k Bedingungsgleichungen:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + \ldots + v_n x_n = o$$
$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \ldots + v_n y_n = o$$
$$v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + \ldots + v_n z_n = o \text{ u. s. w.} \tag{26}$$

in welche die oben stehenden Werthe von $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$ einzusetzen sind. Thut man dieses, so erhält man nach den erforderlichen Reductionen folgendes andere System von k Gleichungen, welche zur Auffindung der Constanten a, b, c ... dienen und Normalgleichungen heissen, nämlich:

$$[xx]\, a + [xy]\, b + [xz]\, c + \ldots = [xo]$$
$$[yx]\, a + [yy]\, b + [yz]\, c + \ldots = [yo]$$
$$[zx]\, a + [zy]\, b + [zz]\, c + \ldots = [zo] \text{ u. s. w.} \tag{27}$$

Hat man hieraus a, b, c ... gefunden[1] und in die Function u eingesetzt, so ist diese vollkommen bestimmt, und es lassen sich nunmehr die den Beobachtungen $o_1, o_2, o_3 \ldots$ entsprechenden $u_1, u_2, u_3 \ldots$, demnach auch die $v_1, v_2, v_3 \ldots$ berechnen.

Aus dem System von Gleichungen (26), welches sich auch so schreiben lässt:

$$[vx] = o \quad [vy] = o \quad [vz] = o, \text{ u. s. w.} \tag{28}$$

geht hervor, dass nach dem Princip der Methode der kleinsten Quadrate die algebraische Summe der Beobachtungsfehler nicht nothwendig null sein muss. Dieses ist vielmehr nur dann der Fall, wenn die Function u ein constantes Glied hat, also

$$u = a + by + cz + \ldots$$

und folglich $x = 1$ ist; denn nur unter dieser Voraussetzung reducirt sich die erste der drei Gleichungen (26) oder (28) auf

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = [v] = o. \tag{29}$$

Was den mittleren Fehler m der beobachteten Werthe $o_1, o_2, o_3 \ldots$ betrifft, so findet man für denselben durch eine ähnliche Betrachtung, wie sie auf Seite 11 behufs Auffindung des mittleren Fehlers gleich genauer directer Beobachtungen angestellt wurde:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}}. \tag{30}$$

[1] So lange man es nur mit 2 oder 3 Unbekannten und Gleichungen zu thun hat, reichen die aus der Algebra bekannten Auflösungsmethoden der Normalgleichungen vollkommen aus; auf eine grössere Zahl von Unbekannten wendet man mit Vortheil besondere Eliminationsverfahren an. (Vergl. §. 26.)

Dieser Ausdruck für m geht in den Nr. 5 über, wenn k = 1 gesetzt wird, und in der That lassen sich directe Beobachtungen wie vermittelnde mit einem einzigen Elemente betrachten.

Würde die hier vorgelegene Aufgabe, aus Einer Function die Constanten zu bestimmen, dahin erweitert, dass aus mehreren Functionen derselben unabhängigen Veränderlichen und derselben Constanten diese letzteren zu bestimmen wären, so wird an dem hier erörterten Gange der Entwicklung nichts weiter geändert, als dass die Functionswerthe u_1, u_2, u_3 ... aus mehreren Functionen statt aus einer einzigen zu berechnen sind.

§. 17. **Beispiel.** Behufs einer grossen und wichtigen Centrirung auf der Amöneburg mass Gerling eine kleine Basis AC, welche nahe der Mitte in zwei Theile AB und BC getheilt war, mit eisernen Messstangen (Toisen) in der Art, dass von jedem der drei Punkte der Abstand der beiden anderen Punkte bestimmt wurde. Auf diese Weise fand er

$$\begin{aligned} AB &= \overset{T}{9},378976 = o_1 \\ AC &= 18,125097 = o_2 \\ BA &= 9,379902 = o_3 \\ BC &= 8,746738 = o_4 \\ CB &= 8,746164 = o_5 \\ CA &= 18,125676 = o_6 \end{aligned}$$

Diese Beobachtungen sind von zwei Elementen a und b abhängig, deren Zusammensetzung die Basis liefert. Die Längen a und b (die Constanten der Function u) sind hier zwar unmittelbar gemessen worden, es soll aber dieser die Ausgleichung wesentlich erleichternde Umstand des Beispiels halber übersehen werden. Die 6 berechneten Werthe der gemessenen Längen sind nun folgende:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 . a + 0 . b \text{ mit } x_1 = 1 \text{ und } y_1 = 0 \\ u_2 &= 1 . a + 1 . b \quad " \quad x_2 = 1 \quad " \quad y_2 = 1 \\ u_3 &= 1 . a + 0 . b \quad " \quad x_3 = 1 \quad " \quad y_3 = 0 \\ u_4 &= 0 . a + 1 . b \quad " \quad x_4 = 0 \quad " \quad y_4 = 1 \\ u_5 &= 0 . a + 1 . b \quad " \quad x_5 = 0 \quad " \quad y_5 = 1 \\ u_6 &= 1 . a + 1 . b \quad " \quad x_6 = 1 \quad " \quad y_6 = 1 \end{aligned}$$

Da hier $z = o$, so reduciren sich die Normalgleichungen (27) auf zwei, d. i. auf

$$[xx]\, a + [xy]\, b = [xo] \text{ und } [yx]\, a + [yy]\, b = [yo].$$

In dem vorliegenden Falle ist $[xx] = 4$, $[xy] = [yx] = 2$, $[yy] = 4$,

$$[xo] = 0_1 + 0_2 + 0_3 + 0_6 = 55,009651$$
$$[yo] = 0_2 + 0_4 + 0_5 + 0_6 = 53,743675$$

daher die beiden Normalgleichungen:

$$4\,a + 2\,b = 55,009651$$
$$2\,a + 4\,b = 53,743675$$

welche sofort die gesuchten Constanten $a = 9^T,379271$, $b = 8^T,746283$ und $a + b = 18^T,125554$ liefern. Die an den gemessenen Werthen 0_1, 0_2, 0_3,

O_4, O_5, O_6 anzubringenden Verbesserungen sind in Einheiten der sechsten Decimale (Milliontel Toisen): $v_1 = + 295$, $v_2 = + 457$, $v_3 = - 631$, $v_4 = - 455$, $v_5 = + 119$, $v_6 = - 122$. Hiemit berechnet sich $[vv] = 930105$, und da $n - k = 6 - 2 = 4$, so findet sich der mittlere Fehler der beobachteten Werthe nach Formel (30) $m = \frac{1}{2} \sqrt{[vv]} = \pm 482$ Milliontel Toisen oder $= \pm 0{,}42$ Pariser Linien.

§. 18. **Constante aus nicht lineären Functionen.** Wäre die Function

$$u = F(a, b, c \ldots x, y, z \ldots)$$

in Bezug auf die unbekannten Constanten a, b, c ... nicht lineär, so könnte man vorerst aus den vorliegenden n Beobachtungen eine kleinere Zahl k auswählen und mit diesen Näherungswerthe von a, b, c ... gleich A, B, C ... berechnen, und hierauf Verbesserungen zu A, B, C ... gleich α, β, γ ... suchen, welche in Verbindung mit A, B, C ... die Constanten a, b, c ... möglichst richtig darstellen.

Setzt man in der gegebenen Function u für a, b, c ... die Näherungswerthe A, B, C ... ein, so geht dieselbe in

$$U = F(A, B, C \ldots x, y, z \ldots)$$

über, und wenn man $A + \alpha$ für A, $B + \beta$ für B, $C + \gamma$ für C u. s. w. schreibt, so wird der Functionswerth wieder u, und eine Entwickelung desselben nach dem Taylor'schen Satze liefert

$$u = U + \frac{dU}{dA}\alpha + \frac{dU}{dB}\beta + \frac{dU}{dC}\gamma + \ldots \qquad (31)$$

Diese Function u ist in Bezug auf die zu bestimmenden sehr kleinen Grössen α, β, γ ... lineär, und folglich ist durch dieses Verfahren der vorliegende Fall auf den vorausgehenden zurückgeführt. Denn denkt man sich $\frac{dU}{dA} = x$, $\frac{dU}{dB} = y$, $\frac{dU}{dC} = z$, $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ und $u - U = u'$ gesetzt, so erhält man die Function $u' = ax + by + cz$ wieder, welche im vorhergehenden Paragraphen behandelt wurde.

Würde man in dem vorhergehenden Beispiel, wie es Gerling that,

$$a = A + \alpha = 9{,}379000 + \alpha$$
$$b = B + \beta = 8{,}746000 + \beta$$

demnach die Näherungswerthe $A = 9^t{,}379$ und $B = 8^t{,}746$ angenommen haben, so hätten sich die beiden Normalgleichungen auf Seite 21 in der Form

$$4\alpha + 2\beta = 55{,}009651 - (4A + 2B) = 0{,}001651$$
$$2\alpha + 4\beta = 53{,}743675 - (2A + 4B) = 0{,}001675$$

hieraus die an A und B anzubringenden Verbesserungen in der Grösse

$$\alpha = + 0^t{,}000271, \quad \beta = + 0^t{,}000283$$

und folglich die Unbekannten

$$a = A + \alpha = 9{,}379271$$
$$b = B + \beta = 8{,}746283$$

Toisen ergeben, übereinstimmend mit dem Ergebnisse der vorausgegangenen Berechnung.

B. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

§. 19. **Berechnung der Unbekannten.** Es bedarf nach den Erörterungen über die Behandlung ungleich genauer directer Beobachtungen keiner besonderen Auseinandersetzung mehr, dass in dem nunmehr vorliegenden Falle nicht $[vv] = [(ax + by + cz + \ldots - 0)^2]$, wie es bei gleich genauen mittelbaren Beobachtungen zu geschehen hat, sondern

$$[pvv] = [p\,(ax + by + cz + \ldots - 0)^2]$$

zu einem Minimum zu machen ist, wobei p_1, p_2, $p_3 \ldots$ die Gewichte der Beobachtungen bezeichnen. Hiedurch wird auch jedes in dem Gleichungssystem (26) enthaltene v mit dem Factor p multiplicirt, und es gehen in Folge dessen die Normalgleichungen (27) in folgende über:

$$[pxx]\,a + [pxy]\,b + [pxz]\,c + \ldots = [pxo]$$
$$[pyx]\,a + [pyy]\,b + [pyz]\,c + \ldots = [pyo]$$
$$[pzx]\,a + [pzy]\,b + [pzz]\,c + \ldots = [pzo] \text{ u. s. w.} \qquad (32)$$

aus denen die Unbekannten a, b, c ... nach §. 26 gefunden werden. Auf den mittleren Fehler äussert die Verschiedenheit der Genauigkeit der Beobachtungen keinen andern Einfluss, als dass $P - k$ oder $[p] - k$ für $P - 1$ zu setzen ist, so dass

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{P - k}} \qquad (33)$$

wird, analog dem Ausdrucke Nr. 17.

III. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

A. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

§. 20. **Erläuterung der Aufgaben dieses Abschnitts.** Nach der in §. 6 Seite 9 gegebenen Definition werden die auszugleichenden Grössen unmittelbar beobachtet, sind aber nicht unabhängig von einander, sondern müssen gewisse Bedingungen erfüllen, wie z. B.: die Summe der drei Winkel eines Dreiecks $= 180^0$. Um daher vorliegende Aufgaben allgemeiner aufzufassen, nehmen wir an, es seien die wahren Beobachtungsgrössen u_1, u_2, $u_3 \ldots$ durch die Natur der Sache so mit einander verknüpft, dass wir aus ihnen eine oder mehrere berechnen können, wenn die übrigen bekannt sind. Die Beobachtungen von Grössen, welche sich auch berechnen lassen, haben wir als überschüssige anzusehen.

Hätten wir die richtigen Werthe u_1, u_2, $u_3 \ldots$ bis auf einen zur Verfügung, so müsste sich dieser im Allgemeinen aus einer der folgenden Gleichungen finden lassen:

$$F_1\,(u_1, u_2, u_3 \ldots) = 0,\; F_2\,(u_1, u_2, u_3 \ldots) = 0,\; F_3\,(u_1, u_2, u_3 \ldots) = 0 \text{ u. s. w.} \qquad (34)$$

Diese Gleichungen enthalten somit die Bedingungen, welche die Grössen

$u_1, u_2, u_3 \ldots$ zu erfüllen haben, und darum heissen die Beobachtungen, aus denen die mit den zufälligen Fehlern behafteten Werthe $o_1, o_2, o_3 \ldots$ hervorgegangen sind, bedingte Beobachtungen. Es versteht sich von selbst, dass, wenn die Anzahl der beobachteten Grössen k und die der Bedingungen b ist, die Zahl b kleiner sein muss als k.

Da nun die beobachteten Werthe $o_1, o_2, o_3 \ldots$ von den zu berechnenden $u_1, u_2, u_3 \ldots$ um die unvermeidlichen Fehler abweichen, so werden, wenn man statt der u die o in obige Gleichungen setzt, die rechten Seiten dieser Gleichungen nicht null werden, sondern gewisse Werthe $w_1, w_2, w_3 \ldots$ annehmen, so dass

$$F_1(o_1\, o_2\, o_3 \ldots) = w_1,\; F_2(o_1\, o_2\, o_3 \ldots) = w_2,\; F_3(o_1\, o_2\, o_3 \ldots) = w_3 \text{ u. s. w.} \qquad (35)$$

wird. Diese w können wir berechnen; thun wir dieses und setzen dann an die Stelle von $u_1, u_2, u_3 \ldots$ solche Werthe $o_1 + v_1,\; o_2 + v_2,\; o_3 + v_3 \ldots$ dass den Bedingungen (34) genügt wird, während gleichzeitig $[v\,v]$ seinen kleinsten Werth erhält, so ist unsere gegenwärtige Aufgabe gelöst.

§. 21. **Berechnung der Verbesserungen.** Bezeichnen wir die Functionen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ beziehlich mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$, differentiiren dieselben successive nach $u_1, u_2, u_3 \ldots$ und heissen die partiellen Differential-Quotienten von φ_1 noch $u_1, u_2, u_3 \ldots\; a_1, a_2, a_3 \ldots$, von φ_2 nach $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots\; b_1, b_2, b_3 \ldots$ und von φ_3 nach $u_1, u_2, u_3 \ldots\; c_1, c_2, c_3 \ldots$, so erhalten wir diejenigen unendlich kleinen Grössen, um welche sich die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ ändern, wenn die Veränderlichen $u_1, u_2, u_3 \ldots$ um $du_1, du_2, du_3 \ldots$ sich ändern. Es wird somit

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= a_1\, du_1 + a_2\, du_2 + a_3\, du_3 + \ldots \\ d\varphi_2 &= b_1\, du_1 + b_2\, du_2 + b_3\, du_3 + \ldots \\ d\varphi_3 &= c_1\, du_1 + c_2\, du_2 + c_3\, du_3 + \ldots \end{aligned} \qquad (36)$$

Da wir nun die $u_1, u_2, u_3 \ldots$ nicht kennen, folglich die Coefficienten $a_1, a_2, a_3 \ldots b_1, b_2, b_3 \ldots c_1, c_2, c_3 \ldots$ nicht zu berechnen vermögen, so bleibt uns nichts übrig als die Werthe $o_1, o_2, o_3 \ldots$ für $u_1, u_2, u_3 \ldots$, die $w_1, w_2, w_3 \ldots$ in dem vorhergehenden Gleichungssystem für die $d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3 \ldots$ im System (36) und $-v_1, -v_2, -v_3 \ldots$ für $du_1, du_2, du_3 \ldots$ zu setzen, um zu den b Bedingungsgleichungen zu gelangen:

$$\begin{aligned} o &= w_1 + a_1\, v_1 + a_2\, v_2 + a_3\, v_3 + \ldots \\ o &= w_2 + b_1\, v_1 + b_2\, v_2 + b_3\, v_3 + \ldots \\ o &= w_3 + c_1\, v_1 + c_2\, v_2 + c_3\, v_3 + \ldots \text{ u. s. w.} \end{aligned} \qquad (37)$$

wovon jede nach Beschaffenheit der Sache n Glieder haben soll, und worin ein Coefficient a, b, c ... der Null gleich zu setzen ist, wenn das zugehörige v fehlt.

Ausser diesen Bedingungsgleichungen muss auch noch der Forderung

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots = \text{minimum}$$

genügt werden, es muss also, da $[v\,v]$ ein durch die Gleichungen (37) bedingtes Minimum werden soll,

$$o = v_1\, dv_1 + v_2\, dv_2 + v_3\, dv_3 + \ldots \qquad (37,^a)$$

und zugleich auch (nach dem Gleichungssystem (37)

$$o = a_1\, dv_1 + a_2\, dv_2 + a_3\, dv_3 + \ldots .$$
$$o = b_1\, dv_1 + b_2\, dv_2 + b_3\, dv_3 + \ldots .$$
$$o = c_1\, dv_1 + c_2\, dv_2 + c_3\, dv_3 + \ldots . \text{ u. s. w.} \qquad (38)$$

sein. Um die dv_1, dv_2, $dv_3 \ldots$ zu eliminiren, multiplicirt man die letzteren Gleichungen beziehlich mit b unbestimmten Coefficienten $k_1, k_2, k_3 \ldots$, Correlaten der Bedingungsgleichungen genannt, und addirt sie, so dass eine mit (37, a) übereinstimmende Gleichung entsteht, nämlich

$$o = (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots) dv_1 + (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots) d v_2 + (a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots) dv_3 \ldots \qquad (39)$$

in der die Coefficienten der dv dieselben sein müssen wie in (𝔥), da diese dv ganz unbestimmt bleiben sollen. Es ist demnach

$$v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots .$$
$$v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots .$$
$$v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots . \text{ u. s. w.} \qquad (40)$$

Diese Gleichungen heissen Correlatengleichungen.

Setzt man diese Werthe von v in die Bedingungsgleichungen (37) ein, so ergeben sich b Normalgleichungen, jede mit b Gliedern, aus welchen die bisher unbestimmten Correlaten gefunden werden können, nämlich:

$$[aa]\, k_1 + [ab]\, k_2 + [ac]\, k_3 + \ldots . + w_1 = o$$
$$[ba]\, k_1 + [bb]\, k_2 + [bc]\, k_3 + \ldots . + w_2 = o$$
$$[ca]\, k_1 + [cb]\, k_2 + [cc]\, k_3 + \ldots . + w_3 = o \text{ u. s. w.} \qquad (41)$$

Hat man hieraus die k_1, k_2, $k_3 \ldots$ nach §. 26 gefunden und in die Correlatengleichungen eingesetzt, so sind die v und hiemit die $o + v$ oder die ausgeglichenen Beobachtungswerthe u leicht zu berechnen, und die vorgelegene Aufgabe ist gelöst.

Fassen wir die Entwickelungen dieses Paragraphen zusammen, so sind es folgende Arbeiten, welche bei Ausgleichung bedingter Beobachtungen zu verrichten sind:

a) Aufsuchen der Bedingungen, d. i. der Gleichungen (34);
b) Herstellung der Differentialausdrücke für die Bedingungen (36);
c) Berechnung der Widersprüche w nach den Gleichungen (35);
d) Numerischer Ansatz der Bedingungsgleichungen (37);
e) Aufstellung der Correlatengleichungen (40);
f) Herstellung und Auflösung der Normalgleichungen (41); endlich
g) Berechnung der Verbesserungen durch Substitution in die Correlatengleichungen.

Anbelangend den mittleren Fehler m der einzelnen Beobachtungen, welcher hier für alle gleich gross ist, so ergibt sich derselbe aus dem Ausdrucke für den mittleren Fehler gleich genauer vermittelnder Beobachtungen Nr. 30, wenn man nur in dem dortigen Nenner $k = n - b$ setzt, wodurch dieser in $n - (n - b) = b$ übergeht; es ist somit hier

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{b}} . \qquad (42)$$

§. 22. **Beispiel.** In einem ebenen Dreiecke seien die drei Winkel gemessen und zwar

$$
\begin{aligned}
A &= o_1 = 62^0\ 37'\ 24'' \\
B &= o_2 = 48^0\ 47'\ 46'' \\
C &= o_3 = 68^0\ 34'\ 35'' \\
[o] &= 179^0\ 59'\ 45''.
\end{aligned}
$$

Hier entspricht dem Geschäfte (a) die Gleichung $\varphi = A + B + C - 180^0$, $u_1 + u_2 + u_3 - 180^0 = o$, dem Geschäfte (b) die Gleichung $d\varphi = du_1 + du_2 + du_3$, dem Geschäfte (c) die Berechnung von $w = 180^0 - (o_1 + o_2 + o_3) = 15''$, dem Geschäfte (d) die Aufstellung der Bedingungsgleichung $15'' = v_1 + v_2 + v_3$, dem Geschäfte (e) die Aufstellung der Correlatengleichungen $v_1 = k_1$, $v_2 = k_1$, $v_3 = k_1$, dem Geschäfte (f) die Aufstellung der Normalgleichung $3\ k_1 = 15''$ und die Bestimmung von $k_1 = 5''$, endlich dem Geschäfte (g) die Berechnung der Verbesserungen $v_1 = v_2 = v_3 = 5''$ und des mittleren Fehlers der einzelnen Beobachtung $m = \sqrt{125} = \pm 11'',18$.

B. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

§. 23. **Verbesserungen und mittlerer Fehler.** Wir haben es jetzt mit Beobachtungen $o_1, o_2, o_3 \ldots$ zu thun, denen die Gewichte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ zukommen. Dieser Umstand bringt selbstverständlich in den Gleichungen (34), (35), (36) keine Veränderung hervor, und es sind demnach auch die Bedingungsgleichungen (37) genau so wie in dem ersten Falle (Seite 24) anzusetzen: die vier ersten Geschäfte der Ausgleichung bedingter Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit fallen also mit jenem gleicher Genauigkeit zusammen. Die erste Abweichung von diesen Geschäften ergibt sich, indem wir nicht $[vv]$ sondern $[pvv]$ zu einem Minimum zu machen haben, wesshalb die frühere Gleichung $(37, _a)$ übergeht in

$$o = p_1\, v_1\, d\, v_1 + p_2\, v_2\, d\, v_2 + p_3\, v_3\, d\, v_3 + \ldots.. \qquad (43)$$

Da an den Bedingungsgleichungen $\mathfrak{G}$ nichts geändert wird, so bleiben auch deren Differentiale (38) dieselben wie früher (Seite 25), und man kommt desshalb durch analoge Schlussfolge zu den Correlatengleichungen:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1\, k_1}{p_1} + \frac{b_1\, k_2}{p_1} + \frac{c_1\, k_3}{p_1} + \ldots \\
v_2 &= \frac{a_2\, k_1}{p_2} + \frac{b_2\, k_2}{p_2} + \frac{c_2\, k_3}{p_2} + \ldots \\
v_3 &= \frac{a_3\, k_1}{p_3} + \frac{b_3\, k_2}{p_3} + \frac{c_3\, k_3}{p_3} + \ldots \text{ u. s. w.} \qquad (44)
\end{aligned}
$$

Setzt man die Werthe von $v_1, v_2, v_3 \ldots$ in die Bedingungsgleichungen (37), so erhält man sofort die Normalgleichungen:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] k_3 + \ldots + w_1 = o$$

$$\left[\frac{ba}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_3 + \ldots . + w_2 = o$$

$$\left[\frac{ca}{p}\right] k_1 + \left[\frac{cb}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] k_3 + \ldots . + w_3 = o \text{ u.s.w.} \quad (45)$$

aus denen man durch Elimination nach §. 26 die Correlaten $k_1, k_2, k_3 \ldots$ und durch Substitution die Verbesserungen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ und damit die ausgeglichenen Beobachtungen $o_1 + v_1, o_2 + v_2, o_3 + v_3, \ldots$ findet. Es ändert sich also auch an den übrigen drei in §. 21 aufgezählten Ausgleichungsgeschäften nichts, als dass man in den Correlaten- und Normalgleichungen die Coefficienten der Correlaten mit den Gewichten p zu multipliciren hát.

In Bezug auf die mittleren Fehler gilt auch hier, dass, wenn m der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist,

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \; m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \; m_3 = \frac{m}{\sqrt{p_3}} \text{ u. s. w.} \quad (46)$$

wird, während der Fehler der Gewichtseinheit selbst

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{b}} \quad (47)$$

ist, übereinstimmend bis auf den Factor p mit dem Ausdrucke Nr. 42.

§. 24. **Beispiel.** Berechnen wir jetzt die Verbesserungen der in §. aufgeführten Beobachtungen o_1, o_2, n_3 unter der Annahme, dass $p_1 = 16$, $p_2 = 25$, $p_3 = 36$, so ist die Bedingungsgleichung wieder:

$$15'' = v_1 + v_2 + v_3.$$

Die Correlatengleichungen sind:

$$v_1 = \frac{1}{16} k_1 \quad v_2 = \frac{1}{25} k_1 \quad v_3 = \frac{1}{36} k_1$$

und die Normalgleichung ist:

$$15'' = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right) k_1 = \frac{13}{100} k_1.$$

Hieraus folgt $k_1 = \frac{1500''}{13}$ und damit werden die Verbesserungen:

$$v_1 = \frac{1500}{13 . 16} = + 7,''2$$

$$v_2 = \frac{1500}{13 . 25} = + 4,''6$$

$$v_3 = \frac{1500}{13 . 36} = + 3,''2.$$

Letztere verhalten sich also umgekehrt wie die Gewichte.

Aus den Verbesserungen ergibt sich

$$[p\,v\,v] = 16 . 51{,}84 + 25 . 21{,}16 + 36 . 10{,}24 = 1727$$

und da hier $b = 1$ ist, $m = \sqrt{1727} = \pm 41,''5$, folglich ist auch

$$m_1 = \pm 10,''37; \; m_2 = \pm 8,''30; \; m_3 = \pm 6,''92.$$

§. 25. **Gewichte von Winkelmessungen.** Ueber die Ableitung der

Werthe von p_1, p_2, p_3 aus den Winkelmessungen sind die Ansichten noch getheilt: viele Geodäten setzen die Gewichte von Winkelmessungen c. p. den Repetitionszahlen direct proportional (also müssten die Winkel A, B, C des hier vorliegenden Dreiecks beziehlich 16, 25, 36mal repetirt worden sein), während andere und vielleicht die meisten Beobachter diese Gewichte c. p. den Quadraten der Repetitionszahlen proportional annehmen (also wären hier die Winkel A, B, C nur 4, 5, 6mal zu repetiren gewesen, um die Gewichte 16, 25, 36 zu erhalten). In Wirklichkeit ist keine dieser extremen Annahmen unbedingt richtig oder falsch, die Wahrheit liegt vielmehr innerhalb der durch sie bezeichneten Grenzen. Denn nimmt man die Einstellungsfehler auf die Signale in den Winkelschenkeln gleich Null an, so zeigt sich, dass die Gewichte nahezu den Quadraten der Repetitionszahlen proportional anzunehmen sind; darf aber der Fehler des Ablesens mit Einschluss der Theilungsfehler als Null angesehen werden, so stellen die Repetitionszahlen selbst annähernd die Gewichte der Winkelbeobachtungen vor. Bedenkt man nun, dass diese letztere Voraussetzung bei grossen für Haupttriangulationen zu gebrauchenden Theodolithen, und die ersteren bei kleinen für untergeordnete Winkelmessungen bestimmten Theodolithen nahehin zutrifft, so kann man sagen: bei grossen Instrumenten und Repetitionszahlen kann man die Gewichte diesen Zahlen selbst, bei kleinen Instrumenten und Repetitionszahlen den Quadraten der Repetitionszahlen proportional setzen, in allen übrigen Fällen hat man nach den obwaltenden Umständen zu entscheiden, ob sich dieselben mehr dem einen oder dem anderen Extrem nähern, und hienach seine Wahl der Gewichte der Beobachtungen zu treffen, wenn man nicht vorzieht, eine Formel zu construiren, welche den Einstellungs-, Ablesungs- und Theilungs-Fehlern zugleich Rechnung trägt. (Vergl. Helmert, Ausgleichungsrechnungen, S. 312 bis 323).

§. 26. **Auflösung von Normalgleichungen.** Diese Gleichungen lassen sich nach den in II und III behandelten Aufgaben stets auf die Form bringen:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,u + [an] = o \\ &[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,u + [bn] = o \\ &[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,u + [cn] = o \\ &[ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,u + [dn] = o \end{aligned} \qquad (48)$$

welche zeigt, dass ausser den absoluten Gliedern [an], [bn] ... und den quadratischen Coefficienten [aa], [bb] ... alle übrigen Coefficienten doppelt vorkommen, was bei anderen Gleichungen nicht der Fall ist. Auf dieser Eigenthümlichkeit der Normalgleichungen beruht das folgende von Gauss angegebene abgekürzte Eliminationsverfahren.

Multiplicirt man nämlich die erste Gleichung des vorstehenden Systems zuerst mit $\frac{[ab]}{[aa]}$, dann mit $\frac{[ac]}{[aa]}$ und endlich mit $\frac{[ad]}{[aa]}$, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$[ab]\,x + [ab]\,\frac{[ab]}{[aa]}\,y + [ac]\,\frac{[ab]}{[aa]}\,z + [ad]\,\frac{[ab]}{[aa]}\,u + [an]\,\frac{[ab]}{[aa]} = o$$

$$[ac]\,x + [ab]\frac{[ac]}{[aa]}\,y + [ac]\frac{[ac]}{[aa]}\,z + [ad]\frac{[ac]}{[aa]}\,u + [an]\frac{[ac]}{[aa]} = o$$

$$[ad]\,x + [ab]\frac{[ad]}{[aa]}\,y + [ac]\frac{[ad]}{[aa]}\,z + [ad]\frac{[ad]}{[aa]}\,u + [an]\frac{[ad]}{[aa]} = o$$

Zieht man diese Gleichungen nach einander von der zweiten, dritten und vierten des ersten Systems ab, so verschwinden die Glieder, welche x enthalten, und es entsteht das folgende zweite Gleichungssystem:

(II)
$$\begin{aligned}&[bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,u + [bn.1] = o\\&[bc.1]\,y + [cc.1]\,z + [cd.1]\,u + [cn.1] = o\\&[bd.1]\,y + [cd.1]\,z + [dd.1]\,u + [dn.1] = o\end{aligned} \qquad (49)$$

worin die Coefficienten der drei Unbekannten und die absoluten Glieder folgende Bedeutungen haben; es ist nämlich

$$[bb.1] = [bb] - [ab].\frac{[ab]}{[aa]},\quad [bc.1] = [bc] - [ac].\frac{[ab]}{[aa]}$$

$$[bd.1] = [bd] - [ad].\frac{[ab]}{[aa]},\quad [bn.1] = [bn] - [an].\frac{[ab]}{[aa]}. \qquad (50)$$

Ueber das Bildungsgesetz dieser Hilfsgrössen ist zu bemerken, dass dem betreffenden Product bb, bc, bn die Zahl 1 beigefügt wird, wenn der Nenner des Subtrahenten aa ist; dass ferner die Werthe für [bb . 1], [bc . 1].... null werden, wenn man deren symbolische Zeichen algebraisch auffasst (z. B. $[bb.1] = bb - bb = o$, $[bn.1] = bn - bn = o$), und dass endlich der erste Factor des Subtrahenten = [ab], [ac], [ad] ... ist, wenn der Minuend beziehlich [bb], [bc], [bd] ... heisst. Wird nunmehr die erste Gleichung des zweiten Systems zuerst mit $\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$, dann mit $\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$ multiplicirt, und hierauf die erste der so entstandenen Gleichungen von der zweiten des Systems II, und die zweite neue von der dritten des Systems II abgezogen, so entsteht folgendes dritte Gleichungssystem:

(III)
$$\begin{aligned}&[cc.2]\,z + [cd.2]\,u + [cn.2] = o\\&[cd.2]\,z + [dd.2]\,u + [dn.2] = o\end{aligned} \qquad (51)$$

in welchem die Hilfsgrössen Folgendes bedeuten:

$$[cc.2] = [cc.1] - [bc.1].\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$$

$$[cd.2] = [cd.1] - [bd.1].\frac{[bc.1]}{[bb.1]}. \qquad (52)$$

Auch hier wird jeder Coefficient [cc . 2], [cd . 2] .... null, wenn man seine symbolischen Zeichen algebraisch auffasst; es ist ferner den Producten cc, cd ... die Zahl 2 beizufügen, wenn der Nenner des Subtrahenten [bb . 1] ist, und es folgen schliesslich den Producten cc, cd ... des Minuenden die Producte bc, bd ... des ersten Factors im Subtrahenten.

Wird endlich die erste Gleichung des Systems III mit $\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$ multiplicirt und von der zweiten abgezogen, so entsteht

(IV)
$$[dd.3]\,u + [dn.3] = o \qquad (53)$$

wobei der Coefficient von u und das absolute Glied folgende Werthe haben:

$$[dd.3] = [dd.2] - [cd.2] \cdot \frac{[cd.2]}{[cc.2]}$$

$$[dn.3] = [dn.2] - [cn.2] \cdot \frac{[cd.2]}{[cc.2]}. \qquad (54)$$

Aus den Gleichungen IV, III, II, I erhält man durch successive Division mit [dd.3], [cc.2], [bb.1], [aa] die gesuchten Grössen u, z, y, x wie folgt:

$$\text{(V)} \qquad u + \frac{[dn.3]}{[dd.3]} = o$$

$$z + \frac{[cd.2]}{[dd.2]} u + \frac{[cn.2]}{[dd.2]} = o$$

$$y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]} z + \frac{[bd.1]}{[bb.1]} u + \frac{[bn.1]}{[bb.1]} = o$$

$$x + \frac{[ab]}{[aa]} \cdot y + \frac{[ac]}{[aa]} \cdot z + \frac{[ad]}{[aa]} \cdot u + \frac{[an]}{[aa]} = o \qquad (55)$$

Ein von Bessel in den Astr. Nachrichten, Bd. 17, S. 305 mitgetheiltes und auch in Helmerts Ausgleichungsrechnungen S. 133 enthaltenes indirectes Verfahren von Jacobi, die Unbekannten aus Normalgleichungen zu finden, ist insofern merkwürdig, als sich diese Unbekannten und die Gewichte ihrer Bestimmung auf ganz symmetrische Weise ergeben, gewährt aber im Vergleich mit der oben dargestellten Auflösungsmethode von Gauss keine Zeitersparniss, wesshalb wir dessen Mittheilung hier unterlassen.

Zweiter Abschnitt.

Die Horizontalmessungen.

A. Messung der Linien.

§. 27. Mit dem Ausdrucke „Messung der Linien" bezeichnen wir alle Verrichtungen, durch welche gerade und krumme Linien auf dem Felde abgesteckt und aufgenommen werden. Diese Verrichtungen bestehen in mittel- oder unmittelbaren Messungen und den damit verbundenen Rechnungen oder geometrischen Constructionen, und sind theils nach der Form der Linien, theils nach ihrer Ausdehnung, theils nach den Hindernissen, welche die Beschaffenheit des Bodens mit sich bringt, theils nach den Hilfsmitteln, welche zur Messung verwendet werden können, theils nach der Einsicht und Geschicklichkeit des Geometers verschieden von einander. Ihre Theorie wird desshalb am zweckmässigsten in der Form von Aufgaben, welche für

gegebene Voraussetzungen bestimmte Forderungen stellen, abgehandelt. Wenn man diese Aufgaben mit Rücksicht auf die im Leben und in der Natur bestehenden Verhältnisse zweckmässig wählt und ihre Lösungen vervielfältigt und so einrichtet, dass daraus hervorgeht, wie in einzelnen Fällen mit den dargebotenen Hilfsmitteln der beabsichtigte Zweck auf eine einfache und zuverlässige Art erreicht werden kann: so lassen sich in einer verhältnissmässig geringen Zahl von Aufgaben so viele Verfahrungsweisen, Regeln und Winke geben, dass sich jeder denkende Geometer in allen möglichen Fällen leicht selbst zu helfen weiss.

1. Das Abstecken gerader Linien.

§. 28. Das Abstecken einer geraden Linie besteht in der Aufstellung einer entsprechenden Anzahl von Fluchtstäben oder Signalen, deren lothrechte Axen in einer Verticalebene liegen, und es wurde bei Beschreibung der Fluchtstäbe gezeigt, wie man in den einfachsten Fällen eine gerade Linie mit Stäben absteckt. Wir setzen daher hier als bekannt voraus, dass man zwischen zwei gegebenen Punkten von geringer Entfernung einen dritten Punkt angeben könne, der mit jenen in einer Geraden liegt, und dass man eine durch zwei Punkte bestimmte Gerade nach beiden Seiten hin zu verlängern wisse, wenn das Terrain keine Schwierigkeiten in den Weg legt. Das früher beschriebene Verfahren zur Absteckung gerader Linien lässt sich aber nicht mehr anwenden, wenn die gegebenen zwei Punkte, welche die abzusteckende Linie bestimmen, so liegen, dass man von einem zum andern nicht mehr sehen kann, und es ist nun zu zeigen, wie man diese Schwierigkeit überwindet.

§. 29. Aufgabe. *Zwischen zwei gegebenen Punkten von mässiger Entfernung, welche so liegen, dass sich von dem einen zum andern keine Absehlinie herstellen lässt, soll ein dritter Punkt in gerader Linie abgesteckt werden.*

Der Grund warum man von einem gegebenen Punkte A nach einem anderen B oder von diesem nach jenem keine Absehlinie herstellen kann, liegt entweder darin, dass sich zwischen den beiden Punkten ein Bergvorsprung oder ein Hügel befindet, oder darin, dass man sich hinter A und B nicht aufstellen kann, weil diese Punkte durch lothrechte Mauerkanten, durch Thurmspitzen oder andere ähnliche natürliche Signale bezeichnet sind. Welches dieser Hindernisse stattfindet, ist für die Lösung der vorliegenden Aufgabe gleich. Das Verfahren ändert sich nur mit den dazu gestatteten Hilfsmitteln, welche entweder bloss Absteckstäbe, oder ein Prismenkreuz mit Absteckstäben, oder endlich ein Spiegelkreis und Stäbe sind.

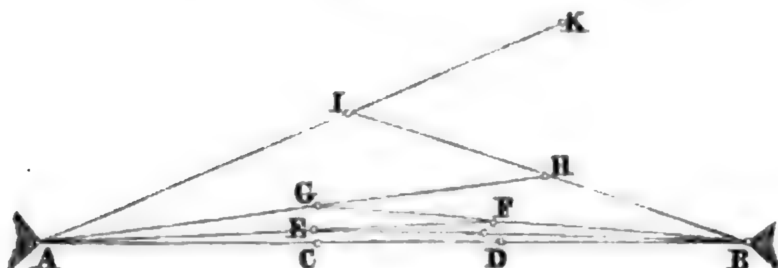
1) Lösung der Aufgabe ohne andere Hilfsmittel als Absteckstäbe.

In diesem Falle erfordert die Lösung der vorliegenden Aufgabe mindestens *einen* Gehilfen. Mit diesem steckt man mehrere theils durch A theils durch B gehende gerade Hilfslinien ab, bis man endlich zwei solche

erhält, welche ein Stück gemeinschaftlich haben. Ist dieses der Fall, so liegen die beiden Punkte, welche den gemeinsamen Theil der beiden Hilfsgeraden bezeichnen, in der geraden Linie AB.

Zu diesem Behufe stelle man sich (nach Fig. 1) in einem beliebigen Punkte K auf, von dem aus man A erblickt und richte durch blosses Absehen den Gehilfen I in die Gerade AK ein. Hiebei muss der Gehilfe den Punkt I so wählen, dass man von ihm aus nach B sehen kann. Es wird nun von I aus der Stab H in die Linie BI, von H aus der Stab G in die Linie AH, von G aus der Stab F in die Linie BG, von F aus E in AF u. s. f. eingerichtet, bis man endlich zwei Punkte C und D erhält, welche sowohl in der Geraden AD als in der Geraden BC liegen. Da diese zwei Linien das gerade Stück CD gemein haben, so liegen sie selbst und mit ihnen C und D in einer einzigen geraden Richtung, und zwar in der, welche durch A und B geht.

Fig. 1.

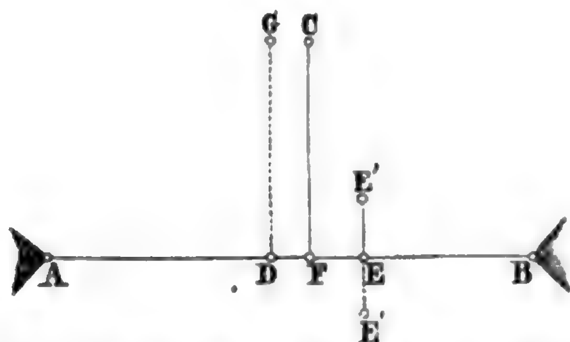


Man begreift leicht, dass diese Lösung jederzeit umständlich, in vielen Fällen unsicher und manchmal sogar unausführbar ist. Sie wird unsicher, wenn der Raum zwischen den Linien CEGI und DFHK im Verhältniss zur Länge AB nur schmal ist, und wird unausführbar, wenn der bezeichnete Raum in einen nach A und B hin rasch abfallenden Bergrücken übergeht. Diese Schwierigkeiten verschwinden, wenn man mit dem Prismenkreuze arbeitet.

2) Lösung der Aufgabe mit Anwendung des Prismenkreuzes.

Diese Lösung besteht nach der früher gegebenen Anleitung zum Gebrauche des Prismenkreuzes darin, dass man, um nach Fig. 2 den Punkt E zwischen A und B einzuschalten, von einem beliebigen Punkte E' ausgehend und die beiden Objectivebenen des Instruments gegen A und B, die Ocularebenen aber gegen das Auge wendend, so lange fortschreitet, bis man an eine Stelle gelangt, in welcher sich die Bilder von A und B in den beiden Prismen decken. Diese Stelle bezeichnet den gesuchten Punkt E. (In gleicher Weise verfährt man bei Anwendung des in §. 113, Fig. 132, Bd. I. beschriebenen und abgebildeten fünfseitigen Winkelprismas).

Fig. 2



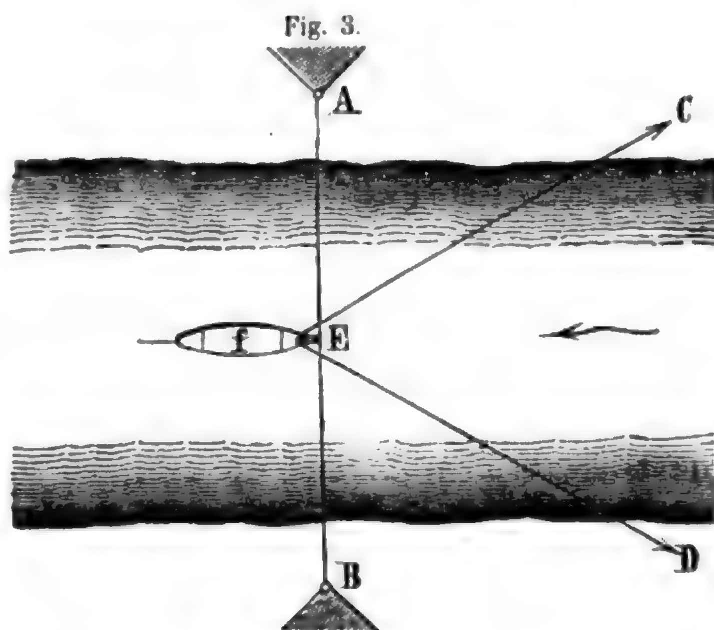
Will man sich von der richtigen Lage dieses Punkts überzeugen, so braucht man das eben beschriebene und für eine Seite von AB ausgeführte Verfahren nur von der anderen Seite von AB her zu wiederholen und

zuzusehen, ob das Instrument auch in dieser entgegengesetzten Lage den Punkt E angibt oder nicht. Erhält man denselben zum zweiten Male, so ist diess ein Beweis nicht bloss für die richtige Operation, sondern auch für die gehörige Berichtigung des Prismenkreuzes; ergibt sich aber durch die zweite Messung ein anderer Punkt, so deutet dieser lediglich auf eine unvollständige Berichtigung des Instruments hin, welche desshalb zu ergänzen ist. Jedenfalls liegt dann der gesuchte Punkt E in der Mitte zwischen den zwei Punkten, welche die beiden Absteckungen ergeben haben.

Gewährt das Terrain hinreichenden Raum, so kann man zur Prüfung der Lage des Punkts E einen Stab D in die Linie EB einstecken und von E aus untersuchen, ob dieser Stab auch in der Linie EA steht: ist dieses wirklich der Fall, so muss nothwendig auch E ein Punkt der Geraden AB sein, weil das gerade Stück DE den beiden durch A und B gehenden Geraden AE und BD gemein ist.

Da man zur Ausführung der Absteckung des Punkts E nur so viel Raum bedarf als nöthig ist, um in einer Querrichtung zu AB darauf vor- oder rückwärts zu gehen, so ist klar, dass die Einschränkung dieses Raums auf einen schmalen Streifen kein Hinderniss ist, wenn man mit dem Prismenkreuze arbeitet, während dieselbe die in Nr. 1 beschriebene Absteckung unmöglich macht. Ebenso ist klar, dass auf einem Strome die Aufsuchung eines Punkts E in der geraden Linie AB mit Hilfe eines Fahrzeugs f, welches von sich oder von den Ufern aus bewegt und geleitet wird, leicht ausgeführt werden kann, was nicht der Fall wäre, wenn man die Absteckung bloss mit Stäben bewirken wollte.

Fig. 3.

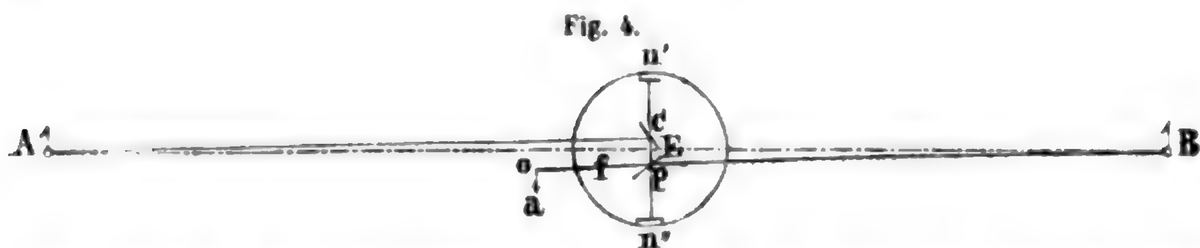


3) Lösung der Aufgabe mit Hilfe des Spiegelkreises.

Da der Spiegelkreis von Pistor und Martins zur Messung von Winkeln geeignet ist, welche genau 180⁰ betragen, so muss derselbe auch zur Aussteckung solcher Winkel, d. h. zur Einschaltung eines Punkts E in die gerade Linie zweier anderen Punkte A und B dienen. Für diese Absteckung ist das Instrument dadurch erst vorzubereiten, dass man dem Oculare des Fernrohrs das Reflexionsprisma vorschraubt und den in der betreffenden Abbildung mit N' bezeichneten Nonius auf den Theilstrich 180⁰ des Limbus genau einstellt.

Nach dieser Vorbereitung fasst man den Spiegelkreis an seinem Griffe, hält ihn wagrecht vor den Kopf und richtet das Fernrohr f, wie Fig. 4

Fig. 4.



zeigt, mit dem bei a befindlichen Auge nach dem Punkte B, wodurch der drehbare Spiegel c von dem Punkte A Licht erhält, das in Folge der bekannten Einrichtung des Instruments den Weg Acpoa macht, bis es ins Auge gelangt. Geht man nun mit dem also gehaltenen Spiegelkreise gegen die Linie AB so lange vor- oder rückwärts, bis sich die bei a gesehenen Bilder von A und B decken, so bezeichnet die Axe des Instruments den gesuchten und in AB liegenden Punkt E. Von der richtigen Lage dieses Punkts kann man sich wie vorhin bei Nr. 2 überzeugen.

Das Verfahren zur Absteckung des Punkts E ist hier im Grunde dasselbe wie bei dem Prismenkreuze, aber es verursacht im Vergleiche mit jenem viel mehr Mühe, nicht nur weil die beiden Bilder von A und B, welche der Spiegelkreis liefert, dunkler sind als jene des Prismenkreuzes, sondern auch weil das Gesichtsfeld jenes Kreises ungleich kleiner ist als das an unserm Instrumentchen, und weil endlich der Spiegelkreis eine viel ruhigere Haltung des Beobachters erfordert als dieses.

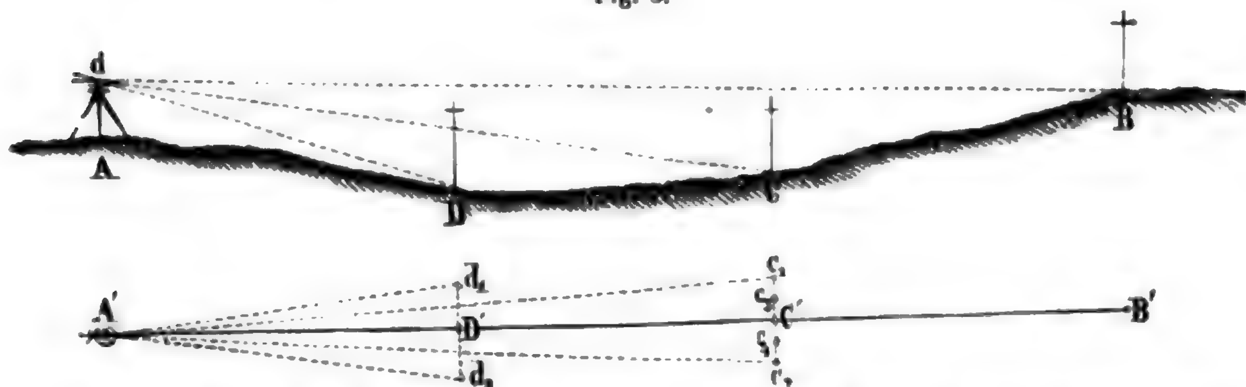
§. 29. Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von grosser Entfernung, welche so liegen, dass sie von einem ihrer Verbindungslinie angehörigen Standpunkte aus mit Fernrohren gesehen werden können, sollen zwei oder mehrere Punkte in gerader Linie abgesteckt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert ein Instrument, das mit einem Messfernrohre versehen ist und so aufgestellt werden kann, dass sich die Absehlinie beim Auf- und Niederkippen des Rohrs in einer Verticalebene bewegt: also einen Theodolithen oder ein theodolithenartig eingerichtetes Nivellirinstrument, wie dergleichen im ersten Theile mehrere abgebildet und beschrieben sind. Ferner fordert die Lösung dieser Aufgabe Gehilfen, welche Signalstangen lothrecht aufzustellen wissen und die Zeichen verstehen, welche ihnen der Geometer gibt. Ist dieser von seinen Gehilfen zu weit entfernt, so dass sie dessen Zeichen mit blossen Augen nicht erkennen können, so muss einer derselben mit einem Handfernrohre (einem sogenannten Feldstecher) versehen werden, damit er die Winke, welche der Geometer mit einer Messfahne gibt, deutlich erkennen und den übrigen zur Danachachtung mittheilen kann. Da das Abstecken langer gerader Linien in neuerer Zeit häufig vorkommt und für die Ausführung grosser Erdwerke von bedeutender Wichtigkeit ist, so wollen wir die vorliegende Aufgabe für mehrere bestimmte Fälle lösen.

1) Die gegebenen Punkte A und B liegen so, dass man auf einem von ihnen (A) den Theodolithen aufstellen und nach dem anderen (B) ungehin-

dert visiren kann. In diesem Falle stelle man das Instrument centrisch über A und so auf, dass die Alhidadenaxe lothrecht ist und folglich die Drehaxe des Fernrohrs sich stets in einer Horizontalebene bewegt. Durch diese Aufstellung wird bewirkt, dass in jeder Lage des Fernrohrs dessen Absehlinie in einer Verticalebene liegt, welche durch den Punkt A geht. Stellt man nun das Fernrohr genau auf B ein und schliesst die Bewegung der Alhidade ab, so kann sich die Absehlinie nur mehr in der abzusteckenden Verticalebene bewegen. In Fig. 5 soll die Linie ADCB den Schnitt dieser Ebene mit dem Terrain und die Gerade A'D'C'B' die gesuchte Horizontalspur derselben Ebene vorstellen.

Fig. 5.



Will man nun den Punkt C' finden, so lasse man die Gehilfen an einer Stelle, welche nach vorläufiger Schätzung diesem Punkte entspricht, eine Signalstange aufstellen und sehe zu, ob dieselbe in der Verticalebene A'B' steht oder nicht. Wird nämlich bei hinreichend gesenktem Fernrohre die Mitte des unteren Stangenendes von dem Fadenkreuze gedeckt, so befindet sich die Stange an der rechten Stelle und braucht dieselbe dann nur noch genau lothrecht gestellt zu werden; erscheint aber das Fadenkreuz rechts oder links von der Stange, so liegt, da das Fernrohr ein astronomisches ist, der gewählte Punkt beziehungsweise links oder rechts von der Geraden A'B' und muss desshalb die Stange auf ein gegebenes Zeichen des Geometers in dem ersten Falle nach der rechten, in dem zweiten aber nach der linken Seite hin versetzt und ihre Stellung abermals geprüft werden. Dieses Versetzen und Prüfen nimmt man so lange vor, bis die rechte Stelle gefunden ist, d. h. bis das Fadenkreuz die Stange von oben bis unten nach der Mittellinie deckt. Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass die Versetzung der Signalstange, bis die richtige Stelle gefunden ist, nach einem gewissen Systeme geschehen muss, wenn man möglichst bald zum Ziele gelangen will. Dieses System besteht darin, dass jeder neue Standpunkt in der Mitte der beiden nächst vorhergegangenen Standpunkte zu nehmen ist. War c_1 der erste und c_2 der zweite Standpunkt des Signals, so ist für den dritten c_3 der Abstand $c_3\,c_2 = c_3\,c_1$, für den vierten c_4 der Abstand $c_4\,c_3 = c_4\,c_2$ u. s. f. zu nehmen, bis man endlich den gesuchten Punkt C' erhält, welcher den Abstand $(c_4\,c_3)$ der beiden letzten Punkte halbirt. So wie der Punkt C', wird auch der Punkt D' abgesteckt, wobei

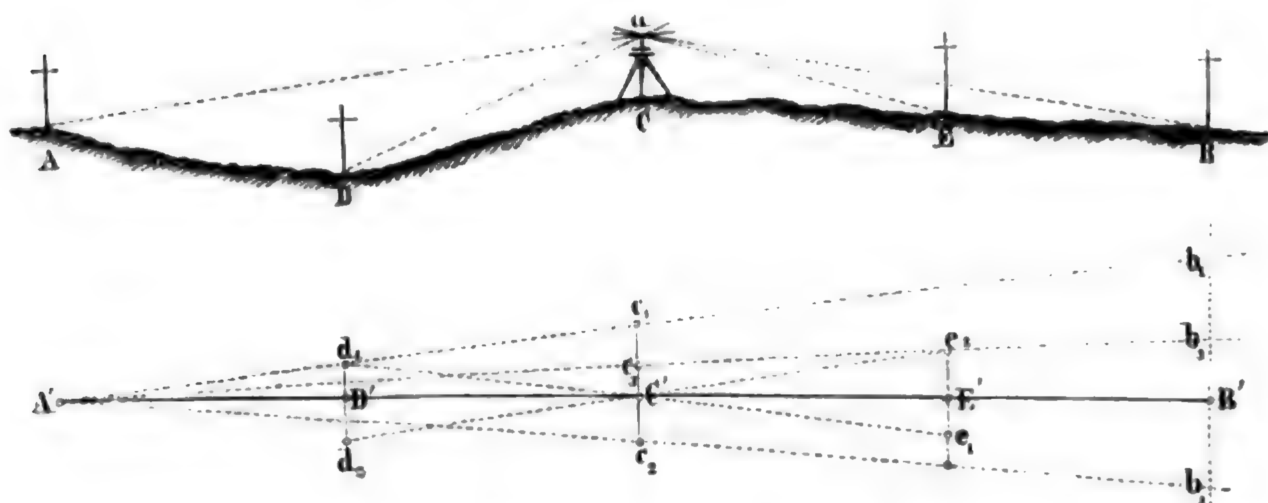
sich von selbst versteht, dass man in dem Falle, wo die nähere Signalstange die fernere decken könnte — und das ist bei ebenem Terrain stets der Fall — den entfernteren Punkt (C) früher als den näheren (D) abzustecken hat.

2) Die gegebenen Punkte A und B liegen so, dass man von einem zum anderen nicht sehen, wohl aber zwischen beiden eine Stelle finden kann, welche nach jedem von ihnen zu visiren gestattet. Diesem Falle entspricht auch der, in welchem auf keinem der gegebenen Punkte der Theodolith aufgestellt, aber von einem Zwischenpunkte aus nach beiden visirt werden kann.

Unter den gegebenen Verhältnissen kommt es vor Allem darauf an, auf dem Terrainbezirke, welcher zwischen A und B so liegt, dass man von ihm aus beide Punkte sehen kann, einen Punkt C so zu bestimmen, dass er in der Verticalebene A B liegt. Hat man diesen Punkt, so lassen sich in den Abtheilungen A C und B C der Geraden A B leicht noch andere Punkte durch das Verfahren zu Nr. 1 abstecken.

Ist zur Absteckung des Punkts C ein guter Theodolith gegeben, so stelle man ihn vorläufig in einem Punkte c_1 auf, den man nach dem Augenmasse für einen Punkt der Linie A′B′ hält. Steht der Kreis horizontal, so richte man das Fernrohr genau auf einen der gegebenen Punkte, etwa auf A′ und schlage hierauf, ohne an dem Stande des Instruments das

Fig. 6.



Geringste zu ändern, das Fernrohr durch. Zeigt sich hiebei, dass die Visirlinie links von B′ bei b_1 vorbeigeht, so muss der Standpunkt des Theodolithen in der Richtung c_1 c_2 nach rechts versetzt werden. Angenommen, man hätte jetzt den Punkt c_2 gewählt, so wiederholt man daselbst das Verfahren, das eben in c_1 ausgeführt wurde, und wenn nun die Visirlinie des durchgeschlagenen Fernrohrs rechts von B′ bei b_2 vorbeigeht, so stellt man den Theodolithen auf den Punkt c_3, welcher in der Mitte von c_1 c_2 liegt, und führt mit diesem Verfahren so lange fort, bis man endlich einen Punkt C′ erhält, welcher so liegt, dass von ihm aus das Fernrohr in seiner ersten und zweiten Lage genau auf A′ und B′ zeigt.

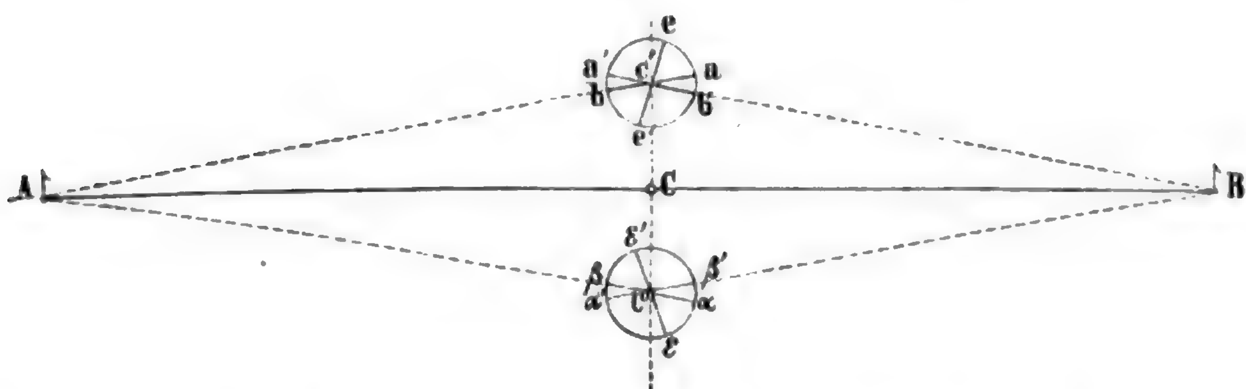
Dieses Verfahren setzt voraus, dass die Absehlinie des Fernrohrs zur

Drehaxe desselben ganz genau senkrecht stehe: man muss sich also von dieser Beschaffenheit des Fernrohrs erst überzeugt haben, wenn man sich sofort auf die eben gemachte Bestimmung des Punkts C verlassen und keine unbrauchbare Arbeit liefern will. Aber selbst dann, wenn Absehlinie und Drehaxe senkrecht gegen einander stehen, ist noch eine Prüfung der Absteckung des Punkts C rathsam. Dieselbe kann auf verschiedenen Wegen vorgenommen werden.

Ein Verfahren besteht darin, dass man das Fernrohr des noch unverändert stehenden Theodolithen wieder genau auf A einstellt, die beiden Nonien des Horizontalkreises abliest, die Alhidade genau um 180° dreht und zusieht, ob jetzt abermals das Fadenkreuz genau auf den Punkt B zeigt oder nicht. Wird B gedeckt, so kann man sicher sein, dass C richtig gefunden ist, weicht aber das Fadenkreuz von B ab, so ist eine der beiden Messungen unrichtig und es muss in diesem Falle eine zweite Untersuchung entscheiden, wo der Fehler liegt.

Diese Untersuchung, welche auch sogleich als zweites Verfahren zur Prüfung der ersten Absteckung angewendet werden kann, beruht auf folgender Betrachtung. Stellt in Fig. 7 der Punkt C′ den eben gefundenen

Fig. 7.



Punkt C vor, von dem vermuthet wird, dass er falsch sei, und bezeichnet derselbe zugleich die Alhidadenaxe des Theodolithen, e e′ aber die Drehaxe und a b die auf A gerichtete Absehlinie des Fernrohrs, so wird, wenn nach dem Durchschlagen des Rohrs die Absehlinie a′ b′ auf B geht, der Punkt C′ um eine gewisse leicht zu berechnende Grösse CC′ von der Linie A B abstehen und zwar auf der oberen Seite von AB, wenn die Visirlinie mit der Drehaxe gegen AB hin den spitzen Winkel A C′ e′ einschliesst. Würde aber die Alhidade mit dem Fernrohre, das jetzt die Lage a′ b′ hat, um 180° gedreht werden, so dass die Absehlinie nunmehr von b′ nach a′ hinginge und folglich der stumpfe Winkel A C′ e, den die Absehlinie mit der Drehaxe macht, gegen AB läge: so hätte sich durch das oben beschriebene Verfahren statt C′ ein Punkt C″ ergeben, welcher von AB ebenfalls um die Grösse CC′ abstände, aber auf der unteren Seite dieser Geraden sich befände. Der richtige Punkt C läge alsdann in der Mitte von C′ C″.

Auf Grund dieser Betrachtung wird man also, nachdem die erste Messung

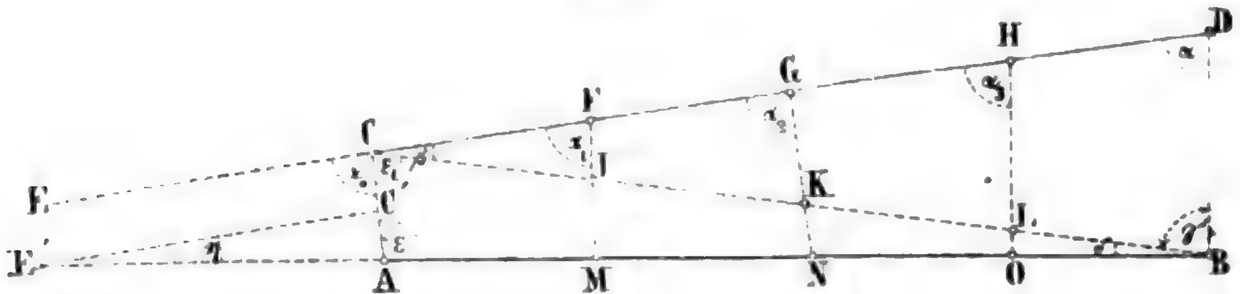
mit der Lage ee' der Drehaxe des Fernrohrs gemacht wurde, eine neue Bestimmung des Punkts C vornehmen, bei welcher diese Drehaxe die entgegengesetzte Lage $\varepsilon\varepsilon'$ hat. Zeigt sich hiebei, dass wieder der frühere Punkt C erhalten wird, so sind die erste und dritte Messung richtig; weicht aber der neue Punkt C'' von dem ersten C' ab, so liegt der gesuchte Punkt C in der Mitte von C' C'', womit auch die zweite Messung übereinstimmen wird, wenn man sie für diesen Punkt wiederholt. Hat man den Punkt C gefunden, so kann man von ihm aus die Punkte D und E nach Nr. 1 abstecken.

§. 30. **Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von sehr grosser Entfernung, welche durch verschiedene Hindernisse so getrennt sind, dass man längs ihrer Verbindungslinie nicht visiren kann, sollen einige Punkte in gerader Linie abgesteckt werden.**

Die Lösung dieser Aufgabe ist im Allgemeinen schwierig und umständlich, kann aber oft durch kluge Benützung der Localverhältnisse sehr vereinfacht werden. Wir setzen zunächst einige günstige Umstände voraus.

1) Es sei möglich, neben der gesuchten Geraden AB eine andere Gerade CD abzustecken, deren Endpunkte mit den gegebenen Punkten A und B verbunden werden können.

Fig. 8.



Dieser Fall kommt sehr oft und manchmal so vor, dass die Hilfslinie sogleich durch einen der Endpunkte A oder B selbst gelegt werden kann. Die Linie CD, welche wir hier als Hilfslinie benützen, kann man durch Rückwärtsverlängern eines angenommenen geraden Stücks (z. B. CF oder DH), oder durch Einschalten von Punkten (F, G, H) zwischen C und D nach §. 29 abstecken. Ist dieses geschehen, so bezeichne man in der Linie CD einige Punkte F, G, H, welche eine freie Aussicht gegen die gesuchte Linie AB gestatten und so liegen, dass man in den von ihnen ausgehenden Richtungen FM, GN, HO Entfernungen abmessen kann. Hierauf wird die Linie CD mit ihren Zwischenpunkten F, G, H der Länge nach zweimal abgemessen und alle Entfernungen werden auf den Horizont reducirt. Wir wollen annehmen, dass die wagrechte Gerade $CF = a_1$, $CG = a_2$, $CH = a_3$ und CD selbst $= a$ sei. In gleicher Weise werden $AC = c$ und $BD = e$ gemessen und auf den Horizont reducirt. Sind die Richtungen FI, GK, HL, welche freie Aussicht und ungehinderte Messung

gegen AB hin gestatten, durch Absteckstäbe oder Signale festgelegt, so misst man ausserdem noch die in der Fig. 8 angezeigten Horizontalwinkel α_0, α_1, α_2, α_3 und α. Mit diesen gemessenen und folglich bekannten Grössen kann man die Entfernungen MF, NG, OH der Punkte M, N, O, welche in der Geraden AB liegen sollen, berechnen, und ist diese Rechnung gemacht, so braucht man nur die gefundenen Horizontalentfernungen von F, G, H, aus genau abzumessen, um die gesuchten Punkte M, N, O der Geraden AB zu erhalten.

Die für diese Absteckung nöthigen Rechnungen werden am einfachsten in folgender Weise zu führen sein.

Aus $CD = a$, $BD = e$, $CDB = \alpha$ und $a > e$ erhält man nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie:

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\gamma - \beta) = \frac{a - e}{a + e} \cot {}^1\!/_2\, \alpha.$$

Verbindet man den Werth von $\gamma - \beta$, welcher sich hieraus ergibt, mit dem von

$$\gamma + \beta = 180^0 - \alpha,$$

so erhält man die Winkel β und γ, welche zur weiteren Berechnung nöthig sind. Mit diesen Winkeln ist die Länge d der Seite BC sehr leicht zu finden; kennt man aber d, so sind in dem Dreiecke ABC wieder zwei Seiten $AC = c$, $CB = d$ und der eingeschlossene Winkel $ACB = 180^0 - (\alpha_0 + \beta) = \varepsilon_1$ bekannt, folglich kann man mit Hilfe der Gleichung

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\varepsilon - \delta) = \frac{d - c}{d + c} \cot {}^1\!/_2\, \varepsilon_1$$

die Winkeldifferenz $\varepsilon - \delta$ berechnen, und da die Winkelsumme

$$\varepsilon + \delta = 180^0 - \varepsilon_1 = \alpha_0 + \beta$$

ist, so lassen sich die Winkel ε und δ selbst und damit auch die Länge der Linie AB finden.

Nun sind die Abstände FM, GN, HO, welche beziehlich e_1, e_2, e_3 heissen sollen, leicht zu berechnen. Denn da jetzt der Winkel ε gefunden ist, so kennt man in dem Dreiecke ACE, das durch Verlängerung der Linien BA und DC entsteht, die drei Winkel und eine Seite (AC), und da der Winkel $\eta = \varepsilon - \alpha_0$ ist, so erhält man

$$CE = \frac{c \sin \varepsilon}{\sin \eta} = i;$$

da ferner in dem Dreiecke EFM die Seite $EF = i + a_1$, der Winkel $EFM = \alpha_1$ und der Winkel $FEM = \eta$ ist, so findet man

$$FM = \frac{(i + a_1) \sin \eta}{\sin (\alpha_1 + \eta)} = e_1.$$

In gleicher Weise erhält man aus dem Dreiecke EGN die Seite

$$GN = \frac{(i + a_2) \sin \eta}{\sin (\alpha_2 + \eta)} = e_2,$$

und schliesslich aus dem Dreiecke EHO die Seite

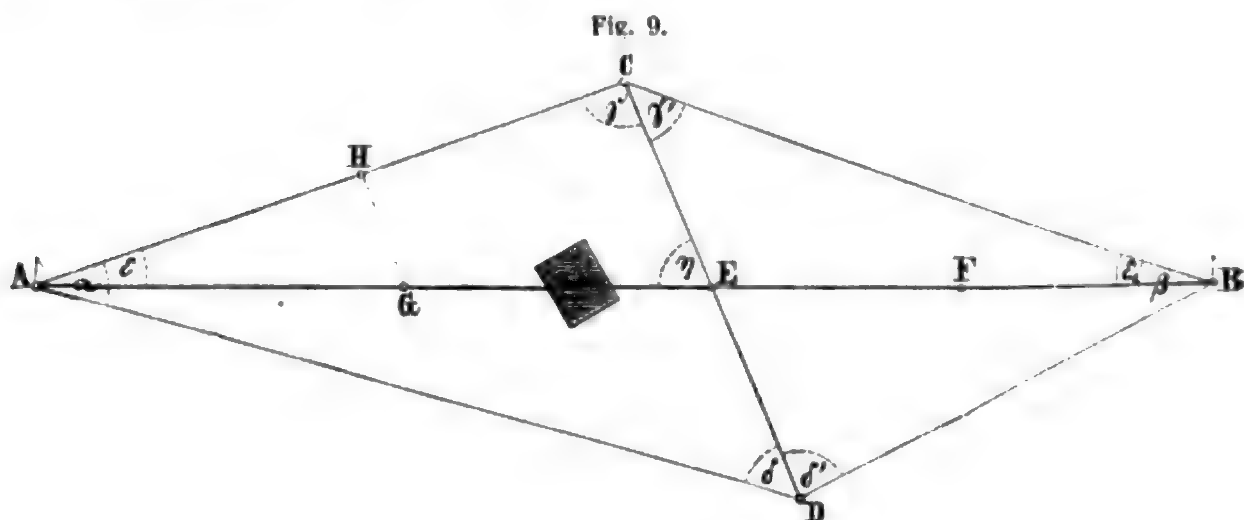
$$HO = \frac{(i + a_3) \sin \eta}{\sin (\alpha_3 + \eta)} = e_3.$$

Die Rechnung wird ungleich einfacher, wenn man entweder in der Lage ist, alle mit α bezeichneten Winkel einander gleich zu machen, oder wenn man die Hilfslinie CD durch A oder B selbst legen kann, was, wie schon bemerkt, oft der Fall ist.

2) Es sei möglich, die abzusteckende Gerade AB in der Weise mit einer gebrochenen Linie ACDB zu verbinden, wie dieses Fig. 9 zeigt.

Wenn man die drei Geraden AC, CD, DB und die beiden Winkel C und D sehr genau messen würde, so liessen sich aus diesen Grössen allein die Entfernung des Punkts E, welcher der Geraden AB angehört, von den Punkten C oder D berechnen. Würde man diese Entfernung genau abmessen, so wäre E bestimmt und dadurch die jetzige Aufgabe auf den in Nr. 1 betrachteten einfacheren Fall zurückgeführt, insofern neben AE die durch A gehende Hilfslinie AC und neben EB die Hilfslinie DB läge. Da es aber immer eine umständliche und mühevolle Arbeit ist, lange Linien sehr genau zu messen, so wollen wir jetzt annehmen, man könne von C und D aus nach A und B hin visiren.

Fig. 9.



In diesem Falle messe man die an ihren Endpunkten C und D mit starken Pfählen bezeichnete Hilfslinie CD mit Messlatten sehr genau ab und bemerke hiebei grössere Abschnitte von etwa 100 Meter durch kleinere Pfähle, um diese später, wenn die Entfernung CE abgemessen werden soll, in der Art benützen zu können, dass nur noch ein kleiner Theil anzusetzen oder abzuziehen ist. Hat man die Horizontalprojection von $CD = b$ gefunden, so messe man in C die Winkel γ und γ', in D die Winkel δ und δ', und in A und B die Winkel α und β. Streng genommen hätte man zwar die beiden letzteren Winkel nicht nöthig; aber es ist gut, sie zu messen, weil sie eine Controle für die Messung der übrigen Winkel bilden.

Beträgt die Summe $\alpha + \gamma + \delta$ oder $\beta + \gamma' + \delta'$ mehr oder weniger als 180^0 und liegt der Unterschied im Bereiche der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so gleiche man je drei zusammengehörige Winkel auf

180^0 dadurch aus, dass man jeden um den dritten Theil des Gesammtfehlers verbessert, wenn alle Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen sind, wie wir hier annehmen wollen.[1] Mit Hilfe dieser Winkel und der Grundlinie b findet man leicht die Dreieckseiten AD, BD gleich c, c', oder AC, BC gleich d, d', und hierdurch aus den Dreiecken ABC oder ABD die Winkel, welche diese Seiten mit der Geraden AB einschliessen. Wir wollen hier nur zwei von ihnen, nämlich $CAB = \varepsilon$ und $CBA = \varepsilon_1$ bestimmen, da die übrigen (ausser zur Controle der Rechnung) unnöthig sind. Da in dem Dreiecke ABC die Seiten d, d' und der von ihnen eingeschlossene Winkel $ACB = \gamma + \gamma'$ bekannt sind, so hat man, wenn $d > d'$ ist,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon) = \frac{d - d'}{d + d'} \cot \tfrac{1}{2} (\gamma + \gamma').$$

Verbindet man die Winkeldifferenz $\varepsilon_1 - \varepsilon$, welche sich hieraus ergibt, mit der bekannten Winkelsumme

$$\varepsilon_1 + \varepsilon = 180^0 - (\gamma + \gamma'),$$

so erhält man sowohl ε als ε_1. Hat man aber diese Winkel, so liefern die beiden Dreiecke ACE und BCE die gesuchte Entfernung

$$CE = \frac{d \sin \varepsilon}{\sin (\gamma + \varepsilon)} = \frac{d' \sin \varepsilon_1}{\sin (\gamma' + \varepsilon_1)}.$$

Wird diese Länge genau berechnet und abgemessen, so ist der Punkt E bestimmt. Weitere Punkte der Linie AB sind entweder dadurch zu ermitteln, dass man aus den Dreiecken ACE oder BCE die Neigung η der Seite CD gegen die Gerade AB berechnet und den Winkel η oder seinen Nebenwinkel $180^0 - \eta$ mit Hilfe eines in E aufgestellten Theodolithen an CE anträgt, wodurch sich z. B. der Punkt F ergibt; oder man findet einen Punkt G dadurch, dass man auf AC eine Abscisse $AH = l$ abmisst und von H aus senkrecht zu AC die Ordinate $HG = l \operatorname{tg} \varepsilon$ abträgt.

3) Es lassen sich keine so einfachen Hilfsfiguren wie in den beiden vorhergehenden Fällen bilden.

In diesem Falle bleibt nichts Anderes übrig, als zwischen den gegebenen Endpunkten der gesuchten Geraden ein Netz von Dreiecken abzustecken, dasselbe genau zu messen und aus den gemessenen Grössen zu berechnen, an welchen Stellen die Dreieckseiten von der auszusteckenden geraden Linie geschnitten werden, endlich diese Schnittpunkte auf den zugehörigen Dreieckseiten abzutragen und dauerhaft zu bezeichnen.

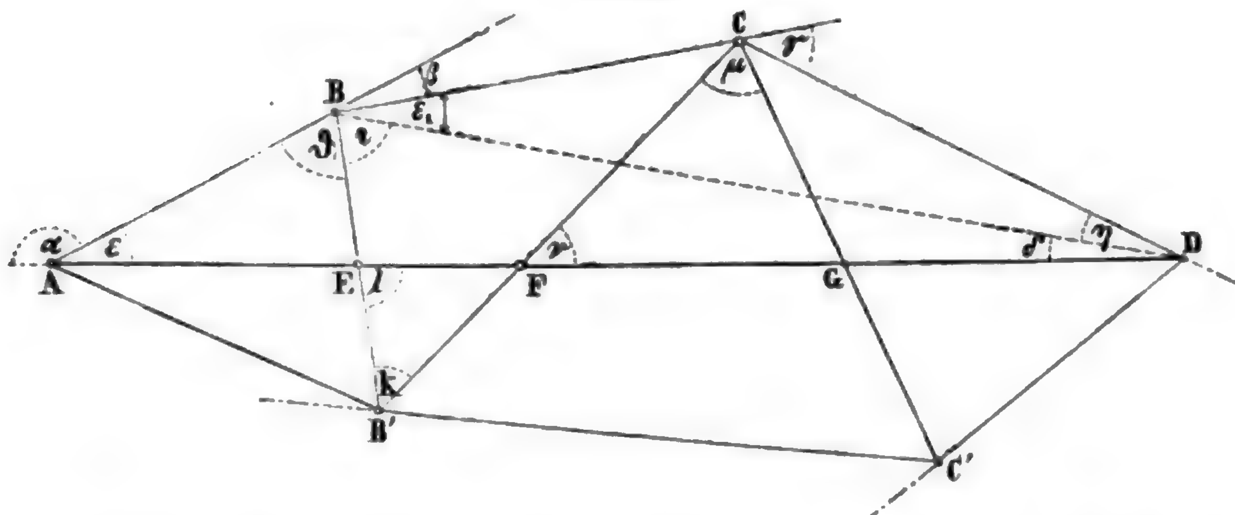
Es seien in Fig. 10 A, D die gegebenen Punkte, und es sollen einige andere Punkte E, F, G der Geraden AD bestimmt werden.

Zu dem Ende suche man auf dem Terrain zunächst die Dreieckspunkte B, C, B', C' so aus, dass sie nicht nur gute Standorte für den Theodolithen und Aussicht nach je drei oder vier anderen Punkten des Dreiecksnetzes gewähren, sondern dass auch die einzelnen dadurch bestimmten Dreiecke keine zu spitzen oder zu stumpfen Winkel erhalten und auf denjenigen

[1] Wären die Winkel mit ungleicher Genauigkeit gemessen, so müsste die Vertheilung des Gesammtfehlers mit Rücksicht hierauf nach §. 23 und 24 vorgenommen werden.

Seiten derselben, welche die Gerade AD schneiden, bequem und sicher die erforderlichen Längen abgemessen werden können. Eine der letzteren Seiten, z. B. B'C, wähle man als Grundlinie des Netzes, messe sie mit Messlatten zweimal sehr genau ab, und bezeichne wieder, der späteren

Fig. 10.



Bestimmung des in ihr liegenden Schnittpunkts (F) wegen, grössere Abtheilungen von etwa 100 Meter durch kleinere Pfähle. Es sei die auf den Horizont reducirte Länge von B'C = g.

Nun messe man mit einem guten Theodolithen in den Netzpunkten A, B, C, D, C', B' alle Winkel, welche daselbst gemessen werden können, so genau als möglich, und gleiche je drei zu einem Dreiecke gehörige auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise auf 180° aus.

Mit Hilfe dieser Winkel und der Seite g lassen sich alle Dreieckseiten berechnen; denn aus dem Dreiecke B'CB findet man BC = b und BB' = e; mit e aber aus dem Dreiecke BB'A die Seiten AB = a und AB' = a'; mit g erhält man aus dem Dreiecke CC'B' die Seite B'C' = b' und CC' = f; mit f aber aus dem Dreiecke CC'D die Seite CD = c und C'D = c'.

Würde man den Winkel BAE = ε kennen, so liesse sich aus dem Dreiecke ABE die Seite BE = x berechnen, da ausser ε der Winkel ABE und die Seite AB = a bekannt wäre; folglich liesse sich auch der Punkt E der Geraden AD abstecken. Alsdann könnte man auch aus dem Dreiecke EB'F die Seite B'F = y berechnen und folglich auf dem Felde den Punkt F erhalten. Schliesslich erhielte man die Seite CG = z aus dem Dreiecke FCG und damit den Punkt G auf dem Felde.

Der Winkel ε ist aber leicht zu finden. Denn da man in dem Dreiecke BCD die zwei Seiten b, c und den von ihnen eingeschlossenen Winkel BCD = 180° — γ kennt, so findet man zunächst $\eta - \varepsilon_1$ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\eta - \varepsilon_1) = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(180^0 - \gamma),$$

und da ferner die Winkelsumme $\eta + \varepsilon_1 = \gamma$ ist, so sind η und ε_1 als bekannt anzusehen.

Man kennt somit auch den Winkel $ABD = 180^0 - (\beta + \varepsilon_1) = \vartheta + \iota$, und da aus dem Dreiecke BCD die Seite

$$BD = \frac{b \sin \gamma}{\sin \eta} = i$$

folgt, so sind in dem Dreiecke ABD wiederum zwei Seiten $AB = a$, $DB = i$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel

$$ABD = 180^0 - (\beta + \varepsilon_1) = \vartheta + \iota$$

bekannt; desshalb ist auch

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta) = \frac{i - a}{i + a} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\vartheta + \iota).$$

Weil aber die Winkelsumme

$$\varepsilon + \delta = \beta + \varepsilon_1$$

ist, so findet man aus den beiden letzten Gleichungen die Winkel δ und ε selbst und damit auch die Seite

$$AD = \frac{i \sin (\beta + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon} = \frac{b \sin \gamma \sin (\beta + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon \sin \eta}.$$

Die Länge $BE = x$ ergibt sich aus dem Dreiecke ABE, in welchem die drei Winkel und eine Seite $AB = a$ bekannt sind; es ist nämlich

$$x = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \vartheta)}.$$

Zieht man x von e ab, so kennt man in dem Dreiecke EB'F eine Seite $B'E = e - x$ und alle Winkel, folglich findet man die Seite B'F oder

$$y = \frac{(e - x) \sin \lambda}{\sin (\varkappa + \lambda)}.$$

Endlich ergibt sich aus dem Dreiecke FCG, in welchem abermals alle Winkel und eine Seite $FC = g - y$ bekannt sind, die Entfernung des Punkts G von C oder

$$z = \frac{(g - y) \sin \nu}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Sind die Werthe von x, y, z genau berechnet, so messe man sie auf den Dreieckseiten BB', B'C, CC' von den Punkten B, B', C aus ganz genau ab, und ist dieses geschehen, so hat man die drei Punkte E, F, G der abzusteckenden Geraden AB gefunden.

4) Aussteckung einer sehr langen geraden Linie durch besondere Hilfsmittel, namentlich Lichtsignale.

Wenn man es scheut, das eben beschriebene Verfahren zur Aussteckung einer langen geraden Linie, welches stets sicher zum Ziele führt, anzuwenden, so kann man wohl auch, falls das Terrain nicht stark durchschnitten ist, von dem nachfolgenden Verfahren Gebrauch machen, welches der Ingenieur Fr. Andriessen beim Baue der rheinischen Eisenbahn ausgeführt und in dem ersten Bande der Zeitschrift des hannover'schen Architecten- und Ingenieurvereins wie folgt beschrieben hat:

„Meine Baustrecke von Köln bis Düren war $5\frac{1}{2}$ preussische Meilen lang und bestand nur aus drei geraden Linien, welche durch Uebergangs-

curven verbunden waren. Die erste Gerade, von Köln bis zum Königsdorfer Tunnel, war 1 Meile lang; die zweite, von dem genannten Stollen bis zur Merzenicher Haide, hatte $2\frac{1}{2}$ Meilen Länge, und die dritte vor Düren war ungefähr $\frac{1}{2}$ Meile lang.

Wegen der vielen Dünste war es nicht möglich, bei Tage die beiden ersten Geraden mit Sicherheit auszustecken; nachdem ich aber die erste eine Meile lange Gerade bei Nacht ganz genau ausgesteckt hatte, ging ich zu der weit schwierigeren Bestimmung der zweiten geraden Linie von $2\frac{1}{2}$ Meilen Länge, deren Endpunkte festlagen, über.

Der östliche Endpunkt dieser Linie war auf einem 20′ hohen Hügel am Königsdorfer Tunnel. Die Aussicht nach der Merzenicher Haide war jedoch auf dieser langen Entfernung durch drei hohe Eichenwaldungen so sehr verdeckt, dass nur zwei Stellen mittels Fernrohr gesehen werden konnten, die eine 4000 Fuss und die andere $1\frac{1}{2}$ Meilen von dem östlichen Endpunkte entfernt.

Das westliche Ende der Geraden, auf der Merzenicher Haide gelegen, war hinter der letzten Waldung ganz und gar versteckt und alle Auszüge aus Katasterplänen dienten nur dazu, die Stellung der Zwischenpunkte annähernd zu ermitteln. Eine Linie nach diesen Ermittelungen durch die Eichenwaldungen zu schlagen, war aber zu gefährlich, da jede Eiche 100 Thaler kostete. Ich sah mich also genöthigt, die Nacht zu Hilfe zu nehmen und folgendermassen zu verfahren.

Am westlichen Endpunkte auf der Merzenicher Haide liess ich Tags vorher eine grosse Theertonne aufrichten, die der daselbst befindliche Aufseher um 9 Uhr Abends anzuzünden hatte. Einen zweiten Aufseher stellte ich mit einer hohen Stange, woran eine grosse Laterne hing, auf die $1\frac{1}{2}$ Meilen vom östlichen Standpunkte entfernte Stelle, und zwar so viel als möglich in die Richtung der durch das Fernrohr sichtbaren beiden Endpunkte. Dieser Aufseher wurde angewiesen alle zwischen 9 und $9\frac{1}{2}$ Uhr sichtbaren Signale, als für ihn giltig, genau zu befolgen. Ebenso ausgerüstet wurde ein dritter Aufseher auf die 4000 Fuss vom östlichen Endpunkte entfernte Stelle, welche nahezu in der gegebenen Richtung lag, gestellt und beauftragt, die zwischen $9\frac{1}{2}$ und 10 Uhr erfolgenden Signale zu beachten.

Da bei Nacht alles Winken mit Laternen Nichts hilft, in so ferne die Vergleichungsgegenstände unsichtbar sind, und da auch zwei Laternen, wovon die eine feststeht und die andere verrückt wird, desshalb Nichts nützen, weil man von Weitem nicht entscheiden kann, welche Laterne verrückt wurde: so liess ich neben und hinter mir eine Anzahl Raketen so aufpflanzen, dass sie, angezündet, in schräger Richtung nach Norden oder Süden fliegen oder senkrecht in die Höhe steigen mussten.

Mit diesen Raketen dirigirte ich in den bestimmten Zeiträumen die beiden Einrichtungslaternen, nachdem ich vorher das Fadenkreuz des Theodolithen, der auf dem östlichen Endpunkte aufgestellt war, nach der Mitte

des rothen am Horizonte sichtbaren Scheins der brennenden Theertonne gerichtet hatte. Beim ersten Einrücken der $1\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Laterne musste ich drei Raketen links steigen lassen, ehe dieselbe in die Linie kam, dann eine rechts, weil sie ein wenig durch die Linie gerückt war, und darauf noch eine links. Hierauf liess ich das Signal mit den senkrecht steigenden grossen Leuchtkugeln geben, womit der erste Punkt bestimmt war. Die zweite Einrichtungslaterne stand der abzusteckenden Richtung näher, so dass ihre Stellung mit drei entgegengesetzt fliegenden Raketen und einer Leuchtkugel bestimmt werden konnte. Mit gutem Vertrauen liess ich am folgenden Tage die 4000 Fuss lange Linie rückwärts verlängern und die Waldungen durchschlagen. Diese Linie traf genau auf den $1\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Punkt und wich von dem westlichen $2\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Endpunkte nur $2\frac{1}{2}$ Fuss ab; ein geringer Fehler, welcher leicht zu verbessern war."

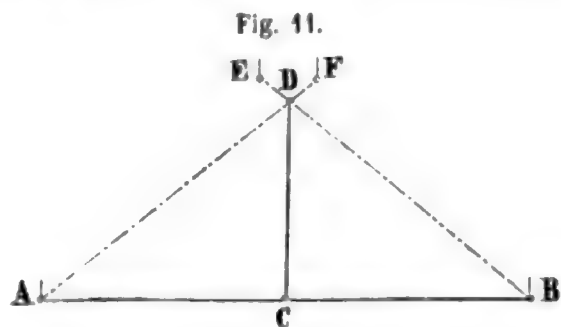
2. Das Abstecken senkrechter und paralleler Linien.

Aus der Instrumentenlehre ist bekannt, wie man auf freiem ebenen Boden mit Hilfe des Winkelkreuzes oder der Winkeltrommel, mit dem Winkelspiegel oder dem Prismenkreuze, mit dem Spiegelsextanten oder dem Spiegelkreise, endlich wie man mit der Bussole oder dem Theodolithen eine Linie abstecken kann, welche auf einer andern gegebenen Linie in einem gegebenen Punkte derselben senkrecht steht. Von diesen Absteckungen ist hier nicht mehr die Rede, sondern nur von jenen, welche unter ungünstigen Verhältnissen vorzunehmen sind.

§. 31. Aufgabe. Eine Gerade AB und ein Punkt C in ihr sind gegeben: in diesem Punkte eine Senkrechte zu errichten.

1) Man besitze zur Lösung dieser Aufgabe nur eine oder zwei Messketten und mehrere Fluchtstäbe.

Fig. 11.



Hat man zwei Messketten bei der Hand, so kann man auf dem Felde das Verfahren nachahmen, dessen man sich auf dem Reissbrette bedient, um eine Senkrechte zu errichten: man misst nämlich nach Fig. 11 von C aus zwei gleiche Stücke C A und C B, wovon jedes kleiner ist als die Kette, ab, befestigt in A und B je eine Kette und spannt dieselben gegen F und E hin so aus, dass sie sich in gleichen Abständen (D F, D E) von ihren Enden begegnen. Der Schnittpunkt D beider Ketten ist ein Punkt der gesuchten Senkrechten C D. Die Abstände D F und D E können nach Belieben 2, 3 oder mehr Meter lang gemacht werden.

Hat man nur eine Kette, so muss jeder der Abstände C A und C B bedeutend kleiner sein als die halbe Kettenlänge, und es sind alsdann die beiden Kettenstäbe in A und B festzuhalten, während der Geometer die

Kette in der Mitte fasst und sich damit so lange bewegt, bis deren beide Hälften (DA und DB) gleich stark angespannt sind, wodurch sich der Punkt D der abzusteckenden Senkrechten CD ergibt.

Fig. 12.

Noch einfacher ist das in Fig. 12 dargestellte Verfahren. Man lasse nämlich die beiden Kettenstäbe in dem gegebenen Punkte C und einem anderen Punkte E der Geraden A B, welcher etwa 10 Meter von C entfernt ist, festhalten und bestimme den Punkt M, welcher der Kettenmitte entspricht, durch Anspannen beider Kettenhälften. Lässt man hierauf den Gehilfen von C sich gegen D hin bewegen, seinen Stab in die Richtung E M einstellen und die Kette anspannen, so bezeichnet dessen Kettenstab einen zweiten Punkt D der Senkrechten, welche durch C geht. Denn da nach der Construction $ME = MC = MD$, so geht durch die drei Punkte E, C, D ein Kreis, dessen Durchmesser ED ist, der Winkel ECD liegt im Halbkreise und ist folglich ein rechter.

2) Der gegebene Punkt C der Geraden AB sei unzugänglich, man besitze aber ein Prismenkreuz oder einen Winkelspiegel.

Fig. 13.

Man errichte nach Fig. 13 in A oder irgend einem anderen Punkte der Geraden A B eine Senkrechte zu dieser. Ist E ein Punkt derselben, so ist dadurch auf dem Felde die Linie C E gegeben. In dieser kann man mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel [1] leicht den Punkt F suchen, welcher einer Geraden A F angehört, die durch den Punkt A geht und auf C E senkrecht steht. Denkt man sich vorläufig die Senkrechte C D gezogen und A F bis D verlängert, so entstehen mehrere ähnliche und rechtwinkelige Dreiecke, welche dazu dienen, die Länge F D zu berechnen, wenn zwei andere Längen gemessen sind. Es ist nämlich, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DFC und AFE,

$$DF = \frac{AF \cdot CF}{EF},$$

und wegen der Aehnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke ACF und AEF:

[1] Wie mit dem Prismenkreuze von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte gefällt wird, ist schon in Abth. I. gezeigt worden; der Winkelspiegel wird in gleicher Weise angewendet, erfordert aber, dass man sich durch eine besondere Operation fortwährend davon überzeugt, ob man sich in der gegebenen Geraden bewegt oder nicht.

$$CF = \frac{AF \cdot AF}{EF}.$$

Stellt man diesen Werth von CF in die erste Gleichung ein und setzt die gemessenen Linien AF = a und EF = b, so folgt

$$DF = \frac{a^3}{b^2} = c.$$

Wird die hieraus berechnete Länge c von F aus in der Richtung AF abgemessen, so erhält man den Punkt D, welcher der gesuchten Senkrechten CD angehört und deren Fusspunkt C unzugänglich ist.

3) Die gegebene Gerade AB und die abzusteckende Senkrechte CD sind sehr lang und der rechte Winkel soll sehr genau sein.

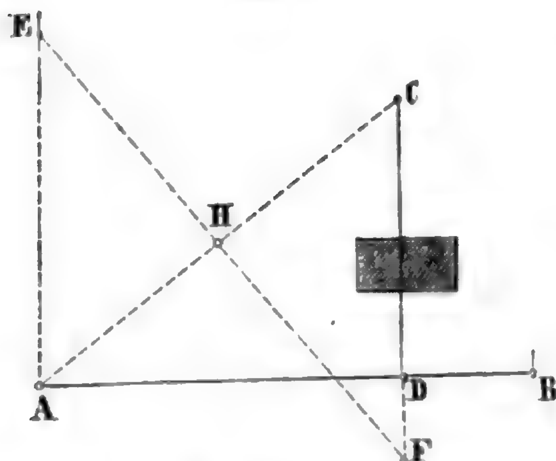
In diesem Falle bleibt nichts Anderes übrig, als die Absteckung mit Hilfe eines Theodolithen vorzunehmen. Dieser wird erst centrisch über dem gegebenen Punkte C aufgestellt und dazu benützt sich zu überzeugen, ob dieser Punkt genau genug in der Geraden AB liegt, was nach §. 29 geschehen kann. Alsdann stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs genau auf den entferntesten Endpunkt (A) der gegebenen Geraden ein, liest beide Nonien ab, zeichnet die Ablesungen auf, verstellt mit Hilfe derselben das Fernrohr genau um 90° und richtet nun in die Absehlinie, so weit als möglich entfernt, ein Signal D ein. Um sich von der richtigen Stellung dieses Signals zu überzeugen, kann man das Fernrohr nochmals auf A zurückführen, die Nonien wiederholt ablesen und zusehen, ob der Unterschied gegen die Ablesung bei der Einstellung auf D wirklich genau 90° beträgt oder nicht. Dieselbe Untersuchung macht man auch für den Winkel BCD, indem man das Fadenkreuz erst wieder auf D und dann auf B einstellt und in beiden Fällen abliest. Wenn sich keine Abweichung zeigt, oder eine geringe an der Stellung des Signals D verbessert ist, so kann man in die Linie CD nach Bedürfniss noch eine oder mehrere andere Signalstangen nach §. 29 einrichten.

§. 32. Aufgabe. Eine gerade Linie und ein Punkt ausser ihr sind gegeben; man soll von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Gerade fällen.

1) Die Lösung dieser Aufgabe mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel ist bereits bekannt und braucht in Bezug auf den Winkelspiegel nur noch durch die Bemerkung vervollständigt zu werden, dass dieser stets fordert, dass die gegebene Gerade durch mindestens zwei Stäbe, welche beide auf der rechten oder beide auf der linken Seite des Geometers stehen, bezeichnet werde, damit sich der letztere hierdurch überzeugen könne, ob er sich beim Suchen des Fusspunkts der Senkrechten in der gegebenen Geraden bewege oder nicht. Diese Forderung, manchmal schwer zu erfüllen, ist für das Prismenkreuz nicht nöthig, wesshalb dasselbe auch in Hinsicht der Lösung der vorstehenden Aufgabe dem Winkelspiegel vorzuziehen ist.

2) Es befinde sich in der Richtung der abzusteckenden Senkrechten CD ein Hinderniss, welches das Visiren erschwert. (Fig. 14.)

Fig. 14.



Eine unmittelbare Lösung durch das Prismenkreuz oder den Winkelspiegel ist hier nicht möglich, während eine mittelbare Lösung keine Schwierigkeiten macht. Man errichte nämlich in A eine Senkrechte A E zur gegebenen Geraden A B, halbire die Linie A C in H und lege durch einen beliebigen Punkt E der Senkrechten A E die Gerade E H und verlängere dieselbe, bis H F = H E wird. Dadurch erhält man den Punkt F, welcher in der gesuchten Senkrechten liegt; will man nun deren Fusspunkt D haben, so braucht man nur mit Hilfe des Prismenkreuzes von F aus eine Senkrechte auf A B zu fällen, womit alsdann die Aufgabe gelöst ist.

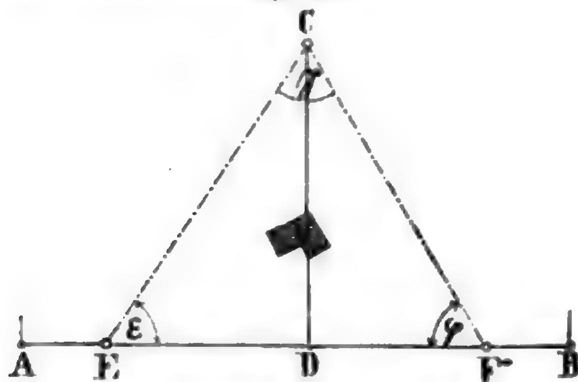
Dass der vorhin bestimmte Punkt F wirklich in der Senkrechten C D liegt, geht aus der folgenden Betrachtung hervor. Nimmt man erst an, dass CDF senkrecht steht zu AB, so ist, weil auch AE senkrecht zu AB, das Dreieck CHF dem Dreiecke AEH ähnlich, und es findet desshalb die Gleichung statt:

$$AH \cdot HF = CH \cdot EH.$$

Macht man nun, wie hier geschehen, AH = CH, so muss nach der vorstehenden Gleichung nothwendig HF = EH werden. Umgekehrt ist also zu schliessen, dass, wenn man bei der hier befolgten Operation HF = EH macht, der Punkt F in der gesuchten Senkrechten CD liegen muss.

3) Der Punkt C ist sehr weit von der gegebenen Geraden AB entfernt und es wird der Fusspunkt D der Senkrechten mit grosser Genauigkeit verlangt. (Fig. 15.)

Fig. 15.



Wenn diese Bedingungen stattfinden, so wird man in der Linie AB ein gerades Stück E F, welches erstens so liegt, dass man von E und F nach C visiren kann, und das zweitens wo möglich eben so gross als C D, ausserdem aber nicht viel kleiner als CD ist, so genau als möglich abstecken und mit Messlatten ausmessen. Die auf den Horizont reducirte Länge der Linie EF heisse c. Ausser dieser Länge misst man in den Punkten E, F, C auch noch die drei Winkel des Dreiecks EFC mit einem Theodolithen und gleicht dieselben auf die Summe von 180° aus. Sollte der Punkt C unzugänglich sein, so genügt es, die Winkel bei E und F allein zu messen.

Nennt man die den Punkten E, F, C entsprechenden Horizontalwinkel beziehlich ε, φ, γ und heisst x der Abstand des Punkts D von E, so ist $DF = c - x$ und daher

$$x \operatorname{tg} \varepsilon = (c - x) \operatorname{tg} \varphi.$$

Aus dieser Gleichung findet man nach einer ganz einfachen Umformung:

$$x = \frac{c \sin \varphi \cos \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \varphi)} = \frac{c \sin \varphi \cos \varepsilon}{\sin \gamma}.$$

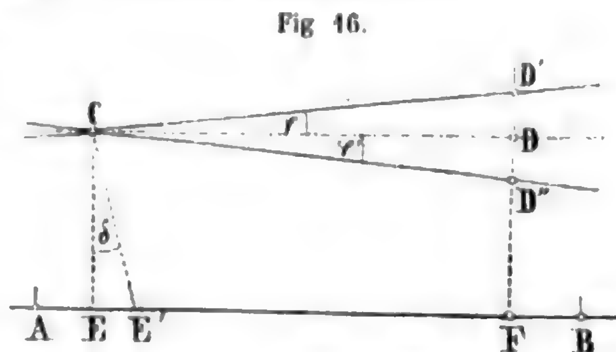
Misst man diese Länge von E gegen F hin genau ab (wobei sich die von der ersten Messung dieser Linie bekannten Ergebnisse mitbenützen lassen), so erhält man den gesuchten Punkt D, von dem aus mit dem Theodolithen die Senkrechte CD theils nach C hin, bis an das Hinderniss zwischen C und D, theils auf der entgegengesetzten Seite von AB abgesteckt werden kann, wenn das Fernrohr erst auf A oder B eingestellt und dann um 90° gedreht wird.

§. 33. **Aufgabe. Eine gerade Linie ist gegeben und ein Punkt ausser ihr; es soll durch diesen Punkt eine Parallele zu jener Geraden abgesteckt werden.**

1) Absteckung paralleler Linien mit Hilfe von Senkrechten.

Ist AB die gegebene Gerade und C der gegebene Punkt, so hat man zunächst die Senkrechte CE herzustellen und zu messen, dann in irgend einem Punkte der Geraden AB, etwa in F oder in B selbst, eine Senkrechte FD zu errichten und diese der CE gleich zu machen. Das Prismenkreuz leistet hier wieder die besten Dienste, namentlich dann, wenn die Punkte A und B unzugänglich oder so gelegen sind, dass man von einem zum anderen nicht visiren kann.

Fig 16.



Bei dieser Absteckung kommt es weniger auf scharfe Bestimmung der rechten Winkel bei E und F, als vielmehr darauf an, dass die Punkte E und F genau in der Geraden AB liegen, und dass die Senkrechten CE und DF gleich lang sind. Denn nimmt man an, dass in Fig. 16 der Winkel CEF um den kleinen Winkel $ECE' = \delta$ falsch bestimmt worden wäre, während BFD richtig ist, so würde die Wirkung dieses Fehlers darin bestehen, dass man statt des richtigen Abstands $CE = a$ den unrichtigen $CE' = FD'$ von F aus abtrüge, wodurch statt der Parallelen CD die Richtung CD' erhalten würde, die mit CD einen Winkel φ bildete, dessen Grösse sich aus der leicht aufzufindenden Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{DD'}{CD} = \frac{1 - \cos \delta}{\cos \delta} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta}{\cos \delta} \cdot \frac{a}{b},$$

in welcher $CD = EF = b$ gesetzt ist, bestimmen liesse. Der erste Aus-

druck für $\operatorname{tg}\varphi$ kann vereinfacht werden, wenn man ihn im Zähler und Nenner mit $\cos\delta$ dividirt und

$$\sec\delta = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta} = 1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\delta$$

setzt, was hier ohne Zweifel erlaubt ist. Dadurch erhält man

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\operatorname{tg}^2\delta}{2b}.$$

Berücksichtigt man ferner, dass φ und δ immer nur kleine Winkel sind, so ist, wenn diese Winkel in Minuten ausgedrückt werden, $\operatorname{tg}\varphi = \varphi\operatorname{tg}1'$, $\operatorname{tg}\delta = \delta\operatorname{tg}1'$ und folglich

$$\varphi = \frac{a\,\delta^2\operatorname{tg}1'}{2b} = \frac{a\,\delta^2}{6875\,b}.$$

Nehmen wir jetzt an, die Winkel bei E und F seien richtig, diese Punkte selbst aber, oder die von ihnen aus abgemessenen Senkrechten EC, FD unrichtig bestimmt, so dass in der Richtung FD statt des Punkts D der Punkt D'' erhalten würde, welcher um das Stückchen DD'' = q a (wobei q wieder ein kleiner Bruch ist) falsch liegt: so erhielte man statt der Parallelen CD die Richtung CD'', welche mit jener einen Winkel φ' bildete, der sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi' = q\,\frac{a}{b}$$

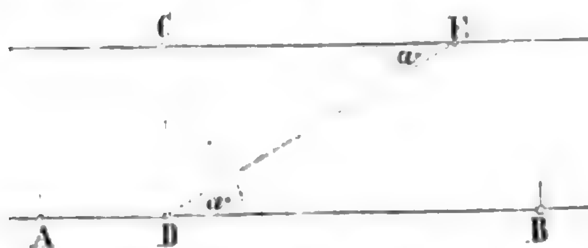
ergäbe. Wendet man auch hier die erlaubte Näherungsformel $\operatorname{tg}\varphi' = \varphi'\operatorname{tg}1'$ an, so erhält man unmittelbar den Winkel

$$\varphi' = 3438\,q\,\frac{a}{b}.$$

2) Absteckung von Parallellinien mittels der Wechselwinkel.

Diese Winkel können eine beliebige Grösse haben, also auch rechte sein. Hätte man daher nur ein Prismenkreuz oder einen Winkelspiegel statt eines Theodolithen oder Spiegelkreises zur Verfügung, so müsste man, um die vorliegende Aufgabe zu lösen, von dem gegebenen Punkte C auf die gegebene Gerade AB eine Senkrechte CD fällen und an diese bei C den rechten Winkel ECD = ADC antragen. Wäre E der gegebene Punkt, durch den eine Parallele zu AB gelegt werden sollte, ohne dass man zu ihm gelangen könnte, so würde man, um ausser dem gegebenen noch einen Punkt C der Parallelen zu erhalten, in einem beliebigen Punkte D der Geraden AB eine Senkrechte CD errichten und auf dieser mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel den Punkt C bestimmen, in welchem sie von einer durch E gehenden und zu ihr senkrechten Geraden EC geschnitten wird.

Fig. 17.



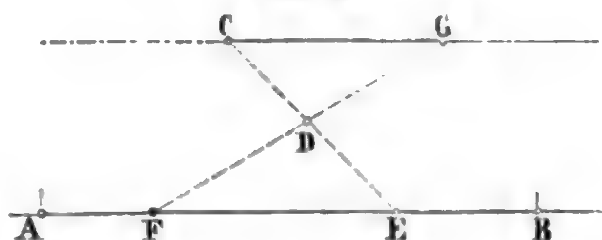
Kann man in dem gegebenen Punkte E und in irgend einem Punkte D der Geraden AB ein winkelmessendes Instrument, z. B. einen Theodolithen aufstellen, so messe man in D den Winkel BDE = ω, stelle hierauf den

Theodolithen in E auf, richte das Fernrohr nach D, lese die beiden Nonien ab, drehe mit Hilfe dieser Ablesungen die Alhidade genau um den Winkel ω in der Richtung von D nach C hin und stecke in der neuen Absehlinie das Signal C aus, so ist offenbar EC parallel zu AB. Eine einfache Ueberlegung lehrt, wie man zu verfahren hätte, um den Winkel ω auch mit dem Spiegelsextanten, dem Spiegelkreise, der Bussole oder dem Messtische in D aufzunehmen und an ED anzutragen.

3) Absteckung von Parallellinien mit Hilfe von Dreiecken.

Soll durch C eine Parallele zu AB gelegt werden, so kann man nach Fig. 18 zwei sich schneidende Gerade CE und FD, wovon eine durch C geht und welche beide in der Geraden AB endigen, abstecken, die Stücke $CD = a$, $DE = b$, $DF = c$ messen und hierauf den Punkt G der gesuchten Parallelen CG dadurch bestimmen, dass man FD verlängert und

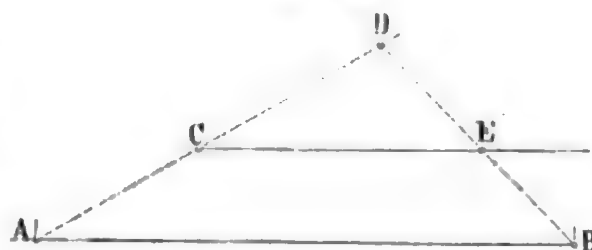
Fig. 18.



$$DG = x = \frac{ac}{b}$$

macht. Die Richtigkeit dieses Verfahrens bedarf keines Beweises, und es ist klar, dass man statt der Punkte E und F auch die Punkte B und A oder doch einen von ihnen zur Absteckung benützen kann.

Fig. 19.



Kann oder will man das vorstehende Verfahren nicht anwenden, so lege man wie in Fig. 19 durch C die Gerade CA und verlängere dieselbe bis zu einem Punkte D, der so liegt, dass man von ihm nach dem Punkte B der Geraden AB sehen und messen kann. Ist $AC = m$, $CD = n$, $DB = r$ gemessen, so mache man

$$DE = z = \frac{nr}{m + n},$$

womit die Parallele CE gefunden ist; denn dadurch, dass DE die eben berechnete Länge z erhalten hat, ist das Dreieck DCE dem Dreiecke DAB ähnlich und folglich die CE der AB parallel geworden. Es versteht sich von selbst, dass man statt B jeden anderen gut gelegenen Punkt der Geraden AB benützen, und wenn das Terrain nicht hindert, $n = m$ und folglich $z = \frac{1}{2}r$ machen kann.

4) Absteckung der Parallellinien durch Benützung ausserordentlich weit entfernter Gegenstände.

Da zwei gerade Linien einen um so kleineren Winkel mit einander bilden, in je grösserer Entfernung sie sich schneiden, so lassen sich durch

Fig. 20.

Benützung eines sehr entfernten Schnittpunkts Linien abstecken, welche nahezu parallel sind. Hat man demnach durch C eine Parallele zu der Geraden AB, in deren Verlängerung ein sehr weit entfernter Gegenstand G, z. B. ein Kirchthurm, ein Haus, ein Baum, ein Signal etc. sichtbar ist, abzustecken, so braucht man nur von C aus den Stab D'' in die Richtung CG einzustellen, und es wird dadurch die Aufgabe um so genauer gelöst sein, je weiter G von C entfernt ist.

Wie gross die Genauigkeit ist, kann man in jedem einzelnen Falle leicht beurtheilen. Bezeichnet nämlich

a die Entfernung CE des Punkts C von der Geraden AB,
b den Abstand CD der Senkrechten CE und D''F von einander,
c die Entfernung EG des Gegenstands G vom Punkte E,
d die Abweichung DD'' der wahren Richtung CD von der genäherten CG,
φ den Neigungswinkel dieser beiden Linien (CD, CG) und
q das Verhältniss, in welchem d zu a steht:

so ist nach der Figur

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{b} = \frac{a}{c},$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass φ immer nur ein kleiner Winkel ist,

$$\varphi = 3438' \, \frac{a}{c}.$$

Will man den Fehler der Absteckung lieber durch den Unterschied d ausdrücken, welcher zwischen den Abständen CE und D''F stattfindet, so dient dazu die Gleichung

$$d = b \, \frac{a}{c},$$

welche aus dem Vorhergehenden folgt und selbst wieder das Verhältniss dieses Fehlers zum Abstande a oder

$$q = \frac{d}{a} = \frac{b}{c}$$

liefert. Wenn also der Abstand D''F nur um den tausendsten Theil seiner Länge falsch werden dürfte, so müsste der Punkt G tausendmal so weit von E entfernt sein als F; wäre demnach a = b = 10 Meter, so müsste CG schon gleich 10000 Meter sein, eine Forderung, die sich nur selten erfüllen liesse.

Unter der Voraussetzung aber, dass c wirklich so gross genommen werden könnte, als eben angegeben wurde, betrüge der Winkel φ, unter welchem die abgesteckte Richtung CG gegen AB geneigt sein würde, doch immer noch 3,438 Minuten. Hieraus ergibt sich zur Genüge, dass von dem

eben besprochenen Näherungsverfahren nur ein sehr beschränkter Gebrauch zu machen ist.

3. Das Abstecken krummer Linien (Curven).

Eine der wichtigsten Vermessungsarbeiten der Bau-Ingenieure bildet das Ausstecken derjenigen Curven, durch welche je zwei sich schneidende gerade Richtungen von Strassen, Eisenbahnen oder Canälen mit einander verbunden werden müssen, um hiernach Verkehrswege herzustellen, deren horizontal projicirte Axen stetige Linien sind. Die Curven, welche zur Verbindung der als Tangenten erscheinenden Geraden dienen, sind fast ausschliesslich Kreisbögen und nur in wenigen Fällen Parabeln. Die Bedingungen, unter denen diese Curven auszustecken sind, können sehr verschieden sein, und es werden sich theils hiernach, theils nach dem Grade der Genauigkeit, welchen die Arbeit besitzen soll, die Methoden der Absteckung richten. Alle diese Methoden setzen voraus, dass man die Berührungspunkte der abzusteckenden Curven vorher bestimmt habe, wesshalb zuvörderst die folgende Aufgabe zu lösen ist.

§. 34. Aufgabe. Zwei gerade sich schneidende Richtungen sind ihrer Lage nach, und die sie verbindende Curve ist durch ihren kleinsten Krümmungshalbmesser gegeben: man soll die Entfernung der Berührungspunkte von dem Schnittpunkte der Tangenten bestimmen.

Sind (Fig. 21) AB, A'G die gegebenen Geraden, so hat man vor allen Dingen den Punkt E, in welchem sie sich schneiden, und den Horizontalwinkel φ, den sie daselbst einschliessen, zu bestimmen. Der Schnittpunkt E wird erhalten, indem man sich entweder in der Verlängerung von AB aufstellt und darin so lange vor- oder rückwärts geht, bis man auch in die verlängerte Linie A'G gelangt; oder indem zwei bei A und A' stehende Geometer einen Gehilfen mit einer Signalstange gleichzeitig in die Linien AB und A'G einrichten. Steht dessen Stange in den beiden Geraden, so bezeichnet sie offenbar deren Schnittpunkt.

Ist dieser Punkt zugänglich und kann von ihm aus jede der Berührungslinien AB, A'G auf eine genügend lange Strecke gesehen werden, so hat die Messung des Winkels φ, welche mit dem Theodolithen oder Spiegelkreise geschieht, keine Schwierigkeit und ist dieselbe aus der Instrumentenlehre hinreichend bekannt. Sollte aber der Schnittpunkt E unzugänglich sein, oder könnte man von ihm aus nur ein kurzes Stück der Linie AB und A'G übersehen, so müsste man den Winkel φ auf mittelbare Weise dadurch bestimmen, dass man in zwei geeigneten Punkten B und G der Geraden AB und A'G die Winkel β und γ misst und daraus den Winkel

$$\varphi = \beta + \gamma - 180^0$$

berechnet. Die Punkte B und G müssen so liegen, dass man nicht nur von einem zum anderen und beziehlich nach A und A' sehen, sondern auch von B bis G messen kann. Denn die Länge der Linie BG = e ist nöthig,

um damit die Entfernungen BE = g und GE = b, deren man später zur Absteckung der Berührungspunkte bedarf, zu berechnen. Wir setzen jetzt den Winkel φ und, wo wir sie bedürfen, die Seiten e, b, g als bekannt voraus.

Ist die Verbindungscurve DSD', welche die Geraden AB, A'G in den Punkten D, D' berührt, ein Kreis, so ist dessen Krümmungshalbmesser eine constante Grösse r, welche hier ebenfalls gegeben ist. Denkt man sich in der Fig. 21 den Mittelpunkt C des Kreises DSD' bestimmt und

Fig. 21.

denselben mit den Punkten D, D', E verbunden, so entstehen zwei congruente rechtwinkelige Dreiecke CDE, CD'E, aus denen sofort die gesuchte Entfernung der Berührungspunkte D, D' von E oder

$$ED = ED' = a = r \cot \tfrac{1}{2}\varphi \qquad (56)$$

folgt. Misst man diese Länge a von E aus sehr genau auf den beiden Tangenten EA, EA' ab, so erhält man auf dem Felde die Berührungspunkte D, D', die mit hinreichend starken Pfählen dauerhaft bezeichnet werden. Sollte der Punkt E unzugänglich sein, so hätte man selbstverständlich nur von B aus die Länge a — g und von G aus die Länge a — b abzumessen, um die Punkte D und D' zu erhalten.

Sind die Geraden AB, A'G durch eine Parabel DSD' mit einander zu verbinden, so wird der Scheitel S derselben stets in der Linie EC liegen,

welche den Winkel φ halbirt, und es wird ihre Gleichung für rechtwinkelige oder Polarcoordinaten entweder bekannt sein oder aus den gegebenen Bestimmungsstücken leicht gefunden werden können.

Es sei diese Gleichung für ein rechtwinkeliges System:

$$y^2 = p x = 2 r x,$$

wobei r den kleinsten Krümmungshalbmesser der Parabel bezeichnet, der Ursprung der Coordinatenaxen im Scheitel der Curve liegt und die den Winkel φ halbirende Linie EC die Abscissenaxe vorstellt. Nach einer bekannten Eigenschaft der gemeinen Parabel ist die Ordinate DH des Berührungspunkts D gleich

$$y = 2 x \operatorname{tg} {}^1/_2\, \varphi = r \cot {}^1/_2\, \varphi$$

und demzufolge diese Entfernung des Berührungspunkts D vom Schnittpunkte E der Tangenten gleich

$$a' = \frac{y}{\sin {}^1/_2\, \varphi} = \frac{r \cot {}^1/_2\, \varphi}{\sin {}^1/_2\, \varphi} \qquad (57)$$

Wird diese Entfernung von E aus auf den Tangenten EA und EA' abgemessen, so erhält man die gesuchten Berührungspunkte D und D' der abzusteckenden Parabel.

§. 35. **Aufgabe.** Es ist der Neigungswinkel (φ) der Tangenten einer Curve und diese selbst durch ihren Krümmungshalbmesser (r) gegeben: man soll die Entfernung des Scheitels (S) der Curve von dem Schnittpunkte (E) der Tangenten berechnen und abstecken.

In manchen Fällen ist der Scheitel der abzusteckenden Curve für deren Aussteckung selbst nöthig, in allen Fällen aber ist es gut, die Lage desselben zur Controle der Rechnung und Messung gesondert zu bestimmen.

Stellt in Fig. 22 die Curve DSD' einen Kreisbogen vom Halbmesser r vor, und sind D, D' dessen Berührungspunkte an den Tangenten EA, EA', welche zusammen den durch die Linie EC halbirten Winkel $AEA' = \varphi$ einschliessen, so ist aus bekannten geometrischen Gründen S der Scheitel des Kreises und $ES = c$ die gesuchte Entfernung. Denkt man sich in S eine Senkrechte zu EC errichtet, so stellt dieselbe eine Tangente des Kreises vor und es ist desshalb $SY = SY' = DY = D'Y' = d$.

Um die Länge d auszudrücken, verbinde man den Schnittpunkt Y mit dem Mittelpunkte C des Kreises DSD', so ist offenbar

$$DCY = SCY = {}^1/_2\,(90^0 - {}^1/_2\, \varphi) = 45^0 - {}^1/_4\, \varphi$$

und daher aus den rechtwinkeligen Dreiecken DCY oder SCY:

$$d = r \operatorname{tg} (45^0 - {}^1/_4\, \varphi). \qquad (58)$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks findet man die gesuchte Entfernung des Scheitels S oder

$$c = d \cot {}^1/_2\, \varphi = r \operatorname{tg} (45^0 - {}^1/_4\, \varphi) \cot {}^1/_2\, \varphi. \qquad (59)$$

Will man die Tangente YSY' dadurch abstecken, dass man die Punkte Y und Y' von E aus abmisst, so ist

$$EY = EY' = f = \frac{d}{\sin \frac{1}{2} \varphi} = \frac{r \operatorname{tg} (45^0 - \frac{1}{4} \varphi)}{\sin \frac{1}{2} \varphi} \tag{60}$$

zu nehmen. Der Schnittpunkt dieser Tangente und der Halbirungslinie EC gibt den Scheitel S, dessen Entfernung von E mit dem berechneten Werthe c übereinstimmen muss, wenn richtig gearbeitet wurde.

Ist die Curve DSD' ein Parabelbogen, so ist die Entfernung des Scheitels S von dem Punkte E durch die Gleichung

$$c' = \frac{1}{2} y \cot \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2} r \cot^2 \frac{1}{2} \varphi, \tag{61}$$

Fig. 22.

welche auf der schon in §. 34 angegebenen und benützten Eigenschaft der Parabel beruht, zu bestimmen, während die Länge EY = EY' oder

$$f = \frac{c'}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \varphi}{r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \tag{62}$$

und die Entfernung der Schnittpunkte Y und Y' oder SY = SY' gleich

$$d' = c' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2} r \cot \frac{1}{2} \varphi \tag{63}$$

ist. Steckt man mit Hilfe dieser Grössen die Punkte Y, S, Y' ab, so hat man damit nicht bloss den Scheitel der Parabel, sondern auch gleichzeitig deren Axen SC, SY bestimmt.

Die Richtung EC, in welcher sowohl der Scheitel der Parabel als der des Kreises liegt, steckt man am schnellsten und sichersten schon bei der Messung des Winkels φ aus, indem man nach der Bestimmung dieses Winkels und bei unverrücktem Stande des Instruments die Nonien des Horizontalkreises auf Ablesungen einstellt, welche das arithmetische Mittel aus denjenigen sind, die den Winkel φ lieferten. Sollte der Punkt E unzugänglich sein, so könnte auch ES nicht unmittelbar gemessen werden; in diesem Falle ist aber eine Controle der Arbeit dadurch gegeben, dass man die von den Punkten B und G (Fig. 21) aus bestimmte Tangente YY' misst und zusieht, ob deren Länge genau $= 2d$ oder $2d'$ ist, je nachdem der Bogen DSD' einem Kreise oder einer Parabel angehört. Findet diese Uebereinstimmung statt, so liefert der Mittelpunkt von YY' den Scheitel S, und eine Senkrechte in demselben die Halbirungslinie EC.

§. 36. **Aufgabe. Es sind die beiden Tangenten und Berührungspunkte eines Kreises von bekanntem Halbmesser gegeben: man soll den zwischen jenen Punkten enthaltenen Kreisbogen abstecken.**

1) Absteckung der Curve durch Orthogonal-Coordinaten.

Bei dieser Methode wird jeder Berührungspunkt als Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystems, jede Tangente als Abscissenaxe und jeder durch einen Berührungspunkt gezogene Halbmesser als Ordinatenaxe betrachtet. Kommt es bei der Absteckung nicht darauf an, dass die Bogenstücke gleich gross werden, so macht man die Abscissenunterschiede gleich; sollen aber die Bogenstücke gleich sein, so müssen nothwendig die Abscissenunterschiede ungleich werden. Diese Verschiedenheit der Anforderungen veranlasst zwar zwei verschiedene Berechnungsweisen der Coordinaten, aber keineswegs einen Unterschied in der Art der Absteckung der Coordinaten selbst. Wir werden hier zunächst diese zwei Fälle und hierauf noch den Fall behandeln, in welchem der für die Absteckung gebotene Raum sehr beschränkt ist.

a) Die Abscissenunterschiede sollen gleich sein.

Bezeichnet in Fig. 23 D den Berührungspunkt, DE die Abscissenaxe und DC die Ordinatenaxe, so ist für irgend einen Curvenpunkt p, dessen Abscisse $Dm = x$ ist, die zugehörige Ordinate

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}. \qquad (64)$$

Da r gegeben ist, so lässt sich hieraus für jedes x das entsprechende y berechnen. Man wird zu dem Ende

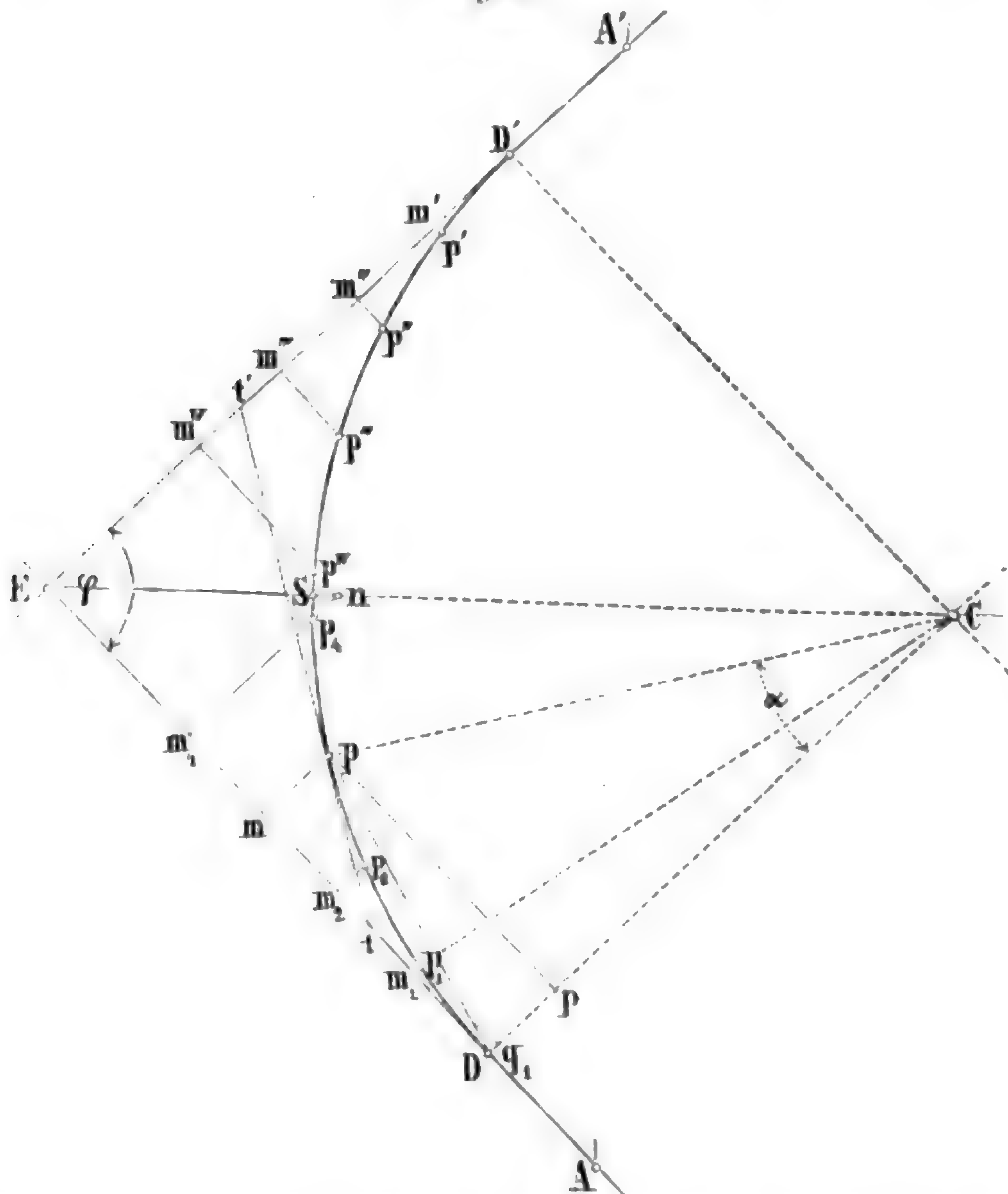
$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(r + x)(r - x)}$$

setzen, mit Hilfe der Logarithmen erst alle Wurzelwerthe herstellen und diese schliesslich von dem Halbmesser r abziehen, vorausgesetzt, dass man keine Tabelle besitzt, in der die gesuchten Ordinatenwerthe schon enthalten sind. Eine solche Tabelle enthält der Anhang. Darin findet man die Coordinaten für $r = 100$ bis $r = 7000$, und für Abscissenunterschiede von 10, 20, 25 und 50 Längeneinheiten.

Da in den meisten practischen Fällen die Grösse des Halbmessers innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden darf, so kann man es fast immer dahin bringen, dass r einen der Werthe erhält, welche in der Tabelle dafür angenommen sind; man braucht also nur noch in wenigen Fällen die Coordinaten selbst zu rechnen.

Sind die Coordinatenwerthe bekannt, so beginnt die Absteckung der Curve damit, dass man auf den Tangenten DE, D′E von den Berührungs-

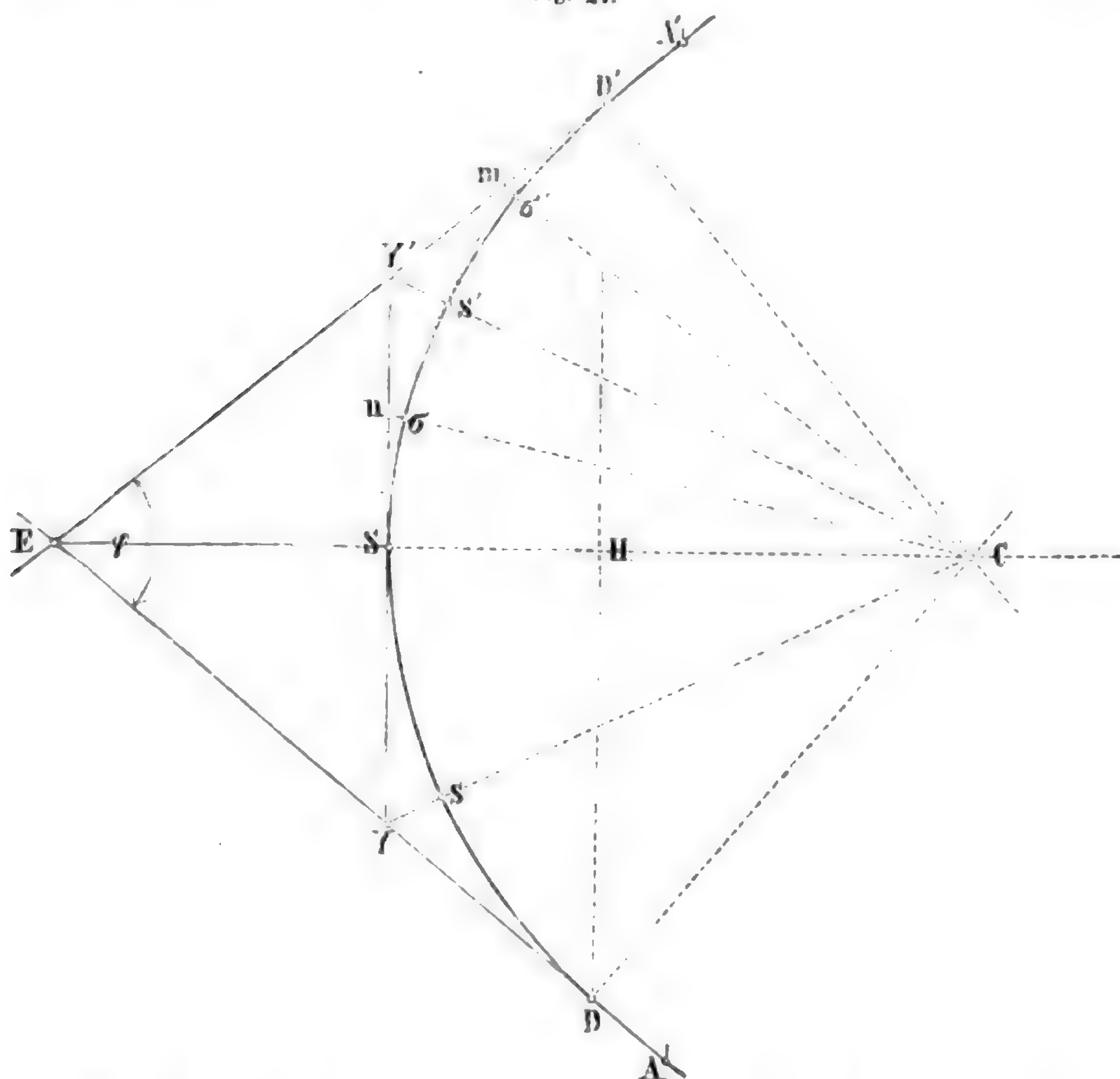
Fig. 23.



punkten D, D′ aus die Abscissen mit der Messkette oder mit Messlatten abmisst und ihre Endpunkte vorläufig bezeichnet. Hierauf errichtet man in diesen Endpunkten mit Hilfe des Winkelspiegels oder Prismenkreuzes Senkrechte, misst darauf mit Meterstäben die berechneten Ordinaten ab und bezeichnet deren Endpunkte durch Pfähle, welche etwa 0m,3 über dem Boden vorstehen, so sind dieses Punkte des abzusteckenden Kreisbogens. Zeigt sich nach dieser Absteckung, dass die beiden Curvenzweige DS, D′S ohne Unterbrechung ihrer Stetigkeit an dem bereits vorher ausgesteckten Scheitel S in einander übergehen, so kann diese Beobachtung als ein günstiges

Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit angesehen werden; findet aber dieser stetige Uebergang nicht statt, so hat man vor allen Dingen seine Rechnung zu prüfen, und wenn sich hierin kein Fehler herausstellt, die Messung, Berechnung und Absteckung aller Hilfsgrössen zu wiederholen. Eine weitere Prüfung der ganzen Arbeit besteht darin, dass man die Bogenlängen $D p_1$, $D p_2$, $D p$ ... berechnet, und sich durch unmittelbare Messung überzeugt, ob die abgesteckten Bogenlängen mit den berechneten übereinstimmen oder nicht. Wegen Berechnung der Bögen $D p_1$, $D p_2$, $D p$ .... bedarf es wohl nur der

Fig. 24.



Bemerkung, dass für irgend einen Punkt p, der x zur Abscisse hat, der zugehörige Bogen gleich ist

$$D p = \text{arc} \sin \left(\frac{x}{r}\right) \qquad (65)$$

Will man bei grossen Curven die langen Ordinaten, welche in der Nähe des Scheitels abzustecken wären, vermeiden, so theilt man den abzusteckenden Kreisbogen D S D' nach Fig. 24 in vier gleiche Theile, indem man die Zwischentangente Y S Y' herstellt, und steckt jeden dieser Theile gerade so ab, wie vorher die Curvenzweige DS, D'S. Es versteht sich dabei von

selbst, dass für die Bögen S s, S s' dieselben Coordinatenwerthe gelten, welche den Bögen D s, D' s' angehören; und dass man die Entfernungen der Scheitelpunkte s und s' von Y und Y' ganz in derselben Weise bestimmt, wie es in §. 35 für S geschehen ist.

b) Die Bogenstücke sollen gleich sein.

Wenn der Halbmesser r des abzusteckenden Kreisbogens und der Winkel φ seiner Tangenten, somit auch die Lage der Berührungspunkte gegeben ist, so kennt man damit auch die Länge des zwischen diesen Punkten enthaltenen Bogens und kann folglich bestimmen, in wie viele gleiche Theile der letztere getheilt werden soll. Man wählt hier gern eine gerade Anzahl Theile, damit der Scheitel des Bogens von seinen Nachbarpfählen eben so weit absteht, als jeder Curvenpfahl von dem seinigen.

Nehmen wir an, dass der ganze Bogen in 2n gleiche Theile zerlegt werde, so entspricht jedem Bogenstücke ein Mittelpunktswinkel

$$\alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2n} \tag{66}$$

und eine Länge von der Grösse

$$l = 0{,}01745\, \alpha r, \tag{67}$$

wobei α in Graden auszudrücken ist.

Stellt in Fig. 25 wieder DSD' den abzusteckenden Kreisbogen, D den einen und D' den anderen Berührungspunkt vor, so ist für irgend einen Curvenpunkt p, welcher um den Bogen $Dp = ul$ von D entfernt ist, die Abscisse

$$Dm = x = r \sin (u\, \alpha) \tag{68}$$

und die Ordinate

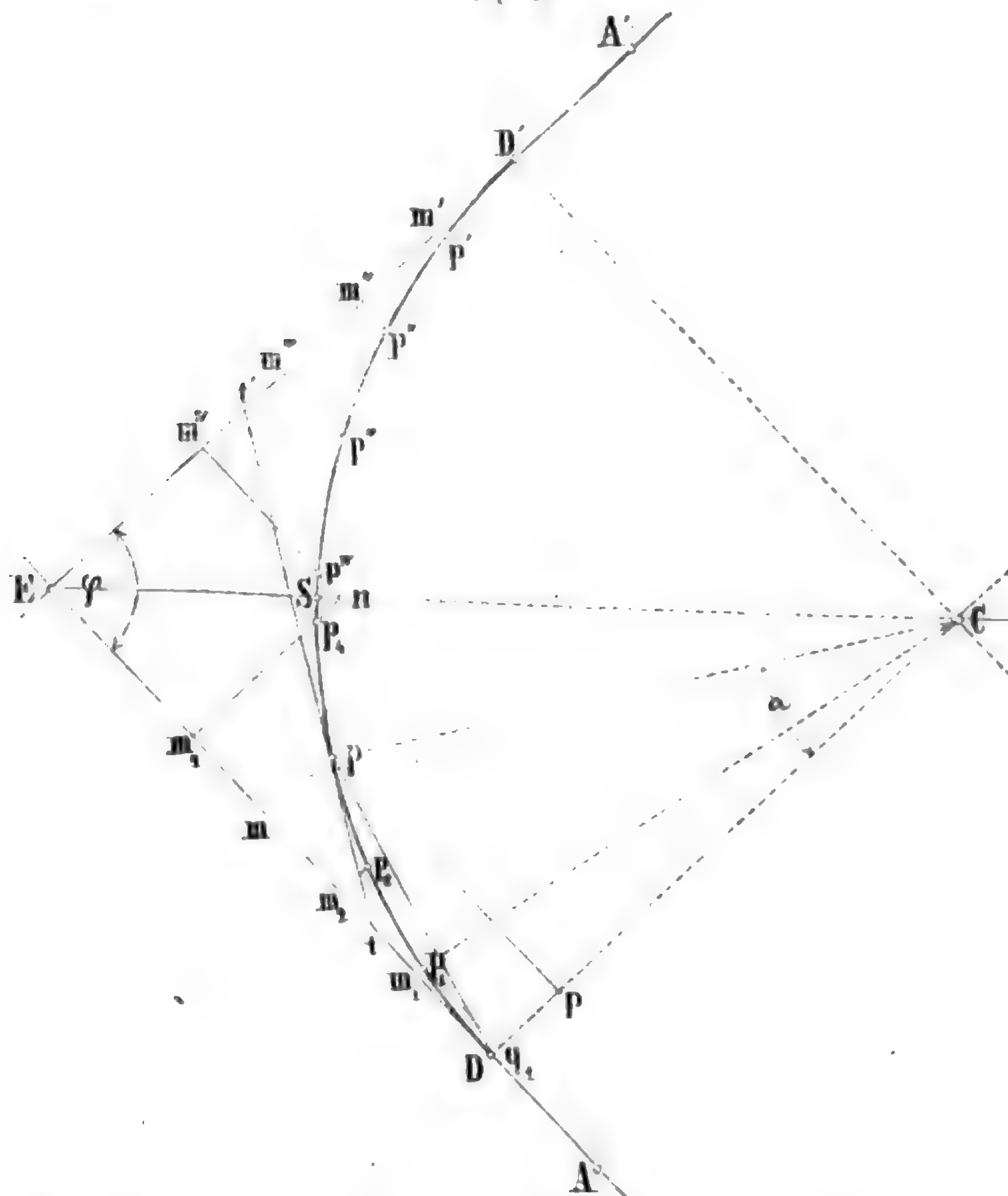
$$mp = y = 2r \sin^2 (\tfrac{1}{2}\, u\, \alpha) \tag{69}$$

Nimmt man nach und nach u gleich 1, 2, 3, 4 u. s. f. bis $u = n$, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen die den Punkten p_1, p_2, p.... S zugehörigen Coordinatenwerthe x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 u. s. w.; und trägt man dieselben in der sub lit. a angegebenen Weise auf dem Felde auf, so findet man daselbst die gesuchten Curvenpunkte p_1, p_2, p_3, p_4 u. s. f. bis zum Scheitel S. Zeigt sich nach der Absteckung, dass der aus den Coordinaten bestimmte Scheitelpunkt mit dem nach §. 35 gefundenen zusammentrifft, und bemerkt man, indem man von Pfahl zu Pfahl vorwärts geht und von jedem nach dem zweitnächsten visirt, keinen Unterschied in den Abständen der nächstliegenden Pfähle von diesen Visirlinien, sind also die Pfeile dem Augenmasse nach alle einander gleich, so kann man mit der Absteckung zufrieden sein.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass eine Zwischentangente gelegt wird, wenn die Ordinaten in der Nähe des Scheitels zu lang und folglich mühsam abzustecken sind. Wie diese im Scheitel herzustellen ist, wurde schon früher gezeigt; man kann sie aber auch an irgend einem anderen bereits abgesteckten Punkte, z. B. in p, nöthig haben. In diesem Falle darf man nur in p einen Theodolithen centrisch und horizontal aufstellen, von p nach D visiren, die Nonien ablesen und hierauf die Alhidade

um den Winkel uα in dem entsprechenden Sinne drehen, so wird die Visirlinie des Fernrohrs in der Richtung der neuen Tangente stehen. Steckt man nun den Stab t aus, so kann man die Linie tp rückwärts gegen S hin verlängern; lässt sich aber das Fernrohr durchschlagen, so kann man sofort einen Stab t' in die Tangente, welche man sucht, einrichten. Von p aus geht dann selbstverständlich die Curvenabsteckung in derselben Weise weiter, wie von D gegen p hin.

Fig. 25.



c) Der freie Raum für die Absteckung ist sehr beschränkt.

Auch wenn man eine Zwischentangente legt, ist der freie Raum, welchen die Absteckung mittels Coordinaten fordert, bei grösseren Curven sehr ausgedehnt und desshalb nicht immer zu haben. In solchen Fällen muss man sich einzuschränken wissen, d. h. man muss Methoden der Curvenabsteckung kennen, welche auf verhältnissmässig schmalem Raume ausführbar sind.

Nachstehend theilen wir zwei solche Methoden mit, welche sich zwar ebenfalls auf die Orthogonal-Coordinaten gründen, aber keineswegs so zuverlässig sind, wie die unter (a) und (b) besprochenen Verfahrungsweisen.

α) Betrachtet man nämlich in Fig. 26 die Tangente i_1 t, so ist klar, dass der Punkt i_1, in welchem sie die Tangente Dw_2 schneidet, von p_2 und D gleich weit abliegt, und dass er sich in dem verlängerten Halbmesser Cp_1, welcher den Winkel D Cp_2 halbirt, befindet. Der Fusspunkt w_1 der Ordinate p_1 w_1 liegt von i_1 um eine kleine Grösse w_1 i_1 ab, welche sich aus der Ordinate p_1 w_1 und dem Winkel w_1 p_1 i_1 = ½ (u α) leicht berechnen lässt; es ist nämlich

$$w_1 \; i_1 = \xi = y \operatorname{tg} (\tfrac{1}{2} u \alpha). \tag{70}$$

Berechnet man hieraus die Länge ξ und trägt sie an D w_1 an, so erhält man einen Punkt i_1, der in der Tangente i_1 t liegt und also zu deren Absteckung dient, wenn man den Punkt p_1 bereits hat. Geht der Winkel

Fig. 26.

½ u α in α über, indem u = 2 wird, so darf in dem vorliegenden Falle, wo α stets ein kleiner Winkel ist, annähernd tg $\alpha = \alpha$ tg $1^0 = 0{,}01745\,\alpha$ und

$$\xi = 0{,}01745 \; \alpha \; y \tag{71}$$

gesetzt werden. Bei der Berechnung des Werths von ξ aus der letzten Gleichung ist zu berücksichtigen, dass α in Grad ausgedrückt werden muss, und dass man alsdann ξ in derselben Längeneinheit erhält, in welcher y gegeben ist. Ist übrigens der Halbmesser des abzusteckenden Kreisbogens sehr gross, so wird ξ so klein, dass man es gegen x vernachlässigen kann.

Hat man nun von D aus einen Kreisbogen von dem Halbmesser r abzustecken, welcher die Tangente Dw_2 in D berührt und dessen Bogenstücke Dp_1, p_1 p_2, p_2 p_3 u. s. w. einander gleich werden sollen, so berechne man sich vor Allem die Winkel D C $p_1 = \alpha$ und D C $p_2 = 2\alpha$ nach Gleichung (66) und hiermit die Abscissen

$$x_1 = r \sin \alpha; \; x_2 = r \sin 2\alpha,$$

sowie die zugehörigen Ordinaten

$$y_1 = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha \; ; \; y_2 = 2r \sin^2 \alpha.$$

Ferner berechne man mit Hilfe von y_1 die Länge ξ nach (71) und stecke die Punkte p_1 und p_2 durch Abmessen dieser Coordinatenwerthe ab, indem man $Dw_1 = x_1$, $Dw_2 = x_2$; $w_1 p_1 = y_1$ und $w_2 p_2 = y_2$ macht. Steckt man weiter in dem Punkte i_1, welcher um die Grösse ξ von w_1 absteht, einen Stab ein, so erhält man die Tangente $i_1 p_2$, auf der man abermals die Abscissenwerthe $p_2 w_3 = x_1$ und $p_2 w_4 = x_2$ abtragen kann, um auf den in w_3 und w_4 errichteten Senkrechten die Ordinaten $y_1 = w_3 p_3$ und $y_2 = w_4 p_4$ abzumessen. Die Tangente $i_3 p_4$, von der aus die Punkte p_5 und D' bestimmt werden, erhält man in derselben Weise wie $i_1 p_2$ und

Fig. 27.

alle folgenden eben so. Es versteht sich von selbst, dass, wenn der Winkel α nach Gleichung (66) bestimmt und die Absteckung stets nach einer Richtung fortgesetzt wurde, der n^{te} Curvenpunkt mit dem Scheitel (S) und der $(2n)^{te}$ mit dem zweiten Berührungspunkte D' zusammentreffen muss. Besser ist es jedoch, wenn man nur den halben Bogen von D aus, die andere Hälfte aber von D' aus vornimmt und zusieht, ob beide Curvenzweige durch den vorher bestimmten Scheitel gehen, ohne sich daselbst zu schneiden.

β) Es sei für den Punkt p_1 in Fig. 27 nach den Gleichungen (66) bis (69):

der Winkel $D C p_1 = \alpha = \dfrac{180^0 - \varphi}{2n}$,

der Bogen $D p_1 = l = 0{,}01745 \; \alpha \; r$,

die Abscisse $D w_1 = x_1 = r \sin \alpha$,

die Ordinate $p_1 w_1 = y_1 = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha$.

Zieht man die Sehne $D p_1$ über den Kreis hinaus, macht $p_1 p_2 = D p_1$, so ist der Winkel $w_2 p_1 p_2 = \alpha$; verlängert man $p_1 p_2$ und macht $p_2 p_3$

$= p_1 p_2 = D p_1$, so wird auch der Winkel $w_3 p_2 p_3 = \alpha$ u. s. f. Würde man die Sehnen $p_1 p_2 = p_2 p_3 = p_3 p_4 \ldots = s$ kennen, so hätte man die

$$\text{Abscissen } p_1 w_2 = p_2 w_3 = p_3 w_4 \ldots = \xi = s \cos \alpha,$$
$$\text{Ordinaten } p_2 w_2 = p_3 w_3 = p_4 w_4 \ldots = \eta = s \sin \alpha,$$

und es liessen sich folglich die Punkte p_2, p_3, p_4 mit Hilfe dieser Coordinaten leicht abstecken. Nun ist aber die Sehne

$$s = 2r \sin {}^1/_2\, \alpha$$

und wenn man α in Bogenmass ausdrückt und die Sinusreihe bis zur dritten Potenz anwendet:

$$\sin {}^1/_2\, \alpha = \sin \left(\frac{l}{2r}\right) = \frac{l}{2r} - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{2r}\right)^3;$$

folglich, nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$s = l\left(1 - \frac{1}{24}\frac{l^2}{r^2}\right) \qquad (72)$$

Bedenkt man, dass das Verhältniss von l zu r bei Strassencurven höchstens $^1/_7$, bei Eisenbahncurven höchstens $^1/_{20}$ und manchmal sogar $^1/_{100}$ beträgt, so sieht man ein, dass in allen Fällen $s = l$ gesetzt werden darf, da hierdurch die Werthe von ξ und η im ungünstigsten Falle um $^1/_{1000}$ zu gross werden.

Unter dieser Annahme wird die

$$\text{Abscisse } \xi = s \cos \alpha = l \cos \alpha$$
$$\text{Ordinate } \eta = s \sin \alpha = l \sin \alpha. \qquad (73)$$

Werden diese Coordinatenwerthe berechnet, so besteht die Absteckung bloss darin, dass man auf der verlängerten Sehne $D p_1$ die Abscisse $\xi = p_1 w_2$ abmisst, in w_2 eine Senkrechte $w_2 p_2 = \eta$ errichtet, hierauf die Sehne $p_1 p_2$ um das Stück $p_2 w_3 = \xi$ verlängert, die Senkrechte $w_3 p_3 = \eta$ macht, und so fortfährt, bis man entweder im Scheitel des Bogens oder am zweiten Berührungspunkte D' angekommen ist.

2) Abstecken der Curven durch Polarcoordinaten.

Stellt die Linie DE in Fig. 28 die eine Tangente des abzusteckenden Kreisbogens DD' und D den Berührungspunkt beider vor; denkt man sich ferner den Bogen in die gleichen Theile $D p_1$, $p_1 p_2$, $p_2 p_3$ u. s. w. getheilt und die Sehnen $D p_1$, $D p_2$, $D p_3 \ldots$ gezogen: so erscheinen letztere als Fahrstrahlen (Radienvectoren), welche in dem Pole D mit der Axe DE beziehlich die Winkel $T D p_1 = \beta$, $T D p_2 = 2\beta$, $T D p_3 = 3\beta$ u. s. w. bilden. Kann man nun diese Winkel nacheinander an die Tangente DT antragen und die Längen $D p_1$, $D p_2$, $D p_3 \ldots$ der Fahrstrahlen bestimmen, so wird dadurch die Curve DD' abgesteckt, und zwar mittels Polarcoordinaten.

Ist aber wieder wie früher der Winkel φ und der Halbmesser r des abzusteckenden Kreises gegeben, so wird, wenn man den ganzen Bogen DD' in 2n gleiche Theile zerlegt, nach Gleichung (66) der Centriwinkel $D C p_1$ oder

$$\alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2n}.$$

und folglich der Winkel TDp_1, welcher halb so gross als α ist, d. i.

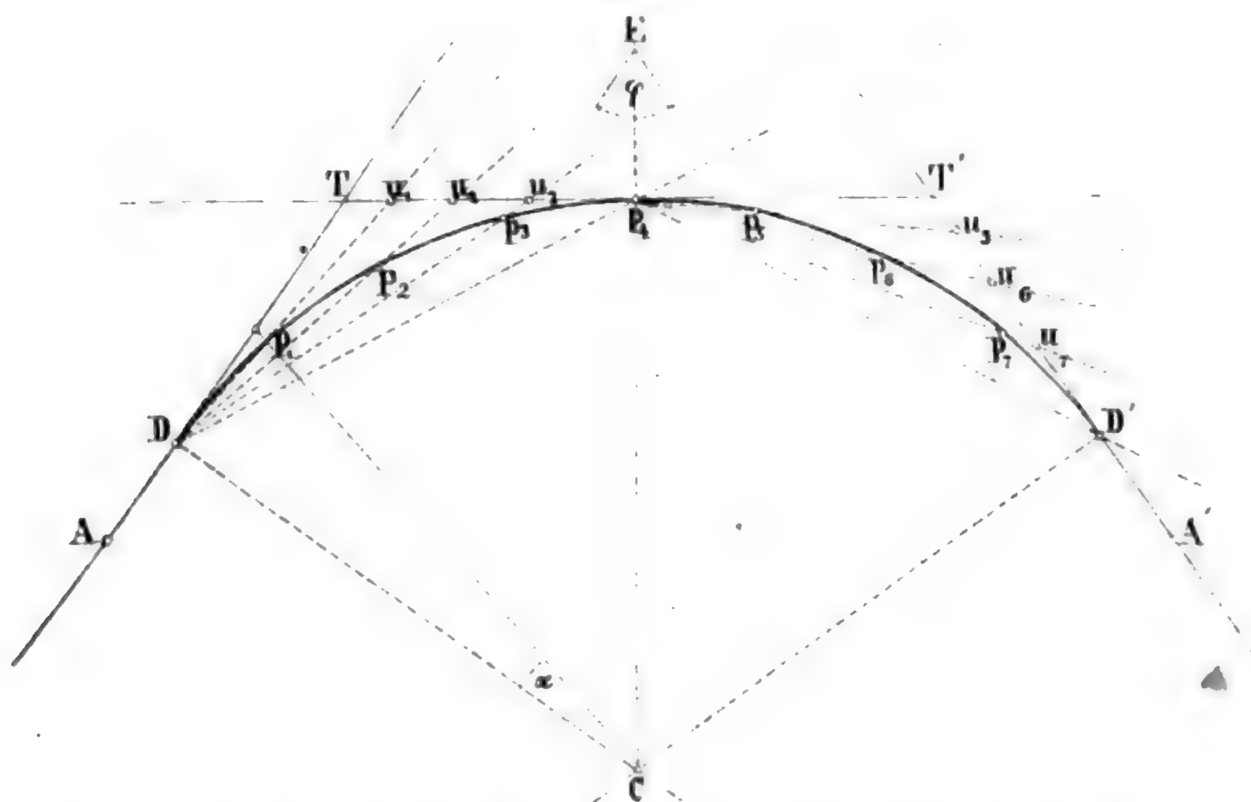
$$\beta = \frac{180^0 - \varphi}{4n}. \tag{74}$$

Die Länge jedes Bogenstücks (Dp_1, $p_1 p_2$, $p_2 p_3$...), welche gleich

$$l = 0{,}01745\, \alpha\, r$$

ist, kann nach der Bemerkung zur Gleichung (67) der Länge seiner Sehne gleich gesetzt werden, weil man dadurch nur einen für die Praxis verschwindenden Fehler begeht. Will man die Curvenpunkte p_1, p_2, p_3... auf dem Felde bestimmen, so stelle man in D einen Theodolithen centrisch und horizontal auf, stelle das Fernrohr genau in die Richtung DT ein und lese die beiden Nonien des Horizontalkreises ab. Addirt man hierauf zu diesen

Fig. 28.



Ablesungen den einfachen Winkel β und stellt die Nonien auf die neuen Ablesungen ein, so muss die Visirlinie in der Richtung Dp_1 liegen. Winkt man in dieser Richtung einen Stab ein und lässt in derselben die Länge l genau abmessen, so erhält man den Punkt p_1. Addirt man wieder den Winkel β zu den letzten Ablesungen und stellt die Nonien auf diese neuen Ablesungen ein, so hat man das Fernrohr gegen seine erste Stellung um 2β gedreht und es zeigt folglich jetzt die Richtung Dp_2 an. Um den Punkt p_2 zu erhalten, muss von p_1 aus die Länge l so abgemessen werden, dass der zweite Endpunkt p_2 derselben in der Richtung Dp_2 liegt, was am besten dadurch geschieht, dass man den Abstand der beiden Kettenstäbe der Messkette genau $= l$ macht und von D aus den zweiten Stab einvisirt, während der erste in p_1 steht. Der dritte, vierte, überhaupt jeder folgende Punkt wird genau so wie p_2 bestimmt. Ist richtig gearbeitet worden, so

muss man im Verfolge dieser Absteckung mit einem Punkte in dem Scheitel und einem in dem zweiten Berührungspunkte eintreffen.

Da es jedoch immer mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist, die Messkette kürzer oder länger zu machen, als sie von Anfang an ist, so thut man in dem vorliegenden Falle besser, den abzusteckenden Kreisbogen nicht in 2n gleiche Theile zu theilen, sondern von einem Berührungspunkte (D) aus fort und fort Bogenstücke von der Länge l, welche der Kettenlänge gleich ist, wenn der Krümmungshalbmesser mindestens 150 Meter beträgt, abzuschneiden, bis man am zweiten Berührungspunkte (D') ankommt, der nur zufällig mit einem der auf diesem Wege abgesteckten Punkte zusammentreffen wird, wie das auch mit dem Scheitel der Fall ist. Selbstverständlich kann man im Voraus berechnen, wie der Scheitel und der zweite Berührungspunkt gegen die nächsten Curvenpunkte liegen müssen.

Wir wollen zu dem Ende die Kettenlänge l' nennen; dann ist der Centriwinkel, welcher einem Bogen von der Länge l' entspricht:

$$\alpha' = 57^0{,}3 \frac{l'}{r} \tag{75}$$

und der Peripheriewinkel, der zu dem Bogen l' gehört:

$$\beta' = 28^0{,}65 \frac{l'}{r} \cdot \tag{76}$$

Da nun der ganze Kreisbogen D D' einen Mittelpunktswinkel

$$\gamma = 180^0 - \varphi$$

hat, so erhält man seine Länge

$$L = 0{,}01745\, \gamma\, r$$

und die Anzahl der zwischen D und D' abzuschneidenden Bogenstücke von der Länge l':

$$u = \frac{\gamma}{\alpha'} = \frac{L}{l'} \cdot$$

Versteht man unter ν die Ganzen und unter ε die Bruchtheile, aus denen die Zahl u besteht, so dass also $u = \nu + \varepsilon$ ist, so wird der letzte Curvenpunkt, den man auf die oben beschriebene Weise mit Hilfe der Werthe von l' und β' noch abstecken kann, von dem zweiten Berührungspunkte D' um einen Bogen $\lambda = \varepsilon\, l'$ abstehen, wenn richtig gearbeitet worden ist. Der Abstand λ' des Scheitels vom nächst vorhergehenden Curvenpunkte ergibt sich dadurch, dass man die Grössen γ', L', u', ν', ε', λ' gerade so auf den halben Bogen $D p_4 = D' p_4$ bezieht, wie vorher γ, L, u, ν, ε, λ auf den ganzen Bogen.

Die eben beschriebene Methode der Curvenabsteckung würde ein sehr günstiges, d. i. ein ebenes und völlig freies Terrain erfordern, wenn man sie mit einem einzigen Standpunkte des Instruments (in D) ausführen wollte. Dieser Standpunkt kann aber sehr leicht verlegt und dadurch das freie Terrain, dessen man bedarf, auf einen schmalen Raum beschränkt werden. Denn nimmt man an, dass die Absteckung bis zu dem Punkte p_4 gediehen ist und dass schon der Punkt p_5 nicht mehr einvisirt werden kann, so lässt

sich sicher das Instrument in p_4 aufstellen und nach D zurückvisiren. Dieses thut man auch, liest die Nonien ab und dreht die Alhidade um den Winkel $D p_4 T = p_4 D T = 4 \beta$ (oder $= 4 \beta'$), so dass die Visirlinie in die Richtung $p_4 T$ kommt, welche nun der neuen Tangente angehört. Schlägt man hierauf das Fernrohr durch, so kann man ausser dem Punkte T, der vorhin abgesteckt wurde, auch noch einen Punkt T' ausstecken, der in der Tangente liegt, und nun die Arbeit in derselben Weise fortsetzen, wie sie in D begonnen wurde. Liesse sich das Fernrohr des Theodolithen nicht durchschlagen, so müsste man es in seinem Lager umlegen, damit die Absehlinie den noch abzusteckenden Punkten zugewendet wird. Gienge aber beides nicht an, so müsste die Alhidade genau um 180° gedreht werden, wodurch die Visirlinie, wenn das Instrument und die Arbeit fehlerfrei sind, wiederum in die Richtung $p_4 T'$ gebracht würde. Es versteht sich übrigens von selbst, dass zu den Ablesungen der Nonien, welche für die Visirlinie $p_4 T'$ gelten, zunächst wieder nur der einfache, dann der zwei-, drei-, vier- und fünffache Winkel β zu addiren ist, sowie dass, wenn die Absteckung in dem Punkte D' begonnen hätte und folglich von der Rechten gegen die Linke fortgeschritten wäre, die Vielfachen des Winkels β von den Ablesungen der Nonien des Horizontalkreises abzuziehen gewesen wären.

3) Vergleichung der vorhergehenden Methoden des Curvenabsteckens.

Ohne Zweifel verdient bei jeder Messung diejenige Methode den Vorzug, welche unter gegebenen Umständen am sichersten und einfachsten zu einer völlig genügenden Lösung der vorgelegten Aufgabe führt. Es ist daher, weil die äusseren Umstände sehr verschieden sein können, keine Methode als die absolut beste oder schlechteste zu bezeichnen, sondern es kann nur mit Bezug auf gleiche Localverhältnisse von besseren oder schlechteren Methoden die Rede sein.

Ist das Terrain fest und nicht sehr durchschnitten, so verdienen die unter Nr. 1, a und Nr. 1, b auseinander gesetzten Coordinaten-Methoden entschieden den Vorzug vor jeder anderen Methode, und zwar desshalb, weil die Absteckung eines jeden Curvenpunkts unabhängig von der eines anderen geschieht und daher der Fehler, welcher bei einem Punkte begangen wurde, sich nicht auf alle folgenden Punkte überträgt. Diese Unabhängigkeit der Curvenpunkte von einander kommt bei keiner anderen Methode vor. Denn bei der Methode 1, c, α (Seite 62) hängen die Punkte p_3 und p_4, obwohl sie durch Coordinaten abgesteckt werden, doch von dem Punkte p_2 ab, weil durch diesen die Tangente gelegt wird, auf die sich die Absteckung von p_3 und p_4 gründet; und was von p_3 und p_4 in Bezug auf p_2 gilt, lässt sich auch von p_5 und p_6 in Bezug auf p_4, von p_7 und p_8 in Bezug auf p_6 u. s. w. sagen. Bei der auf Seite 63 unter Nr. 1, c, β dargestellten Methode springt die Abhängigkeit jedes folgenden Punkts von dem vorhergehenden von selbst in die Augen, und auch bei der auf Polarcoordinaten gegründeten Methode (Seite 64) erkennt man diese Abhängigkeit leicht, da jeder folgende Punkt von dem vorhergehenden aus abgeschnitten wird.

Wenn aber eine Curve entweder auf einem hohen Damme, oder in einem tiefen Einschnitte, oder in einem stark abfallenden, oder von vielen Bäumen, Häusern und dergleichen besetzten Terrain abzustecken ist, so verursacht das Abmessen der Coordinaten nach Nr. 1, a und Nr. 1, b nicht bloss sehr viele Mühe, sondern auch eine Unsicherheit wegen der schiefen Flächen, auf denen horizontale Entfernungen zu bestimmen sind. In solchen Fällen ist es daher besser, sich einer unter Nr. 1, c erklärten Methode oder des in Nr. 2 beschriebenen Verfahrens zu bedienen. Namentlich ist das letztere zu empfehlen, das sich, wenn man ein gutes Winkelmessinstrument besitzt, nicht nur leicht, sondern auch mit hinreichender Genauigkeit, selbst unter schwierigen Terrainverhältnissen, ausführen lässt.

§. 37. **Aufgabe. Es sind die beiden Tangenten und Berührungspunkte einer Parabel von bekanntem Parameter gegeben: man soll den zwischen jenen Punkten liegenden Parabelbogen ausstecken.**

Es wird in allen Fällen genügen, wenn man die vorliegende Aufgabe mit Hilfe eines rechtwinkligen Coordinatensystems löst und dabei folgende Axen annimmt: für die Bogenstücke zu beiden Seiten des Scheitels die Ordinatenaxe YY' und für die Curvenzweige an den Berührungspunkten die beiden Tangenten DE und D'E der Parabel. Sind in Fig. 29 die Berührungspunkte D, D', der Scheitel S und die Axenschnittpunkte Y, Y' nach §. 34 und 35 bestimmt, so handelt es sich zunächst um die Berechnung des Coordinaten der Bogenstücke Sp_8 und S8, welche mit Hilfe der Axe YY' abgesteckt werden sollen. Da aber beide Bögen einander gleich sind, so wird fortan nur von einer Hälfte der abzusteckenden Parabel die Rede sein.

Für den Bogen Sp_8 und die Axen SX, SY ist die Gleichung der Parabel $y^2 = 2rx$, woraus man für irgend einen Punkt p die Abscisse

$$x = \frac{y^2}{2r} \tag{77}$$

erhält. Die Ordinaten $y_1, y_2, y_3 \cdots y_8$ der Punkte $p_1, p_2, p_3 \cdots p_8$ werden so angenommen, dass ihre Unterschiede $y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2 \cdots y_8 - y_7$ einander gleich und so gross werden, wie es der kleinste Krümmungshalbmesser (r) der Parabel erfordert und die Coordinatentabelle Nr. XVI für Kreisbögen andeutet. Die Absteckung der berechneten Coordinatenwerthe geschieht selbstverständlich gerade so wie bei Kreisbögen.

Für den Curvenzweig Dp_8 und die Axen DE, DN kann man entweder eine neue Gleichung der Parabel entwickeln, oder aber auf folgende Weise die Formeln zur Berechnung der Coordinaten herstellen.

Heissen die Abscissen der Punkte $p_8, p_9, p_{10}, p_{11} \ldots$ nach einander $\xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11} \ldots$ und die zugehörigen Ordinaten $\eta_8, \eta_9, \eta_{10}, \eta_{11} \ldots$, so ist für p_8:

$$\eta_8 = w_8 p_8 = n_8 p_8 \cos \tfrac{1}{2}\varphi \text{ und}$$
$$\xi_8 = w_8 D = n_8 D + n_8 p_8 \sin \tfrac{1}{2}\varphi.$$

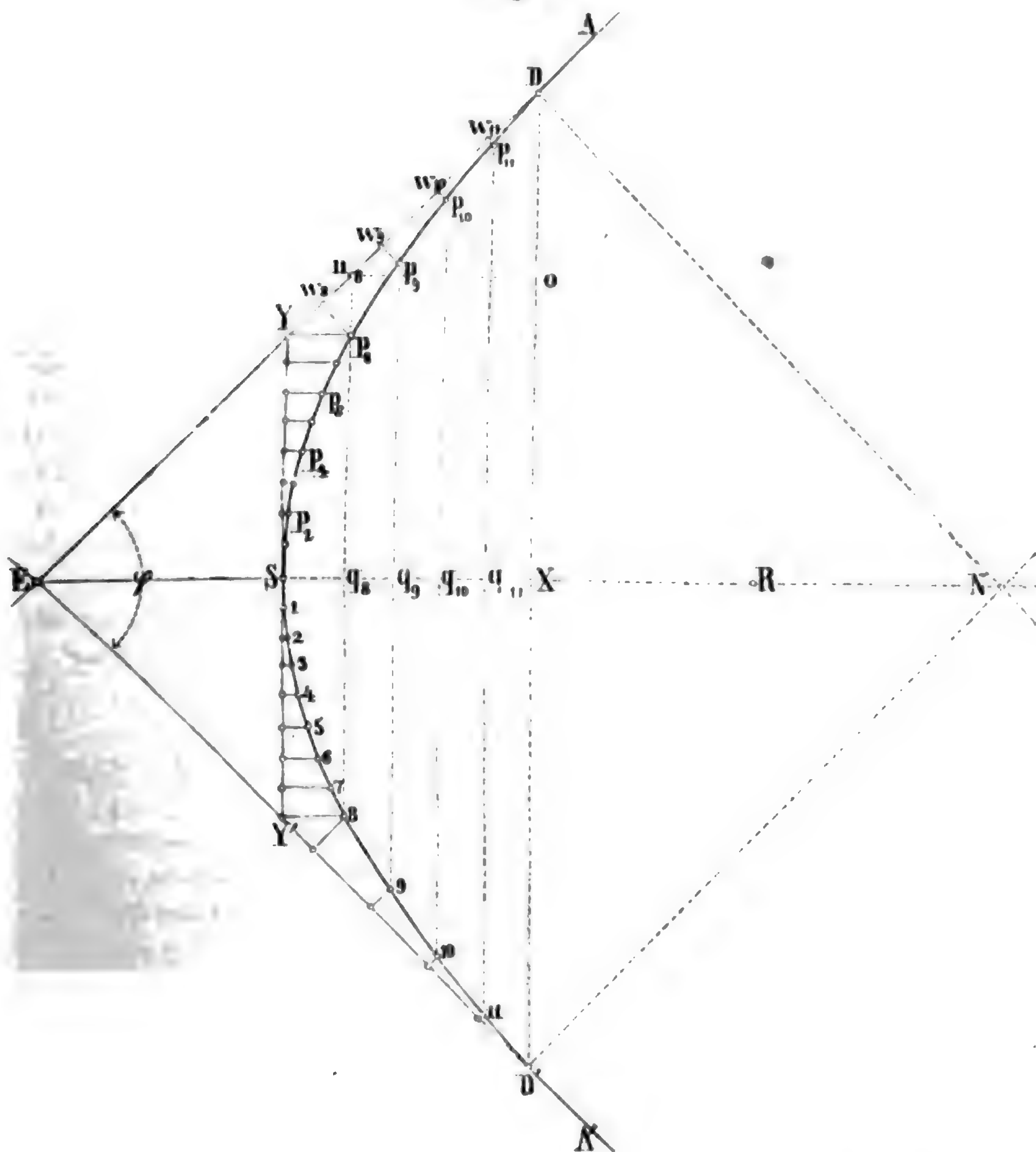
Um die Linie $n_8 D$ auszudrücken, denke man sich $n_8 o$ parallel zu SX gezogen und, wie früher geschehen, die Abscisse von D oder SX = c,

gesetzt, so ist $n_8\, o = q_8\, X = c' - x_8 = n_8\, D \cos {}^1/_2\, \varphi$, und hieraus die gesuchte Länge von

$$n_8\, D = \frac{c' - x_8}{\cos {}^1/_2\, \varphi} = \varepsilon_8 \tag{78}$$

Eben so leicht ist $n_8\, p_8$ zu finden; denn da $n_8\, p_8 = n_8\, q_8 - p_8\, q_8 = n_8\, q_8 - y_8$ und aus den beiden ähnlichen Dreiecken ESY und $E q_8\, n_8$, in

Fig. 29.



welchen $ES = c'$, $SY = d'$ bekannt und $E q_8 = c' + x_8$ ist, $n_8\, q_8$ sich ergibt, so erhält man nach einer einfachen Rechnung:

$$n_8\, p_8 = d' \left(1 + \frac{x_8}{c'}\right) - y_8 = \delta_8 \tag{79}$$

Setzt man die Werthe von δ_8 und ε_8 in die Ausdrücke für η_8 und ξ_8, so gehen dieselben über in

$$\left.\begin{aligned} \eta_8 &= \delta_8 \cos {}^1\!/_2\, \varphi \text{ und} \\ \xi_8 &= \varepsilon_8 + \delta_8 \sin {}^1\!/_2\, \varphi \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Um η und ξ zu berechnen, wird man demnach zuerst für beliebige Werthe von x die zugehörigen Werthe von δ und ε herstellen und diese in die voranstehenden Ausdrücke einsetzen. Man hat es dadurch zwar nicht in seiner Gewalt, die Abscissenunterschiede $\xi_8 - \xi_9$, $\xi_9 - \xi_{10}$ u. s w. einander gleich zu machen; es ist aber dafür um so leichter, die Coordinaten irgend eines aus der Gleichung $y^2 = 2rx$ bestimmten Punkts der Parabel für die Axen DE und DN anzugeben.

Beträgt z. B. der kleinste Krümmungshalbmesser (r) am Scheitel einer Parabel 960′ und der Winkel (φ), den die beiden Tangenten DE, D′E bilden, 124° 28′, so sind zur Absteckung dieser Curve, deren Gleichung

$$y^2 = (2 \cdot 960)\, x = 1920\, x$$

ist, folgende Rechnungen nöthig.

Die Entfernung der Berührungspunkte D und D′ vom Schnittpunkte E erhält man nach Gleichung (57) gleich

$$a' = \frac{r \cot {}^1\!/_2\, \varphi}{\sin {}^1\!/_2\, \varphi} = \frac{960 \cot 62^0\, 14'}{\sin 62^0\, 14'} = 571',2;$$

der Abstand des Scheitels S vom Punkte E ist nach Gleichung (62) gleich

$$c' = {}^1\!/_2\, r \cot^2 {}^1\!/_2\, \varphi = 133',06$$

und das Axenstück SY = SY′ nach Gleichung (63) gleich

$$d' = c \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, \varphi = 252',72.$$

Lässt man die auf SY gezählten Ordinaten von 30 zu 30′ wachsen, so erhält man nach Gleichung (77) für den Punkt

p_1	die Ordinate	$y_1 =$ 30′	und die	Abscisse	$x_1 =$	0,468
p_2	„ „	$y_2 =$ 60′	„ „	„	$x_2 =$	1,880
p_3	„ „	$y_3 =$ 90′	„ „	„	$x_3 =$	4,218
⋮		⋮				⋮
p_8	„ „	$y_8 =$ 240′	„ „	„	$x_8 =$	30,000.

Wenn von dem Punkte p_8 an die Absteckung von der Tangente DE aus geschieht, so kann man jetzt die auf der Axe SX gemessenen Abscissen wieder von 30 zu 30 Fuss wechseln lassen, so dass $Sq_8 = x_8 = 30'$; $Sq_9 = x_9 = 60'$; $Sq_{10} = x_{10} = 90'$; $Sq_{11} = x_{11} = 120'$ und $SX = x_{12} = c' = 133',06$ wird. Setzt man diese Werthe von x nach und nach in die Gleichung $y^2 = 2rx$, so erhält man die zugehörigen Ordinaten $y_8 = 240'$; $y_9 = 339',41$; $y_{10} = 415',69$; $y_{11} = 480',00$; $y_{12} = DX = 505',44$; und mit Benützung dieser Coordinatenwerthe findet man aus Gleichung (79):

$$\begin{aligned} \delta_8 &= 252,72 + 1,9\, x_8 - y_8 = 69',72; \\ \delta_9 &= 252,72 + 1,9\, x_9 - y_9 = 27',31; \\ \delta_{10} &= 252,72 + 1,9\, x_{10} - y_{10} = 8',02; \\ \delta_{11} &= 252,72 + 1,9\, x_{11} - y_{11} = 0',72; \\ \delta_{12} &= 252,72 + 1,9\, c' - y_{12} = 0,00; \end{aligned}$$

und aus der Gleichung (78):

$$\varepsilon_8 = 2{,}1465\,(c' - x_8) = 221',22;$$
$$\varepsilon_9 = 2{,}1465\,(c' - x_9) = 156',81;$$
$$\varepsilon_{10} = 2{,}1465\,(c' - x_{10}) = 92',43;$$
$$\varepsilon_{11} = 2{,}1465\,(c' - x_{11}) = 28',03;$$
$$\varepsilon_{12} = 2{,}1465\,(c' - x_{12}) = 0{,}00.$$

Nunmehr ergeben sich die gesuchten Coordinaten der Punkte p_8 bis p_{12} nach Gleichung (79) sehr einfach, nämlich

für p_8 die Abscisse $\xi_8 = 282',90$ und die Ordinate $\eta_8 = 32',48$ [1]
" p_9 " " $\xi_9 = 180',86$ " " " $\eta_9 = 12',72$
" p_{10} " " $\xi_{10} = 99',40$ " " " $\eta_{10} = 3',74$
" p_{11} " " $\xi_{11} = 28',54$ " " " $\eta_{11} = 0',33$
" p_{12} " " $\xi_{12} = 0{,}00$ " " " $\eta_{12} = 0{,}00$.

Werden die Abscissenunterschiede $\xi_8 - \xi_9$, $\xi_9 - \xi_{10}$ zu gross, um die Curve genau abstecken zu können, so darf man selbstverständlich nur die auf den Hauptdurchmesser SX bezogenen Abscissen (x) um weniger als 30 Fuss, welche wir hier angenommen haben, wachsen lassen.

Soll schliesslich noch der Krümmungshalbmesser (R) der Parabel in dem Berührungspunkte D bestimmt werden, so dient dazu die bekannte Gleichung

$$R = \frac{n^3}{(1/2\,p)^2} = \frac{n^3}{r^2}, \tag{81}$$

in welcher n die Normale (DN) des Berührungspunkts und r den halben Parameter bezeichnet. Drückt man die Normale durch die Subnormale (welche constant und $= 1/2\,p = r$ ist) und den Winkel $1/2\,\varphi$ aus, so wird $n \sin 1/2\,\varphi = r$ und demzufolge

$$R = \frac{r}{\sin^3 1/2\,\varphi} = 1385',7 \tag{82}$$

Man kann die Formel, welche zur Berechnung der Coordinaten ξ, η dienen, auch so einrichten, dass sie von den Coordinatenwerthen x, y unabhängig werden, was die in Gleichung (80) dargestellten Ausdrücke nicht sind.

Zu dem Ende ist es nöthig, die Gleichung der Parabel für die rechtwinkligen Axen DE, DN zu entwickeln und daraus die zu gegebenen Werthen von ξ gehörigen Werthe von η zu suchen.

Es sei die Gleichung der in Fig. 30 dargestellten Parabel für die Axen SX und SY:

$$y^2 = 2\,r\,x,$$

und für irgend einen Punkt des Parabelbogens SD die Abscisse $Sq = x$ und die Ordinate $pq = y$. Will man diese Gleichung auf die rechtwinkligen Coordinatenaxen DX' und DX, welche beziehlich SX und SY parallel sind, beziehen, so hat man nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn für die neuen Axen die Abscisse des Punkts $p = Dn = x_1$ und die Ordinate $pn = y_1$ ist,

[1] Da der Punkt p_8 schon durch die auf die Axe SY bezogenen Coordinaten x_8, y_8 bestimmt ist, so dienen die auf DE bezogenen Werthe von ξ_8 und η_8 bloss zur Controle der Rechnung und Messung.

$$x = c' - x_1 \text{ und } y = h - y_1$$

zu setzen, wobei c' die Abscisse und h die Ordinate der neuen Axenecke D in Bezug auf die alten Axen vorstellt.

Durch diese Substitution und mit Rücksicht darauf, dass $h^2 = 2rc'$ ist, erhält man für die Axen DX' und DX die Parabelgleichung:

$$x' = -\frac{1}{2r} y_1{}^2 + \frac{h}{r} y_1. \tag{83}$$

Fig. 30.

Soll diese Gleichung auf die rechtwinkligen Axen DE und DN, welche mit den zweiten zwar den Anfang gemein haben, aber einen Winkel X'DE $= \frac{1}{2}\varphi$ bilden, übergetragen werden, so ist, wenn die Abscisse $Dw = \xi$ und die Ordinate $wp = \eta$ gesetzt wird:

$$x' = \xi \cos \tfrac{1}{2}\varphi - \eta \sin \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$y' = \xi \sin \tfrac{1}{2}\varphi + \eta \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

zu nehmen, und η oder ξ aus der Gleichung (80) zu entwickeln. Thut man diess, so wird, nach Vornahme der möglichen Vereinfachungen und wenn man $\sin \frac{1}{2}\varphi = s$ und $\cos \frac{1}{2}\varphi = c$ setzt:

$$\eta = \frac{r - c\,s^2\,\xi \pm \sqrt{r\,(r - 2\,c\,s^2\,\xi)}}{c^2\,s}.$$

Da für $\xi = o$ auch $\eta = o$ sein muss, so folgt daraus, dass für unseren Zweck nur das untere Vorzeichen der Wurzel passt. Setzt man noch

$$\frac{r}{s\,c^2} = u, \quad \frac{2\,c\,s^2}{r} = v \text{ und } \frac{s}{c} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = t,$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$\eta = u\,(1 - \sqrt{1 - v\,\xi}) - t\,\xi; \tag{84}$$

woraus man zu jeder Abscisse ξ die zugehörige Ordinate η findet.

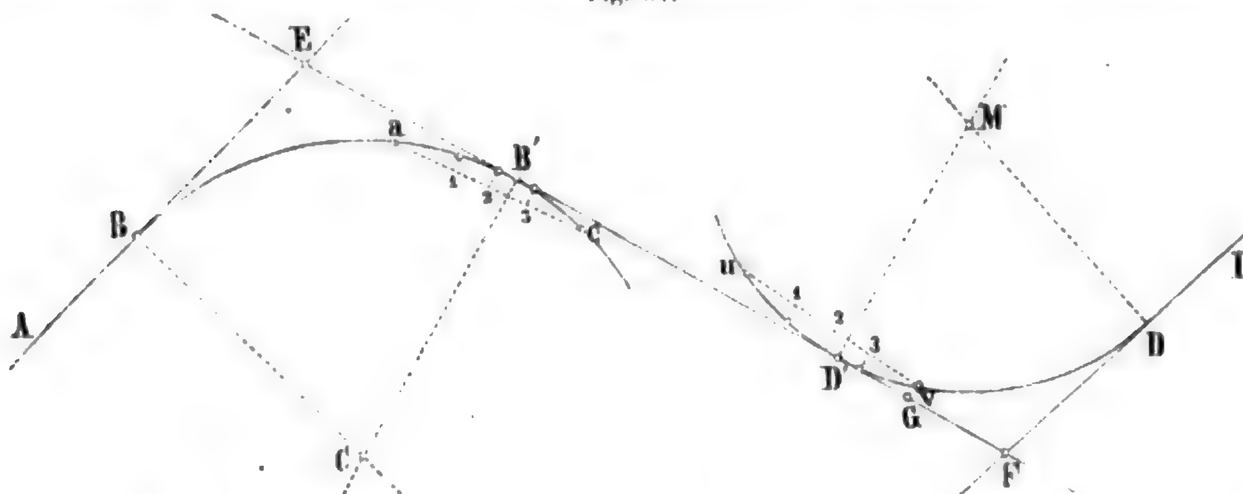
§. 38. **Aufgabe. Es sind auf dem Felde zwei Kreisbögen von bekannten Halbmessern abgesteckt: man soll die gemeinschaftliche Tangente derselben bestimmen.**

Diese Aufgabe kann auf verschiedene Weisen gelöst werden, und es ist die Verschiedenheit der Lösungen theils durch das Terrain, theils durch die Hilfsmittel der Messung, theils durch den Grad der Genauigkeit, den man erreichen will, bedingt.

1) Liegen die abgesteckten Bögen, oder wenigstens die Theile derselben, welche die gesuchten Berührungspunkte enthalten, auf ziemlich ebenem Boden, so reicht nach unseren Erfahrungen das folgende Verfahren, das sich durch seine Unmittelbarkeit und Kürze empfiehlt, völlig aus.

Man mache nämlich, wie in Fig. 31, an denjenigen Stellen der abgesteckten Bögen, welche die Berührungspunkte muthmasslich enthalten

Fig. 31.



werden, alle Curvenpunkte durch Absteckstäbe sichtbar; stelle sich hierauf an einer der gegebenen Curven (DD') in einem Punkte auf, der sicher ausserhalb der gesuchten Tangente B'D' liegt, und bewege sich daselbst so lange seitwärts, bis man in eine Linie kommt, welche durch die als äusserste erscheinenden zwei Pfähle der beiden Bögen bestimmt wird. Diese Linie ist entweder schon die gesuchte Tangente, oder weicht doch in keinem Falle viel davon ab. Um sich Gewissheit zu verschaffen, ob man die richtige Linie getroffen habe, oder ob die gefundene noch zu verbessern sei, stecke man jetzt in den beiden Kreisbögen zu beiden Seiten der vorläufig erhaltenen Berührungspunkte noch einige nahe an einander gelegene Curvenpunkte ab und wiederhole mit diesen neuen Punkten das oben beschriebene Verfahren.[1] Die äussersten Stäbe in beiden Curvenästen bezeichnen jetzt mit hinreichender Genauigkeit die gesuchte Tangente (B'D').

Will man eine andere Prüfung dieser Absteckung vornehmen, so verlängere man die gefundene Linie B'D', bis sie die gegebenen Tangenten AB, ID in den Punkten E und F schneidet, messe alsdann die Längen BE, DF und sehe zu, ob B'E = BE und D'F = DF ist. Finden kleine Unter-

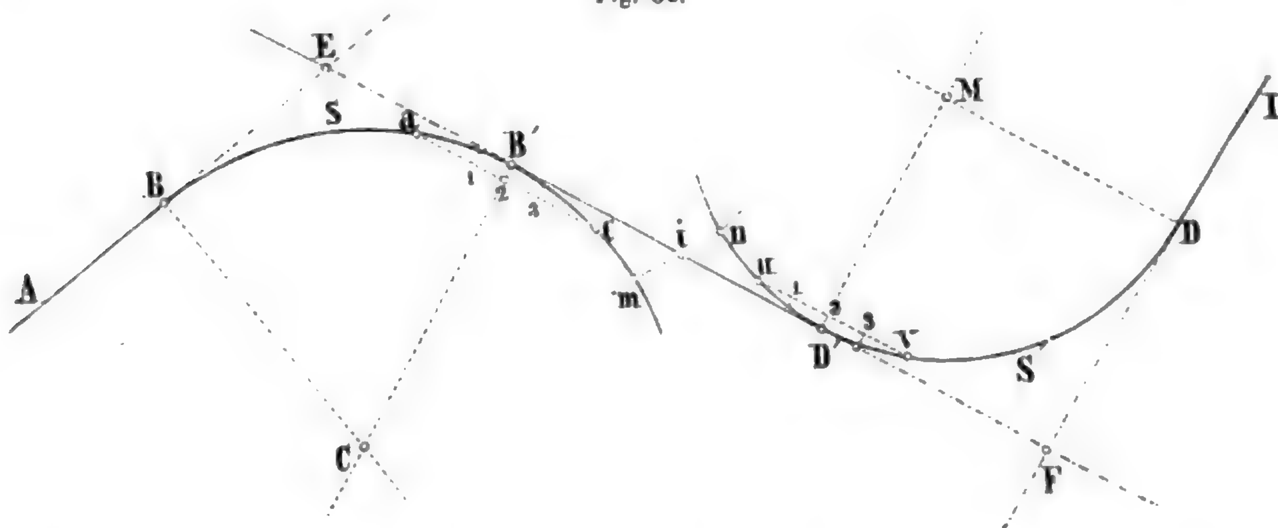
[1] Zur Absteckung nahe gelegener Curvenpunkte kann man die im Anhange unter Nr. XVII mitgetheilte und daselbst erklärte Hilfstabelle gebrauchen.

schiede in diesen Längen statt, so ist es wohl erlaubt, dieselben durch Verrückung der Berührungspunkte B', D' auszugleichen, vorausgesetzt, dass man vorher die Linie B' D' mit aller Sorgfalt abgesteckt hat.

2) Liegen die abgesteckten Bogenstücke, welche durch eine gemeinschaftliche Tangente verbunden werden sollen, so getrennt, dass man beide zugleich nicht übersehen kann, so kann man sich mit Vortheil des Prismenkreuzes bedienen, um die gesuchte Berührungslinie herzustellen.

Nehmen wir an, zwischen den Bogenstücken B' S und D' S' (Fig. 32) liege ein Hügel, der sich in der Richtung CM erstreckt, so kann man auf demselben eine Stelle m aussuchen, welche gestattet, die bei B' und D' wie vorhin aufgestellten Stäbe zu überschauen. Geht man nun mit dem

Fig. 32.



Prismenkreuze gegen n hin vorwärts, bis man an einen Punkt i gelangt, in welchem sich die Bilder der äussersten Stäbe in den beiden Gläsern des Prismenkreuzes decken, so ist i ein Punkt der gesuchten Tangente, vorausgesetzt, dass B' und D' wirklich die äussersten Punkte der Bögen S B' und S' D' sind.

Ob diese Voraussetzung gegründet ist, erfährt man dadurch, dass man links und rechts von B' und D' mehrere nahe an einander liegende Curvenpunkte aussteckt, sich abermals in i mit dem Prismenkreuze aufstellt und zusieht, ob dort wieder dieselben zwei Stäbe wie vorhin als die äussersten erscheinen. Sind es zwei andere, so geben diese mit dem neuen Standpunkte, der sehr nahe an i liegen wird, die gesuchte Tangente.

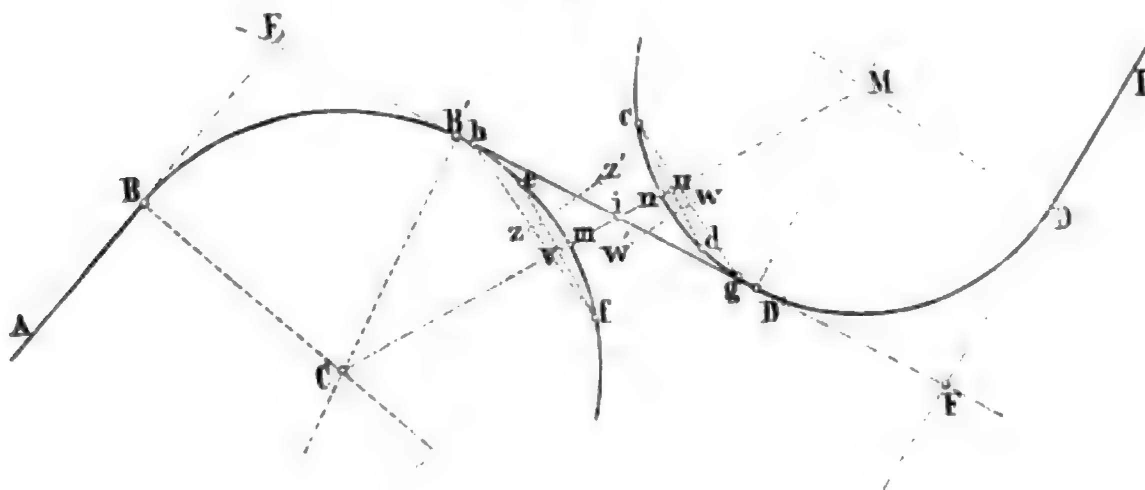
Verlängert man dieselbe bis an die beiden anderen schon gegebenen Tangenten AB und ID, so kann man sich wie in Nr. 1 von dem Grade der Genauigkeit, womit die Tangente EF gefunden wurde, überzeugen und nöthigenfalls noch eine kleine Verbesserung in der Lage der Berührungspunkte und des Punkts bei i eintreten lassen.

3) Ein von dem vorigen verschiedenes Verfahren, das wir ebenfalls oft und mit Erfolg angewendet haben, gründet sich auf folgende Betrachtung über die Lage der gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreisbögen.

Stellt in Fig. 33 die Linie CM die Centrale der beiden Kreisbögen

und B'D' die gesuchte Tangente vor, so schneiden sich beide in einem Punkte i, der zwischen den Punkten m und n liegt, die den kürzesten Abstand der beiden Bögen von einander bezeichnen. Könnte man sich die Linie mn verschaffen, so wäre es leicht, den Punkt i abzustecken, da sich seine Entfernung von m oder n leicht berechnen lässt. Hätte man aber i, so dürfte man von dort aus nur eine Gerade iB' nach dem äussersten Punkte B' des Bogens BB' und eine zweite Gerade iD' nach dem äussersten Punkte D' des Bogens DD' ziehen, um die verlangte Tangente zu erhalten. Die Controle der Absteckung wäre dadurch gegeben, dass man die Länge iB' und iD' aus bekannten Daten berechnete und zusähe, ob diese berechneten Entfernungen mit den wirklichen übereinstimmen oder nicht.

Fig 33.



Die Richtung der Centralen lässt sich auf dem Felde nicht aus den Mittelpunkten C und M bestimmen, da diese gar nie abgesteckt werden; aber das Stück mn, welches nöthig ist, kann man entweder dadurch finden, dass man die Bogenlängen Dn und Bm berechnet und abmisst, oder, wenn dieses zu umständlich oder wegen der Terrainverhältnisse zu schwierig sein sollte, dadurch, dass man sich an der Stelle, wo die Punkte m und n muthmasslich liegen, zwei parallele Sehnen cd, ef aufsucht, deren Mittelpunkte u, v einer Linie angehören, welche zu beiden senkrecht steht. Diese Sehnen findet man leicht. Denn angenommen, man habe erst cg # hf gemacht und cg in w, hf in z halbirt, so zeigen die Senkrechten ww', zz' an, dass cg und fh die gesuchten Sehnen noch nicht sind, und dass die eine gegen c, die andere aber gegen f hin verschoben werden muss. Nach einigen Versuchen bringt man es leicht dahin, dass die in den Mittelpunkten (w, z) der Sehnen errichteten Senkrechten in eine Linie uv zusammenfallen. Von den Punkten u und v aus, wenn sie einmal gefunden sind, erhält man leicht n und m, da man aus den gegebenen Halbmessern R und r der Kreise DD' und BB' und aus der gemessenen Länge der Sehnen cd und ef leicht un und vm berechnen kann.

Da es nunmehr keine Schwierigkeit hat, die Linie mn aufzufinden, so brauchen wir nur das Stück mi = q derselben zu berechnen, um den Punkt i

abstecken zu können. Es ist aber, wenn man die Secante Ci mit p und die Centrale CM, deren Länge bekannt ist, mit c bezeichnet, wegen der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke CiB' und MiD':

$$p = \frac{cr}{R + r},$$

und da mi = Ci — Cm ist,

$$q = p - r.$$

Setzt man ferner die Länge der Tangente B'D' = t und das Stück iB' derselben, welches durch $\sqrt{p^2 - r^2}$ gegeben ist, gleich l, so findet man aus den vorhin genannten ähnlichen Dreiecken:

$$t = \frac{lr}{R + r}.$$

Treffen die von i aus gemessenen Längen l und t — l mit den durch Visiren gefundenen Punkten B' und D' zusammen, so kann man überzeugt sein, dass die abgesteckte Tangente die richtige ist, ausserdem werden diese Punkte ein wenig verrückt und zwar so, dass sie gleichzeitig die von i aus gemessenen Entfernungen l und t — l darstellen und in den zugehörigen Kreisbögen liegen. Es wird hierbei selten oder gar nie vorkommen, dass diese neuen Punkte merklich ausserhalb der vorhin abgesteckten Tangentenrichtung liegen; sollte es aber der Fall sein, so ändert sich hierdurch diese Richtung ein wenig ab, was als Verbesserung der ersten Absteckung anzusehen ist.

4) Will oder kann man keines der vorhergehenden Verfahren zur Absteckung der gesuchten Tangente anwenden, so mag man sich des folgenden bedienen, das, wenn es in Folge der Terrainverhältnisse ausführbar ist, sicher zum gewünschten Ziele führt.

Es seien wieder dieselben Stücke gegeben, welche wir bisher als bekannt angesehen haben, nämlich die Halbmesser R und r, die Länge der Centralen c und deren Neigungswinkel ω und ω' gegen die gegebenen Tangenten AB und ID. Denkt man sich, wie in Fig. 34, die gesuchte Tangente B'D' gezogen und bis an die gegebenen Tangenten verlängert, so ist der Schnittpunkt E von den Berührungspunkten B und B', der Schnittpunkt F aber von den Berührungspunkten D und D' gleich weit entfernt. Kann man nun die Winkel φ und φ' bestimmen, so lässt sich erstens EB' = EB und FD' = FD berechnen, zweitens der Punkt E von B aus und F von D aus abmessen, drittens an BE der Winkel φ und an DF der Winkel φ' antragen, und endlich viertens durch Abmessung der Länge EB' der Punkt B', so wie durch Abmessung von D'F der Punkt D' bestimmen, womit die Aufgabe gelöst ist. Um aber den Winkel φ zu finden, bedenke man, dass aus dem Vierecke BEB'C

$$\varphi = 180^0 - \alpha$$

und aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABC

$$\alpha = 90^0 + \omega - \gamma$$

folgt. Da sich der Winkel γ aus dem Dreiecke CiB' durch die Gleichung

$$\cos \gamma = \frac{r}{p} = \frac{R + r}{c}$$

ergibt, so erhält man den gesuchten Winkel

$$\varphi = 90^0 + \gamma - \omega.$$

In gleicher Weise findet man den Winkel

$$\varphi' = 90^0 + \gamma - \omega'.$$

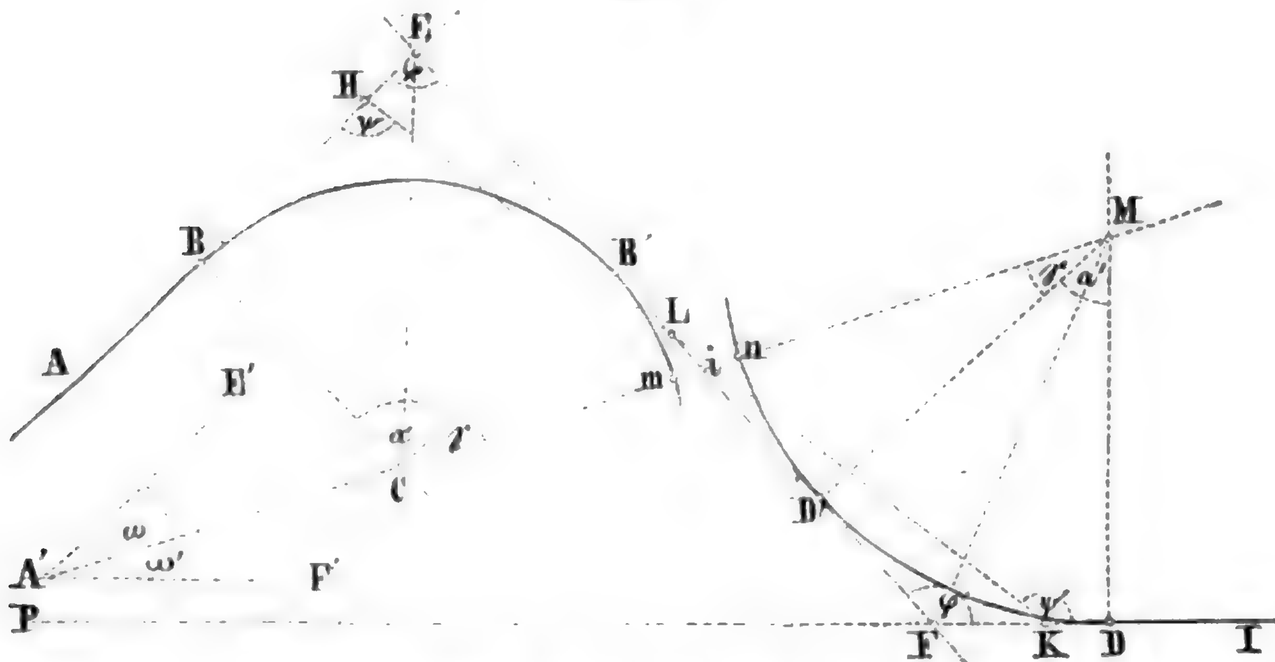
Es ist desshalb für den einen Bogen die Länge der Tangente

$$BE = B'E = r \cot {}^1\!/_2\, \varphi$$

und für den zweiten Bogen die Tangente

$$DF = D'F = R \cot {}^1\!/_2\, \varphi'.$$

Fig. 38.



Misst man diese Längen von B und D aus auf den zugehörigen Tangentenrichtungen ab, so erhält man die Schnittpunkte E und F; stellt man dann daselbst einen Theodolithen auf und macht damit den Winkel $BEB' = \varphi$, sowie den Winkel $DFD' = \varphi'$, so müssen die beiden Winkelschenkel EL und FL in eine Gerade zusammenfallen, welche die gesuchte Tangente ist und deren Berührungspunkte B' und D' erhalten werden, wenn man $EB' = EB$ und $FD' = FD$ macht.

Die Messung ist genügend geprüft, wenn man sich von dem Zusammenfallen der in E und F abgesteckten Richtungen EL und FL, sowie davon überzeugt hat, dass die wirkliche Entfernung der Punkte B'D' mit dem aus der Gleichung

$$t = (R + r) \operatorname{tg} \gamma$$

berechneten Abstande $B'D' = t$ übereinstimmt.

5) Legen sich der Ausführung des eben beschriebenen Verfahrens Schwierigkeiten in den Weg, indem etwa die Schnittpunkte E und F unzugänglich sind, oder indem von ihnen nach B' und D' hin keine Linie abgemessen werden kann, so stecke man die gesuchte Tangente dadurch ab, dass man zuerst eine beliebige Gerade herstellt, welche die beiden

gegebenen Tangenten in H und K schneidet; zweitens von diesen Schnittpunkten aus die Winkel ψ und ψ', welche die Gerade HK mit den Tangenten AB und ID bildet, sowie die Längen $HB = e$ und $KD = e'$ genau misst; drittens wie in der vorigen Nummer die Entfernungen $BE = r \cot {}^1/_2\, \varphi$ und $DF = R \cot {}^1/_2\, \varphi'$ bestimmt; viertens die Abstände

$$HE = BE - BH = r \cot {}^1/_2\, \varphi - e = i,$$
$$KF = DF - DK = R \cot {}^1/_2\, \varphi' - e' = i',$$

und aus den Dreiecken HLE und KLF die Seiten

$$HL = f = \frac{i \sin \varphi}{\sin (\psi - \varphi)};$$
$$KL = f' = \frac{i' \sin \varphi'}{\sin (\psi' - \varphi')}$$

berechnet; fünftens von H oder K aus den Punkt L durch directe Längenmessung bestimmt; und endlich dortselbst den Winkel

$$\delta = \psi - \varphi$$

sowohl an LH als LK anträgt. Hierdurch ist die Richtung der Tangente EF gegeben und es wird die Lage derselben sofort dadurch geprüft, dass man sich überzeugt, ob sie die äussersten Punkte B' und D' der beiden Kreisbögen BB' und DD' berührt oder nicht. Sollten die beiden Kreise von der Linie ELF geschnitten oder beide gar nicht getroffen werden, der hierdurch sich kundgebende Messungsfehler aber nur gering sein: so darf man nur den Winkel δ etwas grösser oder kleiner annehmen, um die gesuchte Richtung genauer zu erhalten.

Will man sich von der richtigen Lage der so erhaltenen Berührungspunkte weiter überzeugen, so berechne man ihre Abstände von L, messe dieselben auf der Geraden EF von dem Scheitelpunkte L aus ab und sehe zu, ob die eingemessenen Endpunkte B' und D' mit den durch Visiren erhaltenen zusammentreffen oder nicht. Die Entfernungen LB' und LD', welche man hierzu bedarf, findet man leicht, denn es ist

$$EL = \frac{f \sin \psi}{\sin \varphi},\quad FL = \frac{f' \sin \psi'}{\sin \varphi'}$$

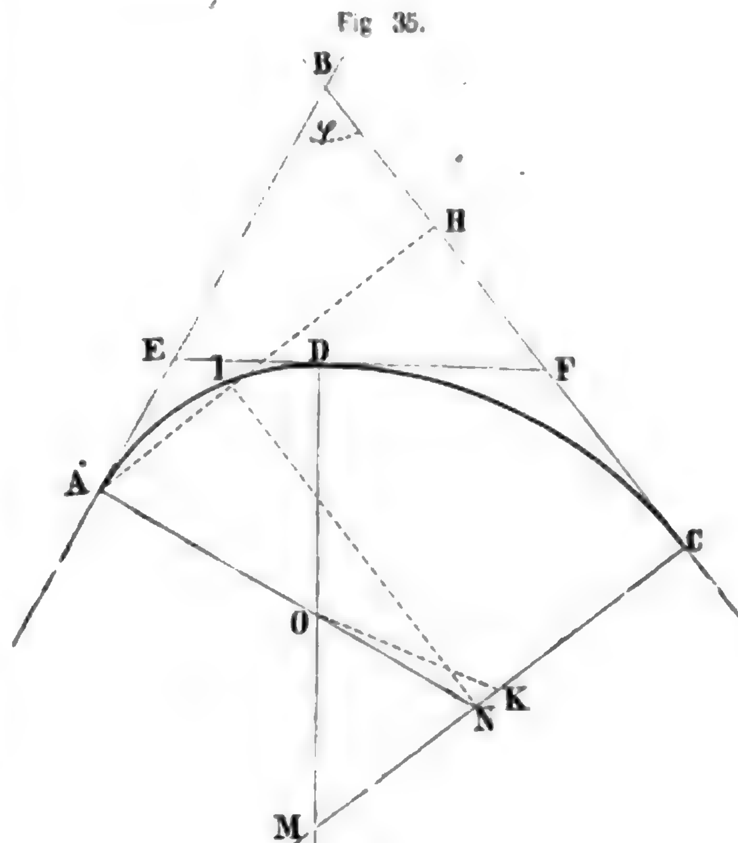
und folglich nach der Figur

$$LB' = EL - EB' = \frac{f \sin \psi}{\sin \varphi} - (e + i);$$
$$LD' = FL - FD' = \frac{f' \sin \psi'}{\sin \varphi'} - (e' + i')$$

Wir haben die vorstehenden Fälle nur für Kreisbögen durchgeführt; es wird aber einleuchten, dass sich die hier mitgetheilten Methoden, mit Ausnahme der dritten, auch auf Parabeln anwenden lassen, wenn man nur die vorkommenden Rechnungen entsprechend abändert.

§. 39. **Aufgabe. Zwei unter einem bekannten Winkel (φ) sich schneidende gerade Richtungen (AB, BC) durch zwei Kreisbögen (AD, DC) so zu verbinden, dass sie sich innerlich**

in einem noch unbestimmten Punkte (D) und die Geraden in gegebenen Punkten (A, C) berühren. (Fig. 35.)



Diese Aufgabe würde unendlich viele Lösungen zulassen, wenn nicht einer der Halbmesser gegeben wäre. Nimmt man aber $AO = r$ als gegeben an, so kann es sich nur mehr darum handeln, $CM = r_1$ und $AE = ED = t$, $CF = FD = t_1$ zu berechnen, um auf den eben genannten Tangenten die verlangten Kreisbögen von A, D und C, D aus mittels Coordinaten abzustecken.

Verlängert man den Halbmesser AO bis N und bezeichnet in dem Dreiecke MNO die Winkel bei M, N, O mit μ, φ, ω und die gegenüberliegenden Seiten mit m, n, o; zieht man ferner AH senkrecht und NI parallel zu BC, und setzt die bekannten Abstände $AB = a$, $BC = b$ und die unbekannte Seite $CN = p$, so finden folgende zwei Gleichungen statt:

$$a \cos \varphi + (r + m) \sin \varphi = b,$$
$$a \sin \varphi - (r + m) \cos \varphi = p,$$

von denen die erste sofort m, die zweite p liefert. Es ist somit in dem Dreiecke MON, da $MO = MD - OD = r_1 - r$ und $MN = r_1 - p$:

$$(r_1 - r)^2 = m^2 + (r_1 - p)^2 - 2m (r_1 - p) \cos \varphi,$$

woraus sich der gesuchte Halbmesser r_1 ergibt.

Mit dem Werthe von r_1 findet man den Winkel μ aus der Proportion: $\sin \mu : \sin \varphi = m : n = m : (r_1 - r)$ und den Winkel ω aus der Gleichung: $\omega = 180^0 - (\varphi + \mu)$; mit diesen Winkeln berechnet man

$$t = r \operatorname{tg} {}^1/_2\, \omega \quad \text{und} \quad t_1 = r_1 \operatorname{tg} {}^1/_2\, \mu,$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Wäre dieselbe bloss durch Zeichnung zu lösen gewesen, so würde man $CK = AO = r$ und Winkel $KOM = OKM$ gemacht und MO bis an den Kreis AD verlängert haben, wodurch sich der Berührungspunkt D und der Halbmesser $r_1 = MD = MC$ ergeben hätte, während die Tangentenabschnitte $AE = ED$ und $CF = FD$ einfach durch Construction einer in dem Punkte D auf den beiden Halbmessern MD, OD senkrecht stehenden Geraden EF erhalten worden wären.

4. Das Ausmessen gerader und krummer Linien.

Das Ausmessen oder die Bestimmung der Länge einer beliebigen Linie kann entweder mittelbar oder unmittelbar geschehen: mittelbar durch Anwendung der im vierten Abschnitte der ersten Abtheilung beschriebenen Längenmesser, und unmittelbar durch geeignete Messoperationen, welche auf Grund gemessener Linien und Winkel die gesuchte Länge durch Zeichnung oder Rechnung liefern. Die Ausführung der unmittelbaren Messungen mit Messstäben, Messlatten, Ketten und Distanzmessern ist bereits bei der Erklärung des Gebrauchs dieser Instrumente so weit erörtert worden, als es nöthig ist, sich in allen vorkommenden Fällen helfen zu können, wesshalb dieser Abtheilung der Längenmessungen nur noch beigefügt zu werden braucht, wie man mit Messstangen die Länge einer Grundlinie für ein Dreiecknetz, das einer grösseren Landesvermessung zu Grunde liegt, bestimmt. Dagegen müssen die mittelbaren Ausmessungen gerader und krummer Linien, von denen noch keine Rede war, hier vorzugsweise berücksichtigt werden.

§. 40. Aufgabe. Die beiden Endpunkte einer sehr langen geraden Linie, die über festes und ebenes Terrain führt, sind durch steinerne Signale dauerhaft bezeichnet: man soll diese Linie mit Messstangen ausmessen und auf den Horizont reduciren.

Zur Ausführung der hier verlangten Arbeit gehören folgende Verrichtungen:

1) das Abstecken von Zwischenpunkten der gegebenen Geraden;
2) die Herstellung entsprechender Unterlagen der Messstangen;
3) der Vollzug der unmittelbaren Messung der Linie, und
4) die Berechnung der Länge dieser Linie.

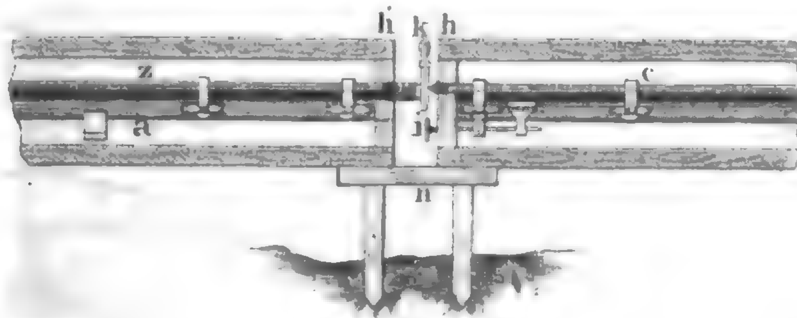
Zu 1. Das Abstecken der Zwischenpunkte, welches zum Zwecke hat, die Unterlagen der Messstangen und diese selbst genau in die Richtung der auszumessenden Geraden zu bringen, geschieht mit Hilfe eines Theodolithen, der centrisch und horizontal über dem einen Endpunkte aufgestellt und auf den anderen Endpunkt eingerichtet wird. Bewegt sich in Folge dieser Aufstellung die Absehlinie des Fernrohrs in der gegebenen Geraden, so ist es nach §. 29 leicht, einzelne Punkte derselben anzugeben.

Diese Punkte werden durch starke Pfähle bezeichnet, die man 1^m tief in den Boden schlagen, in entsprechender Höhe horizontal abschneiden und auf dem Kopfe mit Nägeln versehen lässt, welche genau in der Visirebene des Fernrohrs stehen. Man wird diese Pfähle nicht zu weit auseinander stellen, damit sich leicht von einem zum anderen eine Schnur ziehen lässt, welche die Mittellinie der Unterlagen und Messstangen bezeichnet. Da es auf langen Strecken schwer ist, die Signale in die Absehlinie einzuwinken, so kann man sich die Arbeit des Absteckens der Zwischenpunkte erleichtern, wenn man erst einige Hauptpunkte der ganzen Linie bestimmt und von diesen aus die Zwischenpunkte einrichtet.

Um die Aufstellung des Theodolithen auf den Hauptpunkten jederzeit schnell und sicher vornehmen zu können, ist es gut, drei Pfähle um dieselben im gleichseitigen Dreieck schlagen, horizontal abschneiden und mit Löchern versehen zu lassen, in welche die Fussspitzen des Stativs passen. Hierdurch bringt man nicht nur sofort die Alhidadenaxe des Theodolithen in die gegebene Gerade, sondern ist auch vor jeder Verrückung des Instruments sicher.

Zu 2. Die Unterlagen der Messstangen sind entweder fortlaufende Stege von starken Brettern, die an den Enden und in der Mitte unterstützt werden; oder besondere mit Gewichten beschwerte drei- oder vierbeinige Gestelle, die mit einer ebenen Fläche auf dem zugerichteten Boden ruhen; oder es sind vierbeinige Schragen, die man mit ihren Füssen in den Boden drückt und auf deren Rücken die Messstangen liegen; oder endlich es sind kleine Böcke, die (wie in Fig. 36) aus zwei etwa 10 cm starken und 1 m tief in den Boden gerammten Pfählen und einem Brettstücke (n) bestehen, das

Fig. 36.



horizontal darauf genagelt ist. Damit die Messstangen, deren hölzerne Kisten (h, h') auf die in der Figur angedeutete Weise über die Böcke zu liegen kommen, eine nahezu wagrechte Lage erhalten, müssen die Böcke (n, n) durch Nivelliren in Ebenen gebracht werden, welche entweder ganz oder nahehin horizontal sind. Hat nun das Terrain eine Steigung gegen den Horizont, welche die Herstellung einer einzigen Horizontalebene zwischen den gegebenen Endpunkten nicht gestattet, so dürfen allerdings die Böcke in mehreren Horizontalebenen liegen, wenn nur die Abstufungen so angebracht sind, dass man durch einen feinen Senkel den Endpunkt des vorhergehenden Massstabs zum Anfange des folgenden machen kann, wie dieses in Fig. 37 angedeutet ist. Was die Höhenlage der Ebene des ersten und letzten Stegs betrifft, so bestimmt sich diese durch die Höhenlage der Endpunkte der auszumessenden Linie in der Weise, dass es leicht möglich sein muss, die Kanten der Messstangen in die Lothlinien dieser Punkte einzustellen.

Zu 3. Nach diesen Vorbereitungen geschieht die Messung der Linie mit 4 Stangen von der Bessel'schen Construction in folgender Weise. Die Messstange Nr. 1 wird durch einen Senkel mit ihrer wagrechten Schneide genau auf den Anfangspunkt A eingestellt, und entweder mit Hilfe eines Theodolithen, der auf einem der in Nr. 1 genannten Hauptpunkte steht,

oder nach den geraden Linien, welche man vorher schon über die Böcke gezogen hat, in die gerade Linie A B gerichtet. Hierauf legt man die Stange Nr. 2 hinter Nr. 1 so, dass die wagrechte Schneide derselben der vorhergehenden lothrechten gegenüber und von dieser so weit absteht, dass der Abstand durch den geometrischen Keil gemessen werden kann. Auch diese Stange wird wie die erste und alle folgenden genau in die auszumessende gerade Linie eingerichtet. Sind alle vier Stangen aufgelegt, so schiebt man die Keile der Messstangen und Metallthermometer ein, stellt die Libellen wagrecht und liest an Nr. 1 ab: erstens die Angabe der Stellschraube an der Libelle, zweitens den Keil am Metallthermometer, und drittens den Keil zwischen den Stangen Nr. 1 und Nr. 2. Sind dieselben drei Ablesungen auch an der Stange Nr. 2 und am Keile zwischen Nr. 2 und Nr. 3 gemacht, so nimmt man die erste Stange weg und legt sie so an Nr. 4 an,

Fig. 37.

wie vorher Nr. 4 an Nr. 3. Hierauf folgt die Ablesung an Nr. 3 mit Wiederholung der Ablesung des Keils zwischen Nr. 2 und Nr. 3. Ist dieses geschehen, so wird die Stange Nr. 2 versetzt und so fortgefahren, wie angefangen wurde, wobei man darauf sieht, dass zur Zeit der Ablesung immer alle vier Stangen in der geraden Linie liegen.

Muss die Messung der Linie in Folge der Tageszeit oder aus anderen Ursachen unterbrochen werden, so ist es nöthig, den Endpunkt des abgemessenen Stücks mit aller Genauigkeit so zu versichern, dass sich an ihn die weitere Messung leicht wieder anknüpfen lässt.

Dieses geschieht dadurch, dass man mit Latten mehrere Messstangenlagen voraus abmisst, an dem so bestimmten Ruhepunkte einen starken Pfahl von Eichenholz fest in die Erde rammt und denselben der Bodenfläche gleich und wagrecht abschneidet. Auf diesem Pfahle wird eine Vorrichtung festgeschraubt, welche gestattet, eine mit einem kleinen Punkte versehene Metallplatte nach zwei sich senkrecht schneidenden Richtungen zu verschieben und, wenn sie die rechte Lage hat, festzustellen. Der Punkt dieser Platte wird in das Loth gebracht, welches von der Schneide der letzten Messstange herabhängt und aus einem ganz dünnen Silberdrahte und einem

genau abgedrehten Metallkegel besteht. Zum Schutze gegen den Luftzug wird dieses Loth mit einem Glascylinder umgeben, und während der Unterbrechung der Messung ist der Ruhepunkt mit einem hölzernen Kästchen und dieses mit Erde und Steinen bedeckt.

Die Fortsetzung der Messung beginnt mit Einrichtung derselben Stange, welche beim Schlusse die letzte war, in ihre frühere Lage, wobei der Senkel genau wieder einspielen muss. Es ist klar, dass auf diese Weise die Dicke des Silberfadens keinen Einfluss auf die Länge der Linie ausübt, so lange sich die Höhenlage des Stegs nicht ändert. Wird aber diese eine andere, so kommt die Dicke des genannten Fadens mit in Rechnung, weil in diesem Falle die Schneide des vorhergehenden unteren Stabs von der Schneide des folgenden höheren in horizontaler Richtung um die Dicke des Drahtes absteht. (Fig. 37.)

Die Länge der zu messenden Linie wird nie oder doch nur ganz zufällig so beschaffen sein, dass das Ende der letzten Messstange genau auf den zweiten Endpunkt (B) der Linie trifft; es wird desshalb auch die letzte Stange um mehr oder weniger von diesem Punkte abstehen, und dieser Abstand ist alsdann noch auszumitteln. Dazu dient entweder ein Pariser Fuss, wenn die Messstangen Vielfache der Toise sind, oder ein aliquoter Theil des Meters, wenn die Messstangen danach abgeglichen wurden, oder auch irgend ein genauer Massstab, welcher sich zwischen dem Endpunkte B der zu messenden Linie und der letzten Messstange auf einer horizontalen Ebene und in der vorgeschriebenen Richtung mit Hilfe von Metallplatten in der Weise abschieben lässt, wie wir dieses in der ersten Abtheilung beschrieben haben. Der Rest, welcher nach dem Abschieben noch bleibt, wird durch leicht zu erfindende Mittel auf einem feingetheilten Massstabe gemessen. Die Absenkelung am Schlusse einer Tagesarbeit und die Messung des Restes der Basis durch besondere kleine Massstäbe, wie sie eben beschrieben wurden, sind immer missliche Operationen: die eine wegen der Schwierigkeit, die Messstange, welche bei Fortsetzung der Basismessung am folgenden Tage die erste ist, so weit vorzuschieben, dass der Senkel s (Fig. 38) genau auf den am vorhergehenden Tage festgelegten Punkt o trifft; die andere wegen der Kosten feingetheilter kurzer Massstäbe und der Sorgfalt, welche das Abschieben derselben erfordert. Es dürfte desshalb folgendes bei der im August und September 1872 von den Professoren Bruhns, Nagel und Helmert durchgeführten Messung der Sächsischen Basis bei Grossenhain angewendete Verfahren, wodurch beide Schwierigkeiten umgangen werden, zu empfehlen sein. Man misst nämlich die Basis vorher ziemlich genau mit hölzernen Latten oder Ketten und legt die Endpunkte und selbst mehrere Zwischenpunkte durch Steine so fest, dass die ganze Länge und die Abtheilungen für sich nahezu Vielfache der Messstangen sind. Durch zweckmässige Regulirung der Abstände der einzelnen Messstangen, welche durch Keile gemessen werden, bringt man es immer dahin, dass der Senkel s' (Fig. 38, S. 84), mit welchem eine Tagesarbeit geschlossen wird, nahe

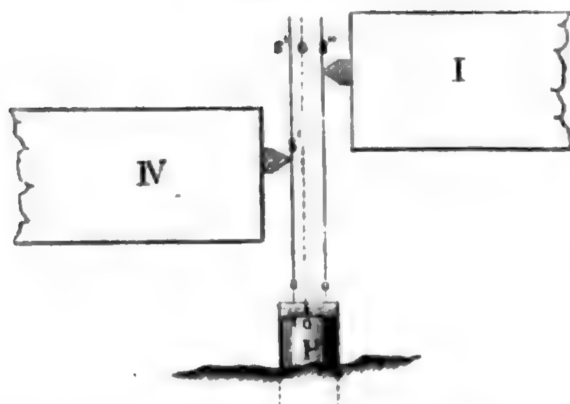


Fig. 38.

an den vorausbezeichneten Punkt o kommt, und ebenso kann man bei Fortsetzung der Arbeit durch Verschiebung der Messstange Nr. 1 den Senkel s'' nahe an o bringen. Die Abstände s'o = a' und s''o = a'' ergeben sich aber mit grosser Genauigkeit dadurch, dass man seitwärts der Basis in einer genau abgemessenen und zur Basis senkrechten Entfernung b (etwa 5^m) die Horizontalwinkel s'bo = φ' und s''bo = φ'' mit einem Theodolithen möglichst genau misst und aus diesen Daten $a' = b\varphi' \sin 1''$ und $a'' = b\varphi'' \sin 1''$ berechnet.[1]

Zu 4. Die Reduction der gemessenen Linie auf den Horizont erfordert, dass erstens alle Messstangenlängen für eine und dieselbe Temperatur, nämlich die Normaltemperatur des Urmasses ausgedrückt werden; dass man zweitens aus den Angaben der Libellenschrauben die Neigungswinkel der Stangen gegen den Horizont bestimmt; hiermit drittens die Länge (Reductionsgrösse) berechnet, welche von jeder Stangenlänge abzuziehen ist; und dass man endlich viertens alle reducirten Längen mit dem horizontalen Endstücke, das durch besondere Massstäbe gemessen wurde, so wie mit den Fadendicken des Senkels und mit den zwischen den Messstangen eingeschobenen Keildicken, mit Rücksicht auf die Vorzeichen in einer leicht zu entwerfenden Tabelle zusammenstellt.

Die Bessel'schen Messstangen sind so abgeglichen, dass, wenn man in den Ausdrücken für ihre Längen, welche in der ersten Abtheilung enthalten sind, und wonach

$$\begin{aligned}
\text{Stange Nr. } 1 &= 1728{,}8152 - 0{,}54033\, a_1 \\
\text{„ Nr. } 2 &= 1729{,}5153 - 0{,}55976\, a_2 \\
\text{„ Nr. } 3 &= 1729{,}0454 - 0{,}57575\, a_3 \\
\text{„ Nr. } 4 &= 1729{,}0909 - 0{,}58103\, a_4
\end{aligned}$$

ist, statt a_1, a_2, a_3, a_4 die beobachteten Keildicken am Metallthermometer in Linien einsetzt, die Längen dieser Stangen ebenfalls in Linien und für die Normaltemperatur der Toise erhalten werden. Wir können somit die Länge jeder Stange für diese Temperatur als bekannt ansehen, da wir alle Grössen zu ihrer Berechnung haben. Ist diese Länge = l, so ist nur zu zeigen, wie man sie reducirt.

Nennt man die Angabe der Stellschraube (m) an der Libelle für die horizontale Lage der Messstange h, und weiss man durch Versuche,

[1] Wer sich für weitere Einzelnheiten über Basismessungen interessirt, mag des Verfassers Beschreibung der Messung der drei Bayerischen Grundlinien in dem Werke des königl. bayerischen topographischen Bureaus »Die Bayerische Landesvermessung«, oder Professor Schwerd's Abhandlung über »Die kleine Speyerer Basis«, oder »Bessel's und Bayer's Gradmessung in Ostpreussen« oder endlich die »Sächsische Basismessung bei Grossenhain« von Bruhns, Nagel und Helmert nachlesen.

dass einer ganzen Umdrehung der Schraube der Neigungswinkel φ entspricht, so wird, da alle hier vorkommenden Winkel sehr klein sind, einer anderen Angabe u der Schraube ein Neigungswinkel

$$\psi = (u - h)\,\varphi \qquad (85)$$

entsprechen. Ob dieser Winkel ein Höhen- oder Tiefenwinkel ist, hat begreiflicherweise auf die Reduction gar keinen Einfluss und desshalb braucht auch sein Vorzeichen nicht beachtet zu werden.

Ist die Stange l unter dem Winkel ψ gegen den Horizont geneigt, so ist die Länge ihrer Horizontalprojection $l \cos \psi$ und folglich die Reductionsgrösse

$$v = l - l \cos \psi = 2 l \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi \qquad (86)$$

Wegen der Kleinheit des Winkels ψ kann man unbedenklich $\sin^2 \frac{1}{2} \psi = \frac{1}{4} \sin^2 \psi$ und daher

$$v = \tfrac{1}{2}\, l \sin^2 \psi \qquad (87)$$

setzen. Will man jedoch den Winkel ψ nicht erst besonders rechnen, so lässt er sich dadurch sofort in den Ausdruck für v bringen, dass man den Winkel φ durch die Erhebung l ausdrückt, um welche ein Stangenende über das andere käme, wenn die Messstange der Schraube m folgte und diese eine ganze Umdrehung machte.

Unter dieser Annahme ist

$$\sin \varphi = \frac{e}{l} \text{ und } \varphi = \frac{e}{l \sin 1''};$$

da aber auch

$$\sin \psi = \psi \sin 1'' = (u - h) \frac{e}{l}$$

ist, so wird, wenn man diesen Werth in die Gleichung (87) substituirt, weiter noch

$$v = \frac{e^2}{2l} (u - h)^2 \qquad (88)$$

An den Bessel'schen Messstangen war die Grösse e für die Stange Nr. 1 = 7,7505 Linien, für Nr. 2 = 7,598 Linien, für Nr. 3 = 7,768 Linien und für Nr. 4 = 7,957 Linien. Berücksichtigt man ferner, dass man für l den mittleren Werth setzen kann, welcher sich aus allen beobachteten Keildicken (a) am Metallthermometer ergibt, so ist für die Berechnung der Reductionsgrösse der Quotient $e^2 : 2l$ für jede Stange eine constante Grösse c und daher auch

$$\log v = \log c + 2 \log (u - h). \qquad (89)$$

Wie die Endergebnisse der Rechnung zusammenzustellen sind, bedarf keiner Erläuterung; nur die Bemerkung sei noch gestattet, dass man entweder jede einzelne Keildicke, welche den Abstand zweier Messstangen von einander bezeichnet, sofort zu l addirt und folglich auch mit reducirt; oder dass man diese Reduction weglässt und einfach nur die Summe aller Keildicken der Summe aller reducirten Massstablängen beifügt. Die auf den Horizont reducirte Länge der Linie A B stellt offenbar einen grössten Kreisbogen der Erdkugel vor, und es gehört zu demselben ein Halbmesser R,

welcher sich wie folgt ergibt. Bezeichnet nämlich r den Halbmesser der Erde bis zum Meeresspiegel, f die Höhe des Orts A und f' die Höhe des Orts B über der Meeresfläche, so ist offenbar $\frac{1}{2}(f + f')$ die mittlere Höhe der Linie AB über dem Meere und daher

$$R = r + \tfrac{1}{2}(f + f'). \quad (90)$$

Mit Hilfe dieses Halbmessers kann man den Kreisbogen zwischen A und B auch auf den Meereshorizont reduciren, wovon bei der Landesvermessung (Abschnitt II, D) die Rede ist.

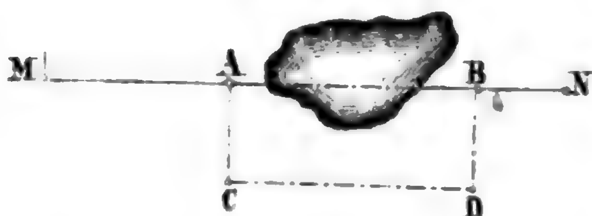
Ein Beispiel der Ausgleichung der Beobachtungsfehler, welche bei einer kleinen in zwei Abtheilungen ausgeführten Basismessung gemacht wurden, ist in §. 17, S. 21 dieses Bands mitgetheilt.

§. 41. **Aufgabe. Eine gerade Linie, deren Endpunkte fest bezeichnet sind, kann nicht unmittelbar gemessen werden: man soll ihre horizontale Länge mittelbar bestimmen.**

Die Lösung dieser Aufgabe wird nach den obwaltenden Umständen verschieden ausfallen.

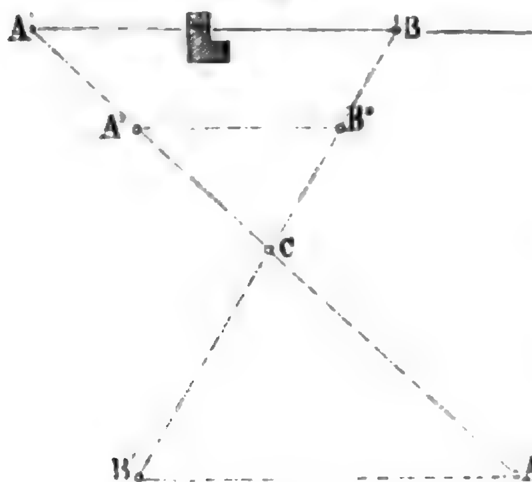
1) Die gegebene Linie AB sei nicht sehr lang, man kann sich in jedem Endpunkte aufstellen und von einem zum anderen sehen. (Fig. 39.)

Fig. 39.



In diesem Falle erhält man die gesuchte Länge am einfachsten, indem man in den Punkten A und B Senkrechte (AC, BD) zu AB absteckt, diese einander gleich macht und die dadurch erhaltene Linie CD, welche der gegebenen parallel und gleich ist, unmittelbar misst. Sollte die Absteckung einer Parallelen zu AB aus irgend welchen Ursachen unmöglich oder doch erschwert sein, so stelle man sich durch Annahme eines beliebigen Punkts C ein Dreieck ABC her, messe in demselben die Winkel bei A und B nebst einer der Seiten AC oder CB und berechne aus den gemessenen drei Stücken die gesuchte Seite AB.

Fig. 40.



2) Die nicht sehr lange gerade Linie AB sei zwar an ihren Endpunkten zugänglich, kann aber von ihnen aus nicht übersehen werden. Wählt man (Fig. 40) einen beliebigen Punkt C, der so liegt, dass von ihm aus nach A und B gesehen und gemessen werden kann, so bestimme man unmittelbar die Seiten CB = a, AC = b und den Winkel ACB = C des Dreiecks ABC und berechne daraus zuerst

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C,$$

hierauf die Winkel A und B selbst, und mit diesen die Seite

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Will oder muss man die Winkelmessung umgehen, so verlängere man die durch den Punkt C bestimmten Seiten AC und BC rückwärts so weit, dass A'C = AC und B'C = BC wird, und messe hierauf die Linie A'B', welche der AB gleich ist.

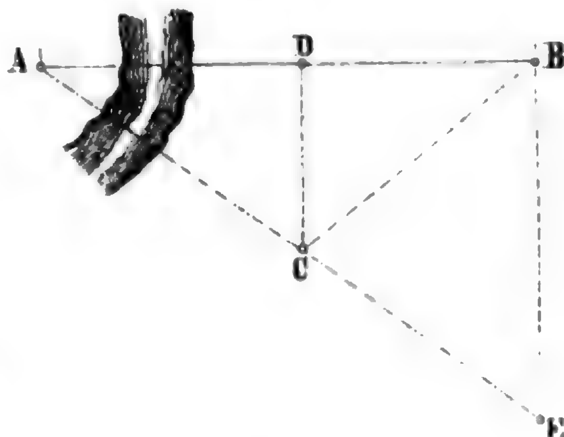
Sollte die Verlängerung der Seiten AC und BC nicht möglich sein, so halbire man entweder diese Seiten in A'' und B'', wodurch A''B'' = ½ AB wird, oder theile sie so, dass A''B'' der AB parallel läuft, messe A''B'' = c, BC = a, B''C = d und berechne die gesuchte Länge AB aus der Proportion, welche zwischen dieser und den gemessenen Grössen stattfindet.

3) Ein Endpunkt der Geraden AB sei unzugänglich, man kann ihn aber von dem zweiten Endpunkte aus sehen.

In diesem Falle nimmt man (nach Fig. 41) einen Punkt C beliebig, aber so an, dass man von ihm aus nach A und B sehen und nach B messen kann; misst die Länge der Linie BC = a und die Winkel ABC = B und BCA = C und berechnet hieraus die Seite

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Fig. 41.



Einfacher lässt sich die vorliegende Aufgabe dadurch lösen, dass man mit Hilfe des Prismenkreuzes einen Punkt C sucht, der mit A und B einen rechten Winkel ACB bildet, hierauf eine Senkrechte CD auf AB errichtet, BC = a, BD = e misst und AB aus der Gleichung

$$AB = \frac{a^2}{e}$$

berechnet.

Ausserdem kann man in B und D zwei Senkrechte zu AB errichten und diese durch eine Gerade AE abschneiden, BE = m, DC = n, BD = p messen und aus einer leicht zu bildenden Proportion die unbekannte Seite

$$AB = \frac{mp}{m - n}$$

bestimmen. (Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Linien BE und DC bloss desshalb senkrecht zu AB genommen wurden, weil dieses der kürzeste Weg ist, sie parallel zu machen; denn nur das Gleichlaufen dieser Linien ist hier nothwendig.)

4) Es sei wieder ein Punkt A der Geraden AB unzugänglich, und von B aus kann man nicht nach A sehen.

Man nehme einen Punkt C so an, dass man nach A und B visiren

und nach B messen kann; errichte auf BC eine Senkrechte AD, welche durch den Punkt A geht, messe BC = a, CD = d und den Winkel BCA = C, berechne zunächst die Seite

$$AC = b = \frac{d}{\cos C},$$

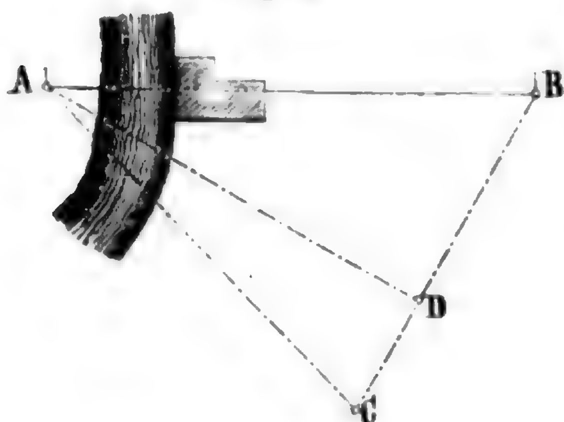


Fig. 42.

hierauf nach der in Nr. 2 dieses Paragraphen angewendeten trigonometrischen Formel die Winkeldifferenz A — B, mit dieser und der bekannten Winkelsumme A + B die Winkel A und B selbst, schliesslich aber

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Sollten sich der Herstellung der Senkrechten AD Schwierigkeiten in den Weg legen, so kann man die Linie AD, so wie sie das Terrain erlaubt, zuerst annehmen, dann eine durch B gehende Senkrechte auf AD fällen, und diese so weit verlängern, bis man an einen Punkt C kommt, von dem aus A und B sichtbar sind und BC unmittelbar gemessen werden kann.

5) Die gegebene Linie AB sei ganz und gar unzugänglich, aber das sie umgebende Terrain gestatte alle erforderlichen Messoperationen.

Hätte man zur Lösung dieser Aufgabe keine anderen Hilfsmittel als Absteckstäbe, Kette und Winkelspiegel oder Prismenkreuz, so nehme man eine beliebige Gerade DE an, errichte zu ihr die beiden Senkrechten AD und BE, halbire den Abstand DE ihrer Fusspunkte in C, suche die Durchschnitte von AD, BC und von BE, AC in F und G auf und messe schliesslich die Linie FG, so ist die Aufgabe gelöst; denn es ist FG = AB, weil, dem Aufbaue der Figur gemäss, das Dreieck FCG das Dreieck ABC deckt.

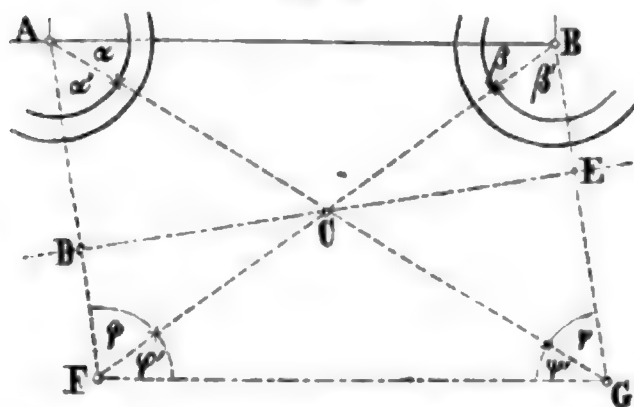


Fig. 43.

Besitzt man einen Theodolithen, Spiegelsextanten oder Spiegelkreis, so kann man von zwei Standpunkten F und G aus die Winkel AFB = φ, BFG = φ' und AGF = ψ', BGA = ψ, sowie die horizontale Entfernung dieser Standpunkte FG = g messen; mit diesen Grössen aus dem Dreiecke AFG die Seiten

$$AF = b, \; AG = c$$

und aus dem Dreiecke BFG die Seiten

$$BF = d, \; BG = e$$

berechnen, und schliesslich die gesuchte Länge AB aus den Dreiecken ABF

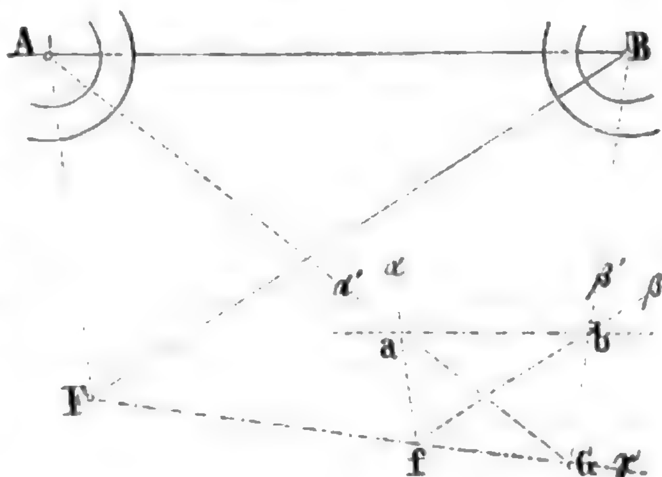
und ABG, in welchen je zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, bestimmen. Die vier Werthe, welche sich für AB ergeben, nämlich:

$$AB = \frac{b \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{d \sin \varphi}{\sin (\alpha + \alpha')} = \frac{e \sin \psi}{\sin \alpha} = \frac{c \sin \psi}{\sin (\beta + \beta')}$$

liefern zugleich eine Controle der Messung und Berechnung. Bei nur geringen Abweichungen dieser Werthe kann man das Mittel aus allen für AB nehmen.

Will man zur Bestimmung von AB den Messtisch anwenden, so stelle man denselben in einem beliebigen Punkte F, der nach A, B, G zu visiren und nach G zu messen gestattet, horizontal auf, projicire mit der Lothgabel den Punkt F in f auf das Messtischblatt, visire nach einander die Punkte A, B, G an und ziehe die entsprechenden Visirlinien $f\alpha$, $f\beta$, $f\gamma$. Hierauf messe man die Länge FG auf dem Felde, trage sie verjüngt = fg auf der Linie $f\gamma$ von f aus ab und versetze nun den Messtisch so nach G, dass g lothrecht über G und γf in die Visirebene GF kommt, während das Tischblatt selbst horizontal ist. Visirt man nun nach A und zieht die Linie $g\alpha'$, so erhält man den Schnittpunkt a, und wenn von g nach B visirt und die Linie $g\beta'$ gezogen wird, so ergibt sich der Schnitt b. Hiermit ist aber das Viereck abgf hergestellt, welches dem ABGF ähnlich ist und die Länge der Seite AB liefert, wenn man ab mit demselben Massstabe misst, nach welchem fg abgetragen wurde.

Fig. 44.



Dass die Genauigkeit dieses Verfahrens geringer ist als die des vorigen, bedarf wohl keiner weiteren Erörterung.

6) Die zu messende Gerade AB sei sehr lang, und es befinden sich zwischen den Endpunkten mehrere Hindernisse, welche das Visiren und eine unmittelbare Messung in der Richtung AB unmöglich machen.

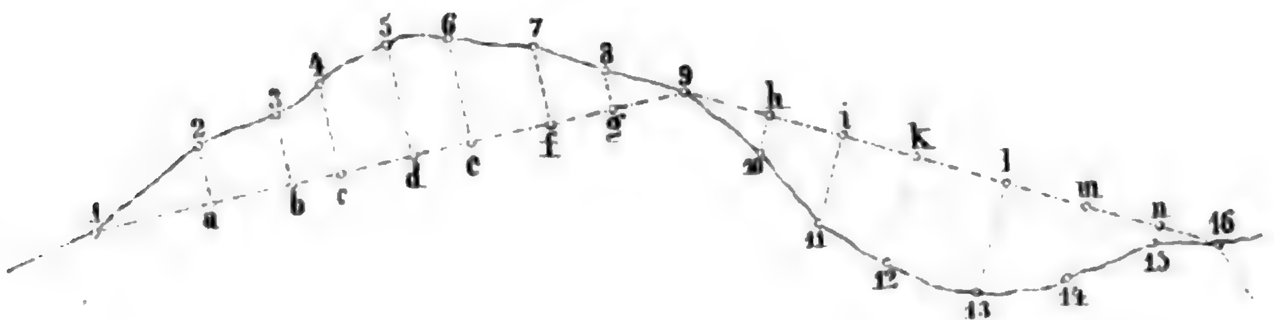
In diesem Falle muss die Linie AB nach einer der in §. 29, Nr. 1 bis 3, angegebenen Methoden abgesteckt werden. Diese Methoden sind aber alle so beschaffen, dass sie nicht bloss die Entfernungen der Zwischenpunkte der Linie AB von gewissen Hilfslinien, sondern auch die Entfernungen dieser Punkte unter einander durch Rechnung finden lassen. Man braucht also nur die für die Absteckung gemessenen Grössen nach Anleitung der zugehörigen Figuren richtig zu verbinden, um die gesuchte Länge AB durch Rechnung zu erhalten. Da aber diese Rechnungen weiter Nichts als die Lösung einfacher trigonometrischer Aufgaben erfordern, so überlassen wir sie lediglich dem eigenen Nachdenken des Lesers.

§. 42. **Aufgabe. Irgend eine krumme Linie ist auf dem Felde gegeben: man soll dieselbe aufnehmen und ausmessen.**

Da eine krumme Linie fortwährend ihre Richtung ändert, so leuchtet von selbst ein, dass sie im Allgemeinen nicht so genau als eine gerade Linie aufgenommen und ausgemessen werden kann. Denn diese Aufnahme und Ausmessung ist nur dadurch möglich, dass man an die Stelle der Curve eine gebrochene Linie setzt, welche mit jener so nahe als möglich zusammenfällt. Diese gebrochene Linie allein wird aufgenommen und ihrer horizontalen Länge nach bestimmt.

Ist die aufzunehmende Linie nicht bereits abgesteckt, wie es bei regelmässigen Curven für Eisenbahnen oder Strassen der Fall ist, so bezeichne man die aufzunehmenden Punkte 1, 2, 3, 4.... durch numerirte Markpflöcke, welche so weit auseinander stehen, dass die dadurch entstehende gebrochene Linie der vorhin ausgesprochenen Bedingung möglichst genügt. Hierauf lege man in die krummlinige Figur zwei oder mehr unter sich zusammenhängende gerade Linien (wie z. B. in Fig. 45 die Geraden 1,9

Fig. 45.



und 9,16) so, dass sie von den aufzunehmenden Punkten nicht zu weit abliegen, und dass sich auf ihnen mit der Messkette oder mit Messstäben leicht messen lässt. Ist dieses geschehen, so mache man einen Handriss von der ganzen Figur und bestimme die gegenseitige Lage der Hilfslinien (1,9 und 9,16) durch Messung ihrer horizontalen Längen und der Winkel (1,9,16), welche sie mit einander bilden. Schliesslich suche man mit dem neuen Prismenkreuze oder dem fünfseitigen Winkelprisma (Bd. I, §. 113) die Fusspunkte a, b, c, d, e... der senkrechten Ordinaten der Punkte 2, 3, 4, 5, 6.., messe die Abscissen 1a, 1b, 1c, 1d.., schreibe die gefundenen Längen in dem Handrisse bei a, b, c, d, e... ein, messe alsdann auch die Ordinaten und trage ihre Längen ebenfalls in die Zeichnung deutlich über.

Mit diesen Grössen kann man die krumme Linie 1, 2, 3, 4, 5... 16 annähernd zeichnen und aus der Zeichnung lässt sich ihre Länge entweder abmessen oder berechnen, wenn man es nicht vorzieht, diese Längenbestimmung auf dem Felde unmittelbar zu machen, indem man die Sehnen 1—2, 2—3, 3—4, 4—5, 5—6... misst und addirt.

B. Messung der Winkel und Dreiecke.

§. 43. Die gegenwärtige Abtheilung hat sich in Bezug auf Winkel nur mehr mit den mittelbaren Bestimmungen derselben und mit dem Einflusse der regelmässigen Beobachtungsfehler auf unmittelbare Winkelmessungen, in Bezug auf Dreiecke aber mit deren Aufnahme durch den Theodolithen und den Messtisch, mit der Ausgleichung der gemessenen Dreieckswinkel, mit den Folgen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler und mit der Bestimmung derjenigen Gestalt der Dreiecke zu beschäftigen, welche diesen Fehlern den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Stücke eines Dreiecks gestattet. Die Anlage und Berechnung der Dreiecksnetze für grössere Terrainaufnahmen wird in dem Capitel über Landesvermessungen erörtert werden.

1. Mittelbare Winkelmessungen.

§. 44. Aufgabe. Die Grösse eines Horizontalwinkels, dessen Scheitel unzugänglich ist, durch Messungen in der Nähe dieses Scheitels zu bestimmen.

Diese Aufgabe kommt bei der Anlage von Dreiecksnetzen öfters vor und ist den Geometern unter der kürzeren Bezeichnung: „einen Winkel zu centriren,“ bekannt. Ist nämlich in den Figuren 46 bis 49 der zu messende Winkel durch ABC vorgestellt und kann derselbe nicht in C gemessen werden, so wählt man hierzu einen um C herum liegenden Punkt D, misst den Winkel ADB nebst einigen Hilfsgrössen und berechnet daraus den Winkel ACB. Den Inbegriff dieser Arbeiten nennt man das Centriren des Winkels ADB auf den Scheitel C.

Dieses Centriren fordert, dass die Längen der Winkelschenkel $AC = b$ und $BC = a$, die Seite $CD = e$ und die Winkel $ADB = \psi$ und $CDA = \varphi$ bekannt seien. Bei einer Triangulirung kennt man aber immer die Seiten a und b aus den anstossenden Dreiecken, und die Winkel φ und ψ können unmittelbar gemessen werden, da man den Standpunkt D so wählen wird, dass man ungehindert nach A, B, C visiren kann. Dagegen lässt sich die Grösse der Excentricität e nur selten unmittelbar bestimmen; wesshalb sie in den meisten Fällen mittelbar dadurch gefunden wird, dass man in einem Hilfsdreiecke CDE eine Seite DE nebst den zwei anliegenden Winkeln sehr genau misst und hieraus $CD = e$ berechnet.

Da der Punkt D um C herum jede beliebige Lage haben kann, so wird sich der Ausdruck für den gesuchten Winkel $ACB = C$ je nach der Lage von D verschieden gestalten, wenn man jedem der in die Rechnung eintretenden Winkel einen positiven Werth beilegt; setzt man dagegen fest, dass der Winkel ADB stets mit $+\psi$, der Winkel ADC stets mit $+\varphi$, der Winkel CAD aber mit $\pm\alpha$ und CBD mit $\pm\beta$ bezeichnet werde, je nachdem der Schenkel DA und beziehungsweise DB rechts oder links von CA und beziehlich von CB liegt: so fallen die Ausdrücke für C, wie man

aus den beigedruckten Figuren leicht selbst finden wird, in den einen zusammen:

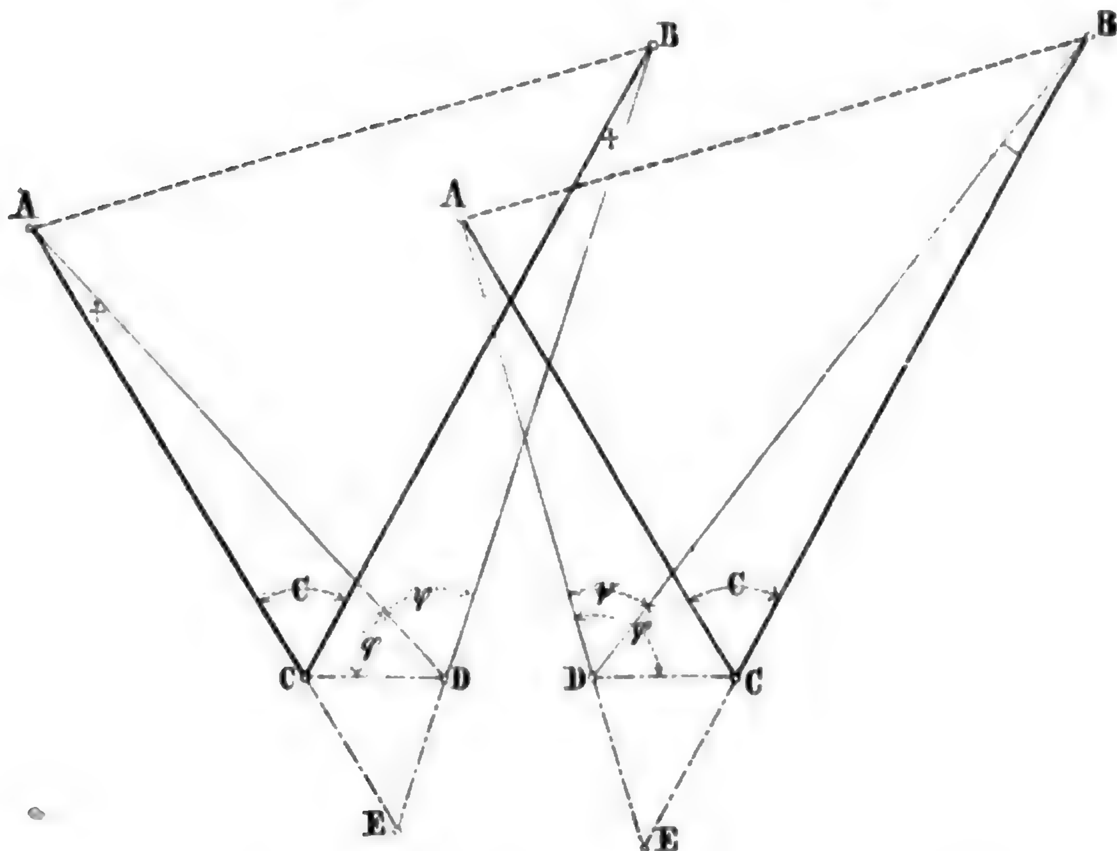
$$C = \psi + \beta - \alpha. \tag{91}$$

Man braucht daher auch nur diesen einzigen Ausdruck zu berücksichtigen. Nun ist aber nach Fig. 46:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \sin \varphi,$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \sin (\varphi + \psi);$$

Fig. 46. Fig. 47.



folglich, weil α und β immer nur sehr kleine Winkel sind, auch

$$\alpha = \frac{e \sin \varphi}{b \sin 1''} = 206265'' \frac{e}{b} \sin \varphi$$

$$\beta = \frac{e \sin (\varphi + \psi)}{a \sin 1''} = 206265'' \frac{e}{a} \sin (\varphi + \psi)$$

und daher der gesuchte Winkel

$$C = \psi + 206265'' e \left[\frac{\sin (\varphi + \psi)}{a} - \frac{\sin \varphi}{b} \right] \tag{92}$$

Die Grösse $\beta - \alpha = \delta$, um welche ψ verbessert werden muss, um C zu geben, lässt sich in dem Falle, wo man auch die Winkel CAB = A und ABC = B an der Seite AB = c des Dreiecks ABC kennt, so darstellen, dass sie für die logarithmische Berechnung bequemer wird; denn da nach Fig. 46:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin (B + C)}{\sin B} \tag{93}$$

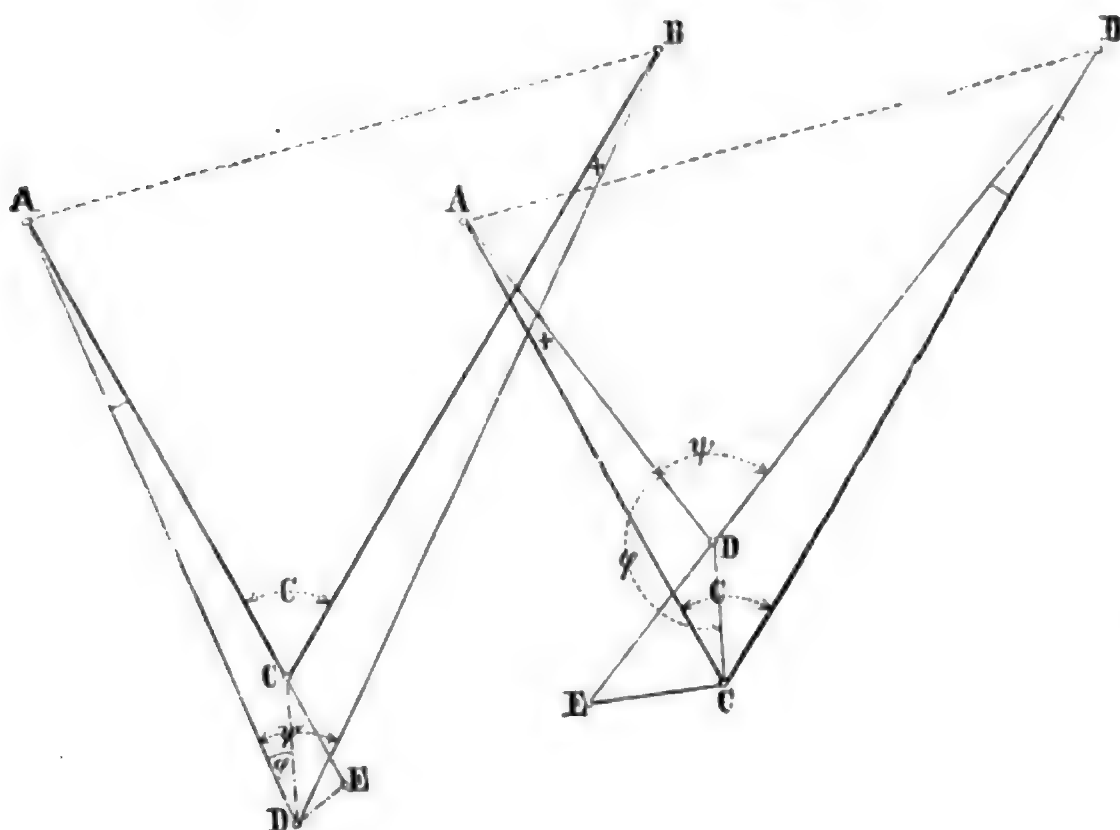
und nach Gleichung (92):

$$\delta = 206265'' \frac{e}{a} \left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi\right] \quad . \quad (94)$$

so wird mit Rücksicht darauf, dass $\sin(B + C) = \sin(B + \psi)$ gesetzt werden darf, die Verbesserung

$$\delta = 206265'' \frac{e \sin \psi \sin(B - \varphi)}{a \sin B} \quad (95)$$

Das Vorzeichen dieses Ausdrucks für δ hängt nur davon ab, ob der Winkel φ grösser oder kleiner ist als B; ist nämlich $B > \varphi$, so wird δ



positiv, ausserdem aber negativ. Nun ist nach den Figuren 46 und 47 der Winkel $\varphi = B$, wenn D auf dem Kreise ABC liegt; ferner ist $\varphi > B$, wenn sich D innerhalb dieses Kreises befindet; und es ist $\varphi < B$, wenn D ausserhalb des Kreises ABC liegt. Es wird somit $\delta = 0$, wenn D ein Punkt des Kreises ABC ist, und es erlangt δ einen positiven oder negativen Werth, je nachdem D ausser- oder innerhalb des genannten Kreises liegt. Die Grösse δ wird aber auch dann noch null, wenn ein Winkelschenkel (a) im Vergleiche zur Excentricität (e) unendlich gross ist, oder wenn die beiden Winkelschenkel ausserordentlich lang sind. Würden also die beiden Punkte A und B oder nur einer von ihnen Sterne bedeuten, so fiele die Verbesserung δ, als verschwindend klein, weg.

Manche Geodäten messen den dritten Winkel eines Dreiecks selbst dann ausserhalb des Scheitels, wenn Nichts die centrische Aufstellung des Theodolithen hindert. Als Grund dieses Verfahrens geben sie die grössere

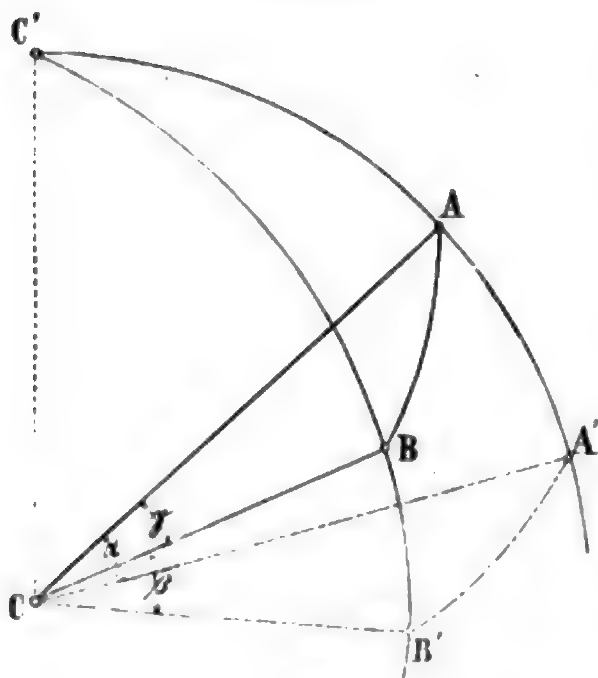
Unbefangenheit an, welche der Beobachter besitze, wenn er das von seiner directen Messung erwartete Resultat nicht im Voraus kennt.[1] Wir unterlassen es, ausführlicher zu untersuchen, welches Gewicht auf dieses aus Misstrauen in die eigene oder eine fremde Person entspringende Verfahren zu legen sei, und bemerken bloss, dass uns eine unmittelbare Messung immer lieber ist als eine mittelbare.

Da sich der Winkel C aus A und B durch Rechnung finden lässt, so mag Vielen die Messung bei C als überflüssig erscheinen; bei gewöhnlichen Dreiecksmessungen ist dieses allerdings der Fall, aber bei grösseren Triangulirungen soll der Controle der Messung wegen jeder Winkel eines Dreiecks für sich und, wo es angeht, unmittelbar gemessen werden.

§. 45. **Aufgabe. Ein schiefer Winkel und die Neigung seiner Schenkel gegen den Horizont ist gegeben: man soll die Grösse seiner Horizontalprojection berechnen.**

Die Bestimmung dieser Projection wird von den Geometern mit dem kürzeren Ausdrucke: „einen Winkel auf den Horizont zu reduciren," bezeichnet. Soll der schiefe Winkel ACB (Fig. 50) reducirt werden, so denke man sich durch seinen Scheitel C eine Horizontalebene und durch jeden Schenkel CA, CB eine Verticalebene gelegt. Diese Verticalebenen schneiden sich selbst in der lothrechten Geraden CC' und die Horizontalebene nach den Linien CA', CB', welche die gesuchte Horizontalprojection A'CB' des gegebenen schiefen Winkels ACB vorstellen. Denkt man sich ferner um den Scheitel C eine Kugelfläche vom Halbmesser = 1 beschrieben, so wird diese von der Ebene des schiefen Winkels nach dem grössten Kreise AB, von der Horizontalebene nach A'B', und von den Verticalebenen nach den Bögen C'AA', C'BB' geschnitten; es entstehen folglich zwei sphärische Dreiecke, die beide den gesuchten Winkel enthalten, nämlich das gleichschenklige Dreieck A'B'C' und das schiefwinklige ABC'. Von dem letzteren sind die drei Seiten bekannt; denn es ist AB = c = γ = dem gemessenen schiefen Winkel ACB; AC' = b = $90^0 - \alpha$ = dem Complement des Neigungswinkels α des Schenkels CA; BC' = a = $90^0 - \beta$ = dem Complement des Neigungswinkels β des Schenkels CB.

Fig. 50.



[1] Dieses Resultat ist ihm aber bekannt, da er schon vorher die Winkel bei A und B gemessen und vorläufig C = 180^0 — A — B berechnet hat.

Man findet folglich den Winkel $A'CB' = C' = \gamma'$ aus der bekannten Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

wenn man darin $a = 90^0 - \beta$, $b = 90^0 - \alpha$, $c = \gamma$ und $C = \gamma'$ setzt. Nach dieser Substitution und einer einfachen Umformung ergibt sich schliesslich

$$\cos \frac{\gamma'}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta}}. \qquad (96)$$

Will man den Winkel γ' nicht hieraus berechnen, so setze man in der aus der vorigen Grundformel folgenden Gleichung:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma' \qquad (97)$$

den bekannten Quotienten

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \gamma} = \cos \delta \qquad (98)$$

und bestimme mit Benützung des hieraus berechneten Hilfswinkels δ den Winkel γ' aus der Gleichung:

$$\cos \gamma' = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}, \qquad (99)$$

welche sich sehr einfach entwickelt.

Obwohl die Formeln (96) und (99) zur Berechnung des Winkels γ' aus γ und den Reductionselementen α und β sehr einfach sind, so kann man sich doch in dem Falle, wo α und β sehr kleine Winkel bezeichnen, noch bequemer einer Näherungsformel bedienen, deren Entwickelung wir hiermit andeuten.

Aus Gleichung (97) folgt ohne Weiteres:

$$\cos \gamma - \cos \gamma' = \sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma' (1 - \cos \alpha \cos \beta).$$

Setzt man, was unter der eben gemachten Annahme erlaubt ist, $\sin \alpha = \alpha \sin 1''$, $\sin \beta = \beta \sin 1''$ und das Product

$$\cos \alpha \cos \beta = 1 - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \sin^2 1'',$$

wobei α und β in Secunden auszudrücken sind: so erhält man zunächst

$$\cos \gamma - \cos \gamma' = [\alpha \beta - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \cos \gamma'] \sin^2 1''.$$

Da aber $\cos \gamma - \cos \gamma' = 2 \sin \frac{1}{2} (\gamma - \gamma') \sin \frac{1}{2} (\gamma + \gamma')$ und genau genug $2 \sin \frac{1}{2} (\gamma - \gamma') = (\gamma - \gamma') \sin 1''$, $\sin \frac{1}{2} (\gamma + \gamma') = \sin \gamma$ und $\frac{1}{2} \cos \gamma' = \frac{1}{2} \cos \gamma$ ist, so folgt schliesslich die Reductionsgrösse

$$\varrho = \gamma - \gamma' = \frac{\alpha \beta - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \cos \gamma}{206265 \sin \gamma}, \qquad (100)$$

welche für $\gamma = 90^0$ übergeht in

$$\varrho' = \frac{\alpha \beta}{206265}$$

und für $\alpha = 0^0\ 34'\ 22'' = 2062''$ und $\beta = 1^0\ 40' = 100' = 6000''$ die Verbesserung $\varrho' = 60''$ liefert.

In den vorausgehenden Entwickelungen wurden α und β als Höhenwinkel und desshalb beide als positive Grössen angesehen; erscheint nun einer oder der andere als Tiefenwinkel, so ist er als negative Grösse zu

behandeln und zu berücksichtigen, dass sin $(-\alpha) = -\sin\alpha$, cos $(-\alpha) = \cos\alpha$, tg $(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ und cotg $(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$ ist. Werden α und β zugleich negativ, so ändern sich selbstverständlich die Ausdrücke Nr. 96 bis 100 gar nicht.

Sind α und β Höhenwinkel, so können sie eben so wie der Winkel γ mittels des Spiegelkreises oder des Spiegelsextanten unter Anwendung eines Quecksilber- oder Glashorizonts gemessen werden; als Tiefenwinkel sind sie aber auf andere Weise zu bestimmen, wozu sich im Allgemeinen drei Wege darbieten. Entweder kann man nämlich den Tiefenwinkel in einen Höhenwinkel verwandeln, indem man die Neigung des Schenkels nicht von C, sondern von A oder B aus misst; oder man bestimmt den Tiefenwinkel durch einen Theodolithen; oder endlich man sucht den Höhenunterschied zwischen C und A = p, und zwischen C und B = q durch Nivelliren und die horizontalen Längen CA = m und CB = n durch mittel- oder unmittelbare Messung, und berechnet die absolute Grösse von α oder β aus den Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{m} \text{ und } \operatorname{tg}\beta = \frac{q}{n}.$$

Könnte man den Winkel γ nicht mit einem Theodolithen oder Spiegelinstrumente messen, so liesse sich seine Horizontalprojection γ' dadurch finden, dass man in den Schenkeln CA und CB zwei Punkte D und E absteckt, in dem dadurch gebildeten Dreiecke CDE die drei Seiten c, d, e und ihre Neigungswinkel oder sofort die Horizontalprojectionen c', d', e' dieser Seiten misst und aus letzteren nach der bekannten trigonometrischen Formel:

$$(d'\,e')^2 \sin^2\gamma' = 4\,s\,(s - c')\,(s - d')\,(s - e'),$$

in welcher $s = \frac{1}{2}(c' + d' + e')$ ist, den Winkel γ' berechnet.

2. Einfluss der regelmässigen Beobachtungsfehler auf die Winkelmessungen.

§. 46. Bekanntlich ist keine Messung ganz fehlerfrei, wenn sie auch mit den vorzüglichsten Instrumenten und unter den günstigsten äusseren Bedingungen von dem geschicktesten Geometer ausgeführt wurde; denn aus der Unvollkommenheit unserer Sinne und mathematischen Werkzeuge, aus unberechenbaren Einflüssen der Witterung, Beleuchtung, Temperatur etc., oder aus anderen zufälligen Störungen, die der Beobachter kaum wahrnimmt, entspringen immer gewisse, wenn auch ganz kleine Abweichungen von der absolut richtigen Grösse, die wir messen wollen. Diese Abweichungen heissen nach §. 2, S. 4 dieses Bands zufällige oder unvermeidliche Fehler und werden in dem fünften Capitel dieses Abschnitts bezüglich ihres Einflusses auf die Messungsresultate noch besonders betrachtet, sowie sie hinsichtlich ihrer Ausgleichung schon in dem ersten Abschnitte (Seite 4 bis 30) untersucht worden sind. Es gibt aber auch Messungsfehler, welche durch geschickte Behandlung vorzüglicher Instrumente und geeignete Messoperationen vermieden werden können, oder deren

Einfluss auf die Beobachtungsresultate sich berechnen und dadurch ausgleichen lässt. Diese Fehler heissen im Gegensatze zu den zufälligen Fehlern **constante** oder **regelmässige Fehler**, weil sie unter denselben Umständen stets in gleicher Grösse auftreten und aus den sie veranlassenden Ursachen berechnet werden können. Von diesen bereits auf S. 5 definirten Fehlern ist hier die Rede.

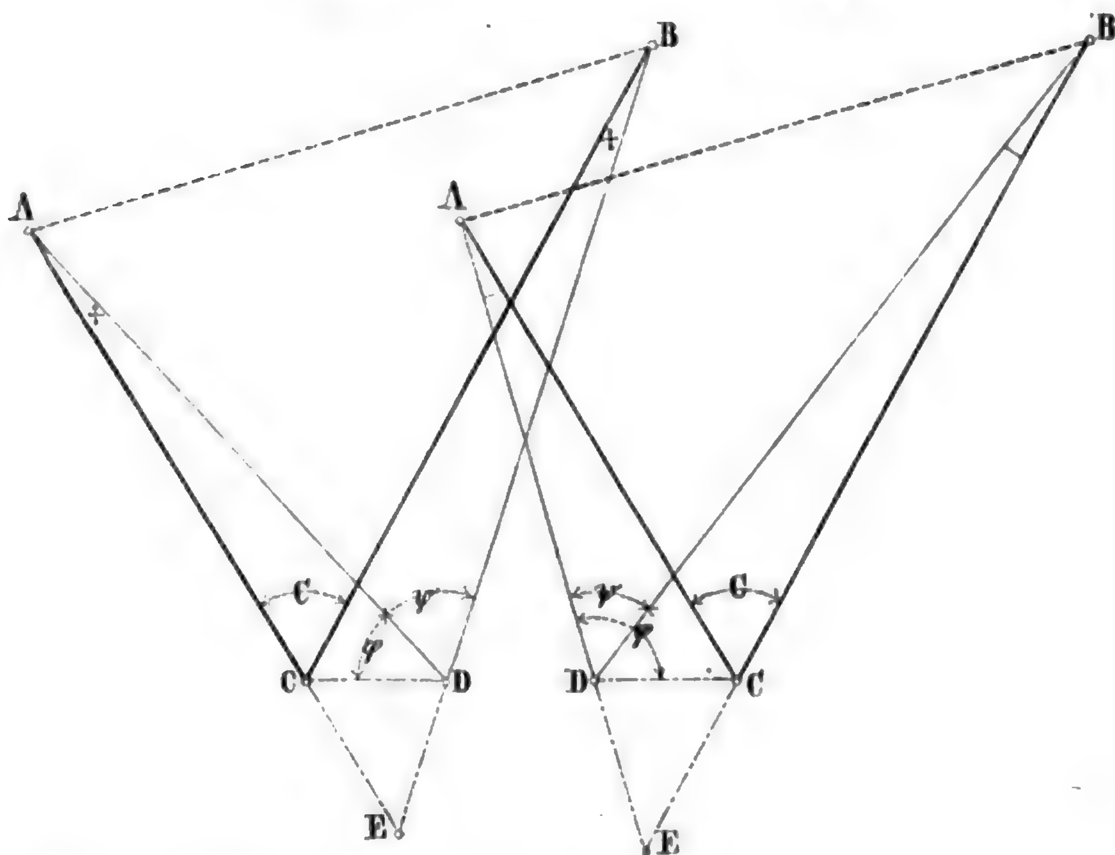
Die regelmässigen oder constanten Fehler, welche bei der Winkelmessung vorkommen, können verschiedene Ursachen haben; zu den am häufigsten auftretenden Fehlerquellen sind folgende zu rechnen:

1) die excentrische Aufstellung des Theodolithen oder des Messtisches;
2) die Excentricität der Alhidade des Theodolithen oder der Kippregel;
3) die Excentricität der Fernrohre dieser Instrumente;
4) die schiefe Lage der Limbus- oder Messtischebene;
5) die Neigung der Visirebene gegen das Loth;
6) die unrichtige Lage der anzuvisirenden Punkte.

Bei den nachfolgenden Berechnungen der Einflüsse dieser Fehlerquellen auf die unmittelbaren Winkelmessungen wird vorausgesetzt, dass immer nur eine Quelle vorhanden sei, aus der Fehler entspringen, während alle übrigen als nicht vorhanden angesehen werden. Nach der Grösse ihres Einflusses wird sich selbstverständlich die Sorgfalt zu richten haben, welche auf ihre Vernichtung zu wenden ist. In §. 53 werden alle Fehler zusammengefasst werden.

§. 47. **Aufgabe. Die Grösse des Einflusses der excentri-**

Fig 51. Fig. 52.



schen Aufstellung des Theodolithen oder Messtisches auf die Messung eines Horizontalwinkels zu bestimmen.

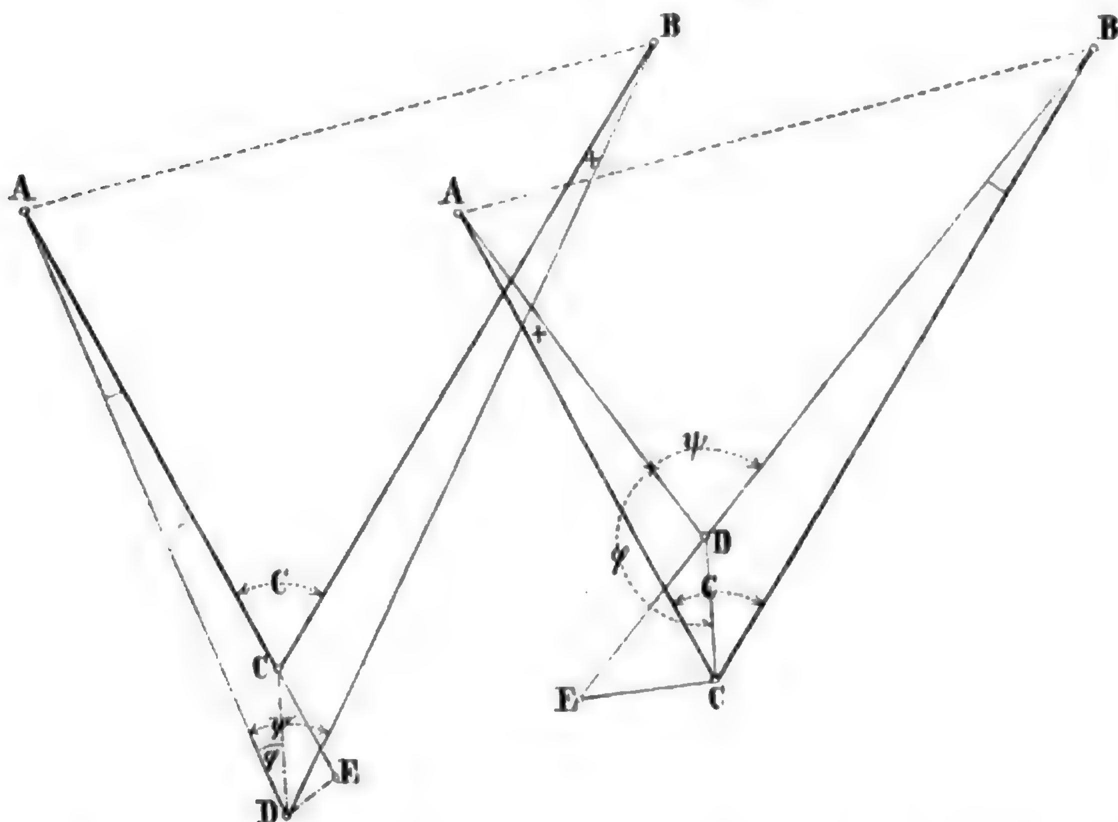
Der Messungsfehler, welcher hier behandelt wird, besteht darin, dass beim Theodolithen die Alhidadenaxe und beim Messtische der auf dem Blatte gegebene Scheitelpunkt des Winkels nicht in das Loth des natürlichen Winkelscheitels gestellt wird. Denkt man sich dieses Loth bis zum Horizontalkreise des Theodolithen oder bis zur Messtischebene verlängert, so wird der Abstand seines Schnittpunkts von dem Durchgangspunkte der Alhidadenaxe oder von dem Bildpunkte des Winkelscheitels die Grösse der Excentricität der Aufstellung des einen oder des anderen Instruments bezeichnen.

Ist in Fig. 51 der Punkt C die Projection des natürlichen Winkelscheitels und D der Durchgangspunkt der Alhidadenaxe auf dem Horizontalkreise oder der Bildpunkt des Winkelscheitels auf dem Messtischblatte, stellt also die Linie CD = e die Excentricität der Aufstellung des Winkelmessers vor: so wird statt des auf dem Felde gegebenen Horizontalwinkels ACB = C der Horizontalwinkel ADB = ψ gemessen und es besteht folglich der Einfluss der excentrischen Aufstellung des Instruments in dem Unterschiede der Winkel C und ψ, d. h. es ist der gesuchte Fehler

$$\delta = C - \psi = \beta - \alpha, \qquad (101)$$

wobei α den sehr kleinen Winkel CAD und β den ebenfalls sehr kleinen Winkel CBD bezeichnet.

Fig. 53. Fig. 54.



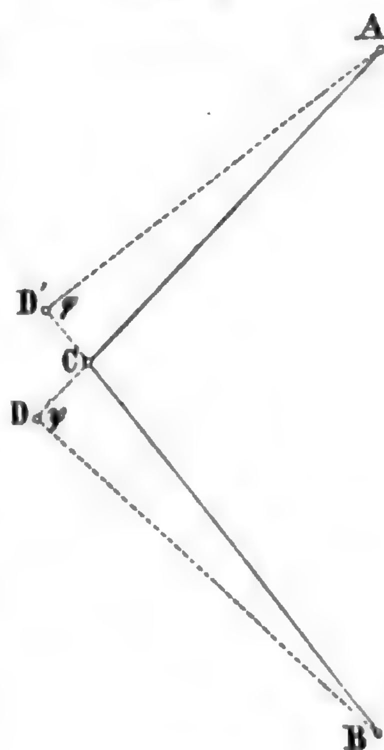
Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in Nr. 91 aus den Figuren 46 bis 49 abgeleiteten, so findet man zwischen beiden eine völlige Uebereinstimmung. Auch hier kann der Punkt D rings um C herum liegen, wess-

halb bezüglich der Lage der Reductionswinkel α und β die vier Fälle möglich sind, welche jene hier wiederholten Figuren darstellen und welche sich in dem obigen Ausdrucke zusammenfassen lassen, wenn man α und β positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Schenkel DA oder DB rechts oder links von CA oder CB liegen. Mit Bezug auf die in §. 44 enthaltenen Entwickelungen und namentlich nach Gl. (94) erhält man daher

$$\delta = 206265'' \frac{e}{a} \left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi\right] \qquad (102)$$

Der Einfluss δ der excentrischen Aufstellung des Instruments wird null, wenn $C = \psi$ oder $\beta = \alpha$ ist, d. h. wenn der Punkt D auf dem Kreise ABC liegt, und wenn die Winkelschenkel im Vergleiche zur Excentricität sehr lang sind. Er wird bei unveränderlichem Werthe der Grössen a, b, c am grössten, wenn $\psi = 90^0$ und $\varphi = 0$, d. h. wenn sich der Standpunkt D des Instruments, wie Fig. 55 zeigt, auf dem Schenkel AC befindet und der zu messende Winkel nahezu ein rechter ist, und wenn $\psi = 90^0$ und $\varphi = 90^0$, d. h. wenn sich der Standpunkt D' auf dem Schenkel CB befindet und der zu messende Winkel ebenfalls nahezu ein rechter ist.

Fig. 55.



In dem ersteren dieser beiden Fälle wird der Fehler

$$\delta = \delta_1 = + 206265'' \frac{e}{a} \qquad (103)$$

und in dem zweiten Falle erhält man

$$\delta = \delta_2 = - 206265'' \frac{e}{b} \qquad (104)$$

Würde also die Excentricität e einen Dezimalzoll betragen und wäre der Winkelschenkel a = b = 206,2 Fuss = 2062 Dezimalzoll, so erhielte man für beide Fälle den Fehler

$$\delta = \pm \frac{206265}{2062} = \pm 100''$$

Wenn sich ein solcher Fehler auch noch bei einer Messtischaufnahme ertragen lässt, so kann er doch nimmermehr bei einer Winkelmessung mit dem Theodolithen geduldet werden; wesshalb auf die centrische Aufstellung dieser Instrumente grosse Sorgfalt verwendet werden muss.

§. 48. **Aufgabe. Den aus der Excentricität der Alhidade entspringenden Fehler in der Winkelaufnahme zu berechnen.**

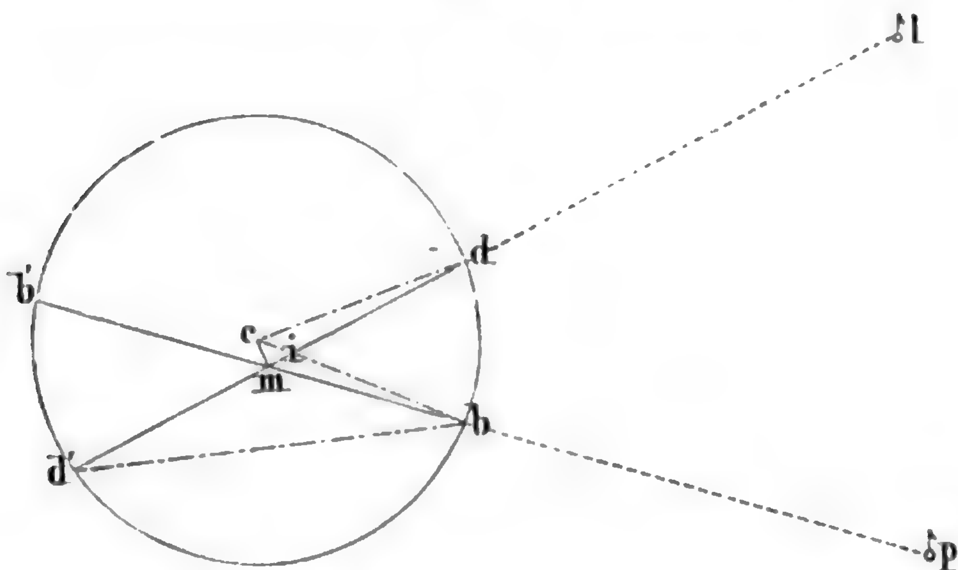
Wird der Horizontalwinkel durch einen Theodolithen gemessen, so beträgt der Fehler f nach Abschnitt III, C, 2 der Instrumentenlehre

$$f = 412530'' \cdot \frac{e}{i} \sin \tfrac{1}{2} \varphi' \cos(\omega - \tfrac{1}{2} \varphi') \qquad (105)$$

wobei mit Bezug auf Fig. 56 folgende Bezeichnungen gebraucht sind:

e für die Excentricität (cm) der Alhidade;
ω „ den Neigungswinkel (dcm) der Linien cm und cd;
r „ den Halbmesser (cb, cd) des Limbus, und
φ' „ den am Nonius abgelesenen Winkel (bcd).

Fig. 56.

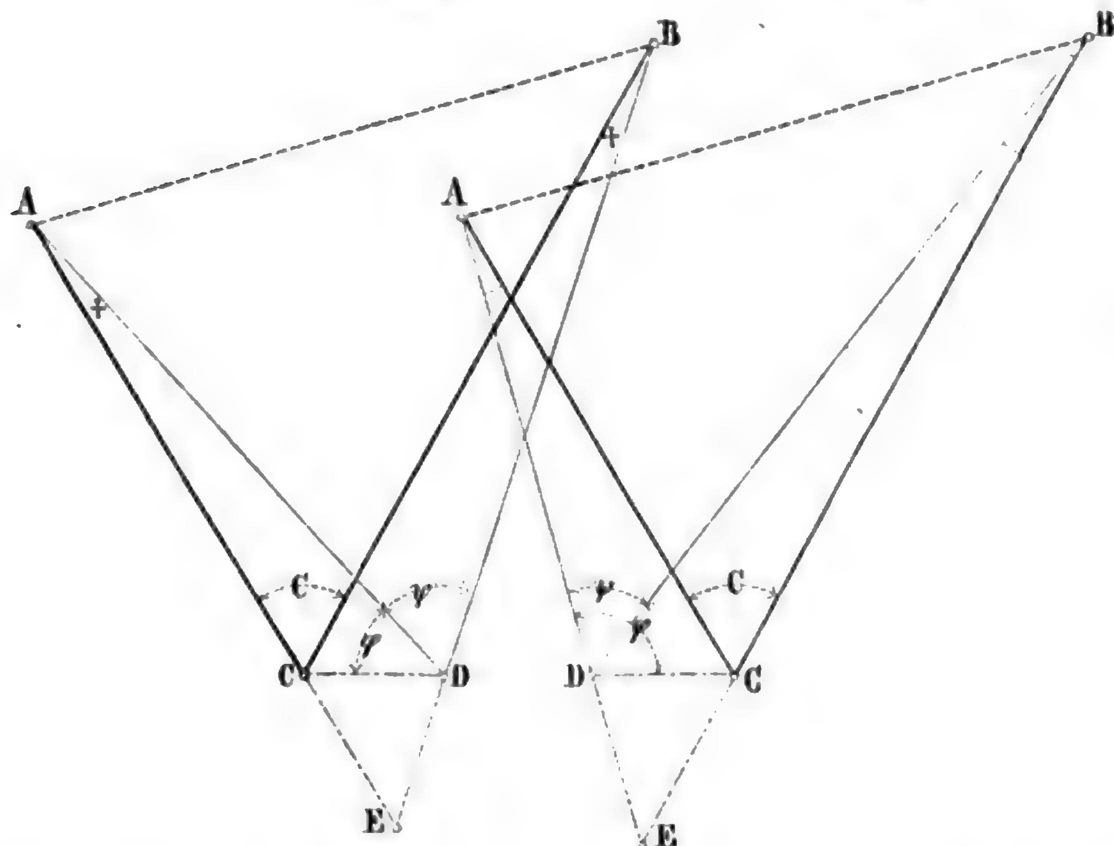


Der Werth von f kann, wie in der Instrumentenlehre dargethan ist, selbst für eine Excentricität der Alhidade von nur $^1/_{20}$ Linie über 3 Minuten betragen, also sehr gross werden. Dieser Finfluss lässt sich aber einfach beseitigen, wenn am Theodolithen zwei sich gegenüberstehende Nonien angebracht sind und abgelesen werden; wesshalb hier wiederholt auf die Wichtigkeit zweier Nonien am Theodolithen und deren gleichzeitige Benützung aufmerksam gemacht wird.

Bei Messtischaufnahmen tritt die Oberfläche des Tischblatts an die Stelle des Limbus, der Bildpunkt des Winkelscheitels an die Stelle des Kreismittelpunkts, und die Linealkante der Kippregel an die Stelle der Alhidade. Legt man nämlich diese Kante nicht genau an den abgebildeten Scheitelpunkt des Winkels an, so ist eine Excentricität der Alhidade vorhanden und es ist ihre Grösse gleich dem Abstande des gegebenen Scheitelpunkts von dem Scheitel, der sich durch die Aufnahme des Winkels ergibt.

Stellt in den vier Figuren 57 bis 60 der Punkt C den auf dem Messtische abgebildeten Winkelscheitel und ACB den aufzunehmenden Winkel vor, so erhält man, wenn das Lineal nicht in C, sondern entfernt davon angelegt wird, statt des Winkels $ACB = C$ den Winkel $ADB = \psi$. Verbindet man D mit C, so ist CD die Excentricität e des Lineals der Kippregel und $\delta = C - \psi$ der hieraus entspringende Fehler des Winkels C. Nennt man wieder die kleinen Winkel bei A und B beziehlich α und β, so ist nach den genannten Figuren, und da im Uebrigen die Bezeichnungen und Entwickelungen des §. 44 gelten, hier wie dort der Fehler

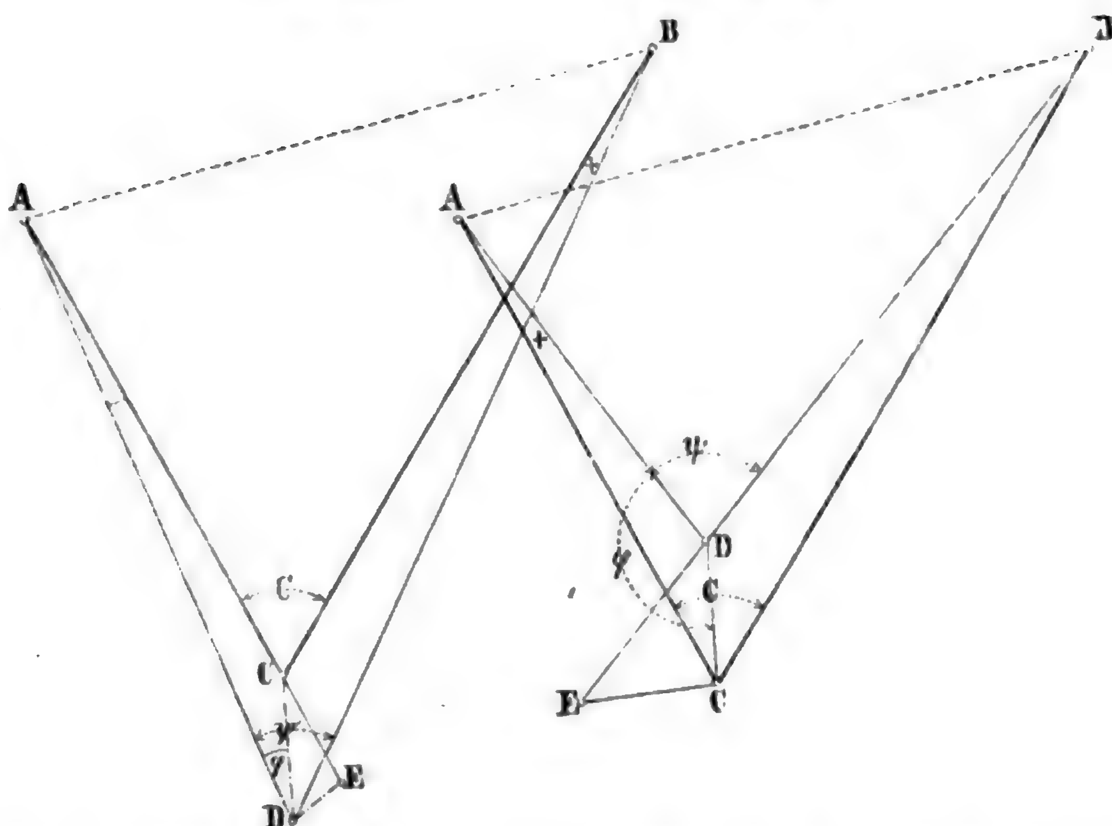
$$\delta = 206265'' \frac{e}{a} \left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi\right] \tag{106}$$



Es gelten somit alle Folgerungen, welche im vorigen Paragraph in Bezug auf die excentrische Aufstellung aus dieser Gleichung gezogen wurden, auch für die Grösse des Einflusses der Excentricität der Linealkante. Wenn hiernach die grössten Werthe von δ durch die Ausdrücke Nr. 103 und 104 gegeben sind, so sieht man leicht ein, dass eine geringe Excentricität der Linealkante der Kippregel der Grösse des zu messenden Winkels nicht schadet; denn wenn e sogar eine Decimallinie betrüge und $a = b = 206{,}2$ Fuss wäre, so würde δ nur 10 Secunden ausmachen. Etwas Anderes aber ist es, wenn mit diesem Apparate zusammenhängende Aufnahmen zu machen sind. Würde man hierbei die Linealkante nicht genau an die gegebenen Scheitelpunkte der Winkel anlegen, so entstünden in der gegenseitigen Entfernung einzelner Punkte Fehler, welche der Excentricität des Kippregellineals, mit dem Massstabe der Aufnahme gemessen, gleichkämen: bei der Verjüngung von 1 : 5000 würde somit die Excentricität von $^1/_{10}$ Decimallinie einem Fehler von 5 Fuss und folglich die Excentricität $e = 0{,}01$ Fuss einem Fehler von 50 Fuss entsprechen. Das scharfe Anlegen des Lineals der Kippregel an die voraus bestimmten Winkelscheitel kann somit für Messtischaufnahmen nicht genug empfohlen werden.

§. 49. **Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler eines mit Theodolith oder Kippregel gemessenen Horizontalwinkels ist.**

Denkt man sich durch die verticale Alhidadenaxe des Theodolithen oder durch die horizontale Linealkante der Kippregel eine Verticalebene gelegt, welche mit der Fernrohraxe parallel läuft, so ist der Abstand der letzteren



Axe von der gedachten Ebene entweder null oder nicht. In dem ersteren Falle hat das Fernrohr des Instruments keine Excentricität, im letzteren aber heisst der Abstand der Fernrohraxe von jener Ebene die Excentricität des Fernrohrs oder der Absehlinie.

Die Wirkung einer solchen Excentricität des Theodolithen kann in folgender Weise beurtheilt und berechnet werden.

Es sei in der nebenstehenden Figur (61) c die horizontale Projection der Alhidadenaxe, od die gleichnamige Projection der Fernrohraxe und cd = e die Excentricität des Fernrohrs des Theodolithen. Ist mit diesem über c horizontal gestellten Instrumente der Winkel LcR zu messen, so wird das Fernrohr zuerst die Richtung od nach L und hierauf die Richtung o'd' nach R erhalten, wodurch statt des Winkels LcR = w der Winkel LbR = dcd' = w' gemessen wird. Der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler δ entspricht nun offenbar dem Unterschiede dieser Winkel und ist daher, wenn man die kleinen Winkel bRc = v und dLc = v' setzt, durch die Gleichung gegeben:

$$\delta = w - w' = v' - v.$$

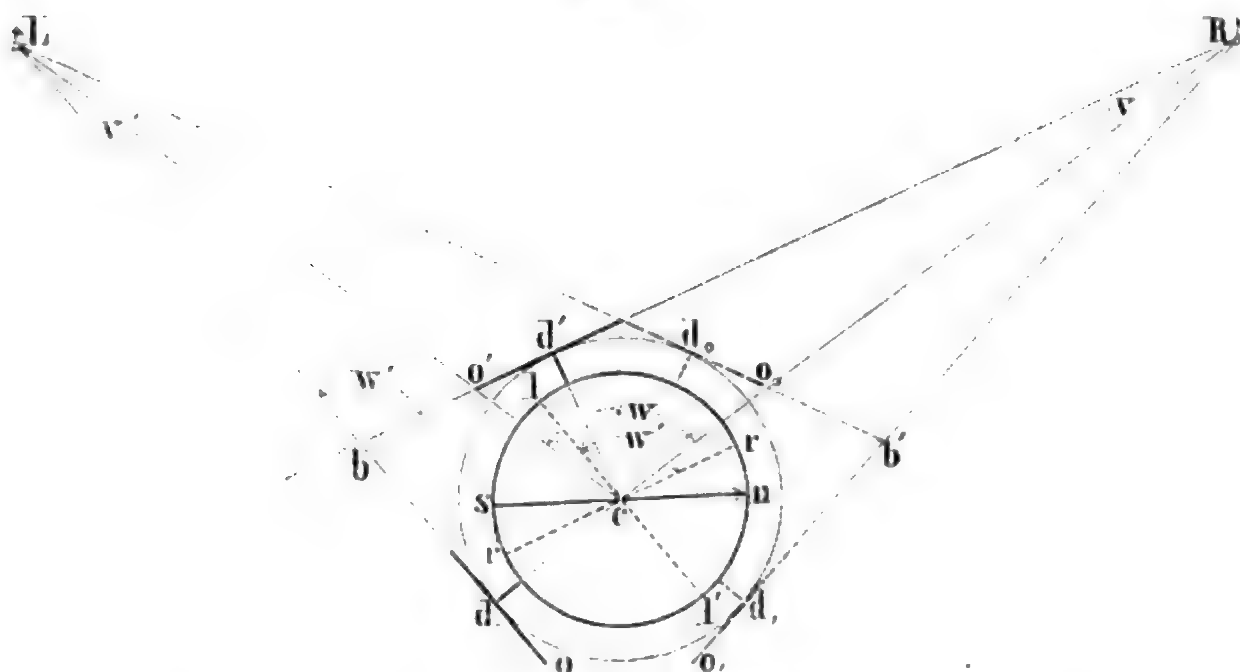
Haben die Winkelschenkel cR, cL die Längen l, l', und berücksichtigt man, dass l sin v = l' sin v' = e und genau genug

$$v = \frac{e}{l \sin 1''}, \quad v' = \frac{e}{l' \sin 1''}$$

ist: so erhält man sofort den Fehler

$$\delta = \frac{e}{\sin 1''}\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right) = 206265'' \, e \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right). \qquad (107)$$

Fig. 61.



Dieser Fehler wird null, wenn die Winkelschenkel gleich lang sind, und um so grösser, je mehr der Unterschied der Schenkellängen beträgt. Da sein Einfluss bedeutend werden kann und die Vernichtung desselben durch Berechnung umständlich und nicht immer möglich ist (insofern manchmal l und l' unbekannt sind): so ist jeder gute Theodolith so eingerichtet, dass jener Einfluss durch ein entsprechendes Messverfahren auf Null gebracht werden kann; und dieses Verfahren besteht nach den Entwickelungen des ersten Bands über den Theodolithen darin, dass man den Winkel mit entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs zweimal misst, und aus den beiden Messungsresultaten das Mittel nimmt.

Die Excentricität der Visirebene der Kippregel hat, wie leicht einzusehen, keine andere Wirkung, als dass der auf dem Messtischblatte gezeichnete Winkel gegen den in der Natur um die Grösse der Excentricität parallel verschoben erscheint; und diese Verschiebung schadet nicht, wenn die ganze Aufnahme mit ein und derselben Kippregel durchgeführt wird. Würde dagegen eine Messtischaufnahme mit zwei verschiedenen Kippregeln gemacht, deren Fernrohr-Excentricitäten e und e' sind, so entstünden durch den Anschluss der beiden Theilaufnahmen in den gegenseitigen Entfernungen der nicht in einer und derselben Kippregel aufgenommenen Punkte Fehler, welche auf der Zeichnung die Grösse e — e' oder e + e' hätten, je nachdem e und e' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besässen; in Wirklichkeit aber würden die Fehler

$$\delta = m\,(e + e') \qquad (108)$$

sein, wenn m die Verjüngung der Aufnahme bezeichnet.

Ein etwas schlimmerer Feind als die Excentricität der Visirebene ist die schiefe Lage dieser Ebene gegen die Linealkante; da aber der Parallelismus zwischen beiden nach früher gegebener Anweisung leicht geprüft und her-

gestellt werden kann, so erscheint es überflüssig, die Folgen eines so leicht zu vermeidenden Fehlers weiter zu untersuchen.

§. 50. **Aufgabe. Man soll den Fehler eines Horizontalwinkels, der bei schiefer Lage der Limbus- oder Messtischebene aufgenommen wird, berechnen.**

Dieser Fehler rührt weniger davon her, dass der durch die Absehlinie des Fernrohrs auf den Limbus oder das Messtischblatt senkrecht projicirte Winkel nicht in einer Horizontalebene liegt, als davon, dass die projicirenden Ebenen nicht vertical sind und vermöge der Einrichtung des Theodolithen und der Kippregel nicht vertical sein können, so lange die Limbus- und Messtischebenen geneigt sind. Könnte man trotz dieser Neigung die anvisirten Winkelschenkel durch Verticalebenen projiciren, so dürfte die schiefe Lage der Instrumentenebene schon ziemlich gross sein, wenn ein auffallender Winkelfehler entstehen sollte, wie aus den Formeln des §. 45 hervorgeht, nach welchen in diesem Falle der in Rede stehende Fehler zu beurtheilen wäre.

Um einen klaren Begriff von der Entstehung des zu berechnenden Fehlers zu geben, denken wir uns den gegebenen Naturwinkel W, dessen beide Schenkel in einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegen, durch eine in dieser Ebene gezogene und durch den Winkelscheitel gehende gerade Linie in zwei Theile u und v zerlegt und jeden dieser Theile sowie den ganzen Winkel auf eine durch die Theilungslinie gehende Horizontalebene projicirt. Jeder Theilwinkel u und v hat einen wagrechten und einen geneigten Schenkel, und es ist klar, dass die Betrachtungen, welche man für einen derselben anstellt, auch für den anderen gelten. Erfährt man auf diese Weise den Fehler δ in der Horizontalprojection φ des Winkels u, so gilt ein ähnlicher Ausdruck δ' für den Fehler der Projection ψ des Winkels v; der Fehler $\varDelta$ in der Horizontalprojection Ω des Winkels W, welcher $= u \pm v$ ist, wird somit $= \pm (\delta \pm \delta')$ sein, je nach der Lage der Winkelschenkel. Die Verbindung der Werthe von δ und δ' ist in einem bestimmten Falle nicht schwierig, und da es hier überhaupt nur darauf ankommt, zu erfahren, ob aus einer schiefen Lage der Limbus- oder Messtischebene bedeutende Messungsfehler entspringen können, so genügt es, hier einen schiefen Winkel u zu betrachten, dessen einer Schenkel horizontal ist.

Zu dem Ende denken wir uns durch diesen Schenkel die unter dem Winkel γ gegen den Horizont geneigte Limbus- oder Messtischebene gelegt und darauf den Winkel u, dessen geneigter Schenkel mit dem Horizont den Winkel α bilden soll, während seine Ebene unter dem Winkel ε dagegen geneigt ist, senkrecht projicirt, wie es durch die Visirebene in der That geschieht. Nennt man diese Projection φ' und die wahre φ, so ist der Fehler des Winkels φ gleich

$$\delta = \varphi' - \varphi$$

und es kommt nur mehr darauf an, denselben durch die gegebenen Grössen φ, α, γ auszudrücken.

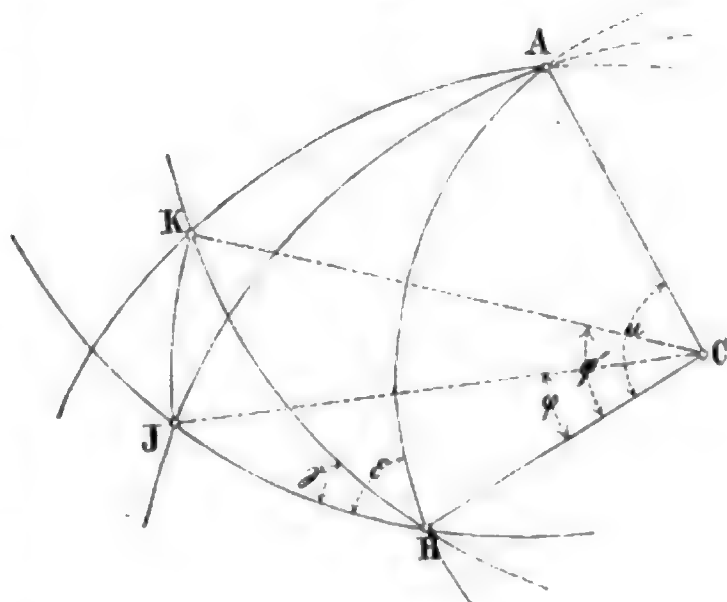


Fig 62.

Stellt in Fig. 62 der Punkt C den Scheitel, CH den wagrechten und CA den geneigten Schenkel des Winkels ACH = u vor; bezeichnet ferner die Linie CJ die Horizontalspur einer durch CA gelegten Verticalebene und CK den Schnitt einer zweiten durch CA gehenden und auf der Limbus oder Messtischoberfläche senkrecht stehenden Ebene mit dieser Fläche; und denkt man sich endlich um den Punkt C mit dem Halbmesser $r = 1$ eine Kugelfläche beschrieben, welche die Horizontalebene nach dem grössten Kreisbogen HJ, die Limbusebene nach dem grössten Kreisbogen HK und die beiden projicirenden Ebenen nach den grössten Kreisbögen AJ und AK schneidet, so ist

$$\text{arc } AH = \text{ang } ACH = u,$$
$$\text{arc } JH = \text{ang } JCH = \varphi,$$
$$\text{arc } KH = \text{ang } KCH = \varphi',$$
$$\text{arc } JA = \text{ang } JCA = \alpha,$$
$$W. AHJ = \varepsilon, \; W. JHK = \gamma,$$

und es folgt aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke AJH:

$$\cot \varepsilon = \sin \varphi \cot \alpha, \tag{109}$$
$$\text{tang } \varphi = \cos \varepsilon \text{ tang } u, \tag{109a}$$

während man aus dem ebenfalls rechtwinkligen sphärischen Dreiecke AKH erhält:

$$\text{tang } \varphi' = \cos (\varepsilon - \gamma) \text{ tg } u. \tag{110}$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen kann man den Fehler $\delta = \varphi' - \varphi$ vollständig berechnen; denn da α und φ gegeben sind, so sucht man aus Gleichung (109) den Winkel ε, mit diesem erhält man aus Gleichung (109a) den Winkel u, und hiermit endlich aus (110) den Winkel φ'. Soll jedoch die Auflösung der beiden ersten Gleichungen umgangen und φ' sofort aus φ, α, γ gefunden werden, so eliminire man aus der letzten Gleichung mit Hilfe der zwei vorausgehenden die Grössen u und ε, wodurch sich ergibt:

$$\text{tg } \varphi' = \cos \gamma \text{ tg } \varphi + \text{tg } \alpha \sin \gamma \sec \varphi. \tag{111}$$

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist

$$\text{tg } (\varphi' - \varphi) = \frac{\text{tg } \varphi' - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \varphi' \text{ tg } \varphi};$$

entwickelt man also den letzteren Ausdruck durch Substitution des Werths von tg φ' und setzt:

$$\text{tg } \alpha \sin \gamma - \sin \varphi (1 - \cos \gamma) = p, \tag{112}$$

so erhält man die zur Berechnung des gesuchten Fehlers dienende Gleichung

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{p \cos \varphi}{1 + p \sin \varphi}, \tag{113}$$

welche sich wegen Geringfügigkeit des Werths von δ auch so schreiben lässt:

$$\delta = 206265'' \cdot \frac{p \cos \varphi}{1 + p \sin \varphi}. \tag{113a}$$

Setzt man beispielsweise $\varphi = 30^0$, $\gamma = 1^0$, $\alpha = 10^0$, so wird $p = 0{,}00302$ und $\delta = 0^0\, 8'\, 57''$. Betrüge der Winkel φ dagegen 60^0 und läge die eine Hälfte desselben über, die andere unter der Horizontalebene CHJ, so wäre für die zweite Hälfte ebenfalls $\delta' = 0^0\, 8'\, 57''$ und folglich der ganze Fehler $\varDelta = \delta + \delta' = 0^0\, 17'\, 54''$. Für $\varphi = 90^0$ wird $\delta = 0$, und für $\varphi = 0$ erhält man $\delta = 206265''\, p = 206265''\, \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma$.

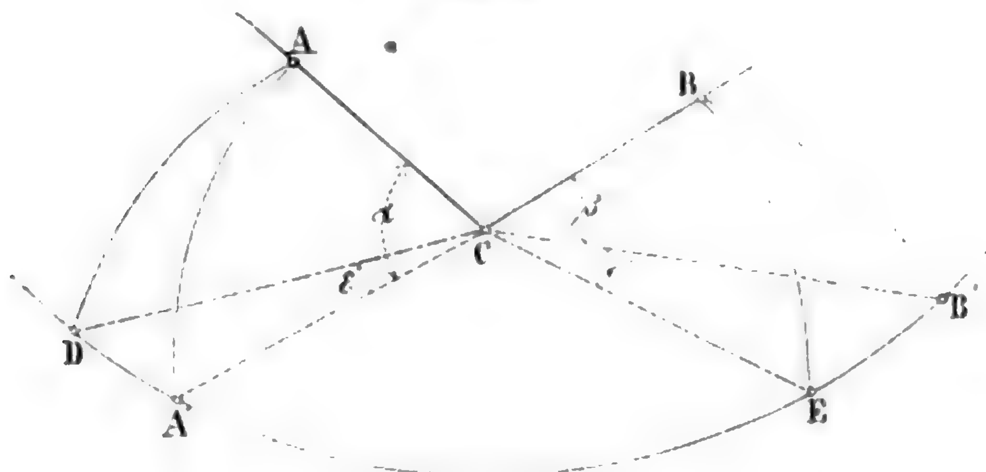
In dem letzteren Falle liegt der Winkel φ in einer Verticalebene. Wäre nun der eine Schenkel unter 45^0 gegen den Horizont geneigt, während der andere wagrecht ist, so erhielte man $\operatorname{tg} \delta = \sin \gamma$ oder sehr nahe $\delta = \gamma$; d. h. es würde das Instrument bei einer Neigung seines Horizontalkreises von einem Grad auch den Horizontalwinkel φ, welcher null ist, gleich einem Grad angeben. Man entnimmt hieraus, wie nachtheilig die schiefe Lage der Limbusebene werden kann, und wie sorgfältig sie zu vermeiden ist.

§. 51. **Aufgabe. Den Fehler in einem Horizontalwinkel zu berechnen, welcher aus der schiefen Lage der Visirebene gegen die Limbus- oder Messtischebene entspringt.**

Die Ebene des Limbus oder des Messtisches wird jetzt als horizontal vorausgesetzt, die Visirebene aber bilde in Folge der geneigten Lage der Drehaxe des Fernrohrs mit der verticalen Alhidadenaxe einen Winkel γ. Der zu messende Winkel heisse ACB und habe zwei über die horizontale Limbus- oder Messtischebene, welche wir uns durch den Scheitel C gelegt denken, erhobene Schenkel.

In Fig. 63 stelle die aus C beschriebene Kreisfläche DA′EB′ den Limbus oder das Messtischblatt, AC den einen, BC den anderen Winkelschenkel vor, und AC sei unter dem Winkel α, BC unter β gegen den

Fig. 63.



Horizont geneigt. Denkt man sich um den Scheitel C eine Kugel vom Halbmesser CD = CE = 1 beschrieben, so wird diese von der Limbusebene nach dem grössten Kreise D A′E B′, von den Visirebenen A C D, B C E nach den grössten Bögen A D, B E, und von den Verticalebenen A C A′, B C B′ nach den grössten Bögen A A′, B B′ geschnitten, und es stellt A′C B′ = φ den richtigen, D C E = ψ aber den falschen Horizontalwinkel vor. Der Schenkel C D, welchen die Visirebene A C D projicirt, ist um den Winkel D C A′ = ε und der Schenkel C E, welcher aus der Visirebene B C E entspringt, um den Winkel ε' fehlerhaft; folglich ist der Gesammtfehler δ in dem vorliegenden Falle = $\varepsilon - \varepsilon'$. Läge dagegen der Schenkel C B unter der Limbusebene, so würde der Fehler $\delta' = \varepsilon + \varepsilon'$ sein, wie man sich leicht selbst klar machen kann.

Betrachtet man die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke A D A′ und B E B′, so sieht man sofort, dass dieselben zur Berechnung der Fehlerwinkel ε und ε' geeignet sind. Denn es ist in A D A′ der Bogen A′D = ε, arc A A′ = α, Winkel A A′D = 90^0 und Winkel A D A′ = $90^0 - \gamma$, wenn γ der Neigungswinkel der Visirebene gegen das Loth ist; folglich findet man

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma.$$

Im Dreiecke B E B′ ist der Bogen E B′ = ε', arc B B′ = β, Winkel B B′E = 90^0 und Winkel B E B′ = $90^0 - \gamma$; mithin auch

$$\sin \varepsilon' = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Berücksichtigt man, dass ε und ε' immer nur kleine Winkel sind, und dass desshalb

$$\varepsilon = 206265'' \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma$$
$$\varepsilon' = 206265'' \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

gesetzt werden darf, so wird der gesuchte Winkelfehler

$$\delta = 206265'' \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \tag{114}$$

wobei zu bemerken ist, dass α und β positiv zu nehmen sind, wenn sie Höhenwinkel, und negativ, wenn sie Tiefenwinkel vorstellen. Ist also der Schenkel C B abwärts geneigt, mithin β negativ, so wird

$$\delta = \delta' = 206265'' \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta). \tag{115}$$

Setzt man in dem letzteren Falle $\alpha = +20^0$, $\beta = -20^0$, so folgt für $\gamma = 1^0$ der Fehler $\delta' = \varepsilon + \varepsilon' = 2621$ Sec. = 44 Minuten. Dieser Fehler gilt für jeden Horizontalwinkel, also auch für einen, der sehr nahe an Null liegt; woraus zu entnehmen ist, wie vielmal grösser der Fehler als der gemessene Winkel werden kann, und wie nothwendig es ist, durch sorgfältige Berichtigung des Theodolithen und der Kippregel die schiefe Lage der Visirebene zu vermeiden. Da bei Messtischaufnahmen diese Lage auch dann eintritt, wenn das Lineal der Kippregel durch unterliegende Sandkörnchen u. s. w. einseitig erhoben wird, so ist hierbei weiter noch auf die Reinheit des aufgespannten Papiers und beziehungsweise der Tischoberfläche zu achten.

§. 52. **Aufgabe. Die aus der unrichtigen Lage der Zielpunkte entstehenden Winkelfehler zu bestimmen.**

Die Zielpunkte sind durch Signale gegeben, welche aus Stangen

Pfeilern, Pyramiden u. s. w. bestehen. Wird nun z. B. ein Stangensignal, das schief statt lothrecht steht, nicht am Fusspunkte anvisirt, so ist ein unrichtiger Zielpunkt benützt und dadurch ein Fehler in den gemessenen Winkel gebracht worden. Dasselbe geschieht, wenn eine lothrechte cylindrische Säule oder eine polirte Kugel nicht in der Richtung eines Durchmessers, sondern seitwärts anvisirt wird.

1) Stellt die Linie CA in Fig. 64 einen Winkelschenkel, C den Scheitel des Winkels und den Mittelpunkt des Instruments, AB aber die schiefe Signalstange vor, und geht die Visirlinie nach dem Punkte B statt nach A: so erhält man nicht die richtige Projection CA′ des Schenkels CA, sondern die falsche CB′, wodurch in den Horizontalwinkel ein Fehler A′CB′ $= \delta$ kommt, welcher lediglich von dem Signal AB herrührt. Ist dasselbe unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt und heisst h die Entfernung des Punkts B von A, so ist die Horizontalprojection von AB oder

$$AD = A'B' = h \cos \alpha;$$

Fig. 64.

nennt man ferner l die Länge des Schenkels CA und γ dessen Neigungswinkel gegen den Horizont, so ist $CA' = l \cos \gamma$; und wird endlich der Winkel CA′B′, unter welchem die projicirende Ebene ACA′ gegen die Signalebene ABD geneigt ist, mit β bezeichnet: so kennt man in dem Dreiecke A′B′C drei Stücke und kann folglich den Winkel δ desselben finden. Es wird nämlich genau

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma - h \cos \alpha \cos \beta} \tag{116}$$

und, wenn man $h \cos \alpha \cos \beta$ gegen das weit grössere Product $l \cos \gamma$ vernachlässigt, näherungsweise

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma}. \tag{117}$$

Berücksichtigt man ferner noch, dass δ nur ein kleiner Winkel ist und folglich $\operatorname{tg} \delta \sin 1''$ gesetzt werden darf, so ergibt sich schliesslich mit hinreichender Genauigkeit der Fehler

$$\delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma \sin 1''} = 206265''. \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma}. \tag{118}$$

Insofern der Werth dieses Ausdrucks bloss von β abhängt, wird er

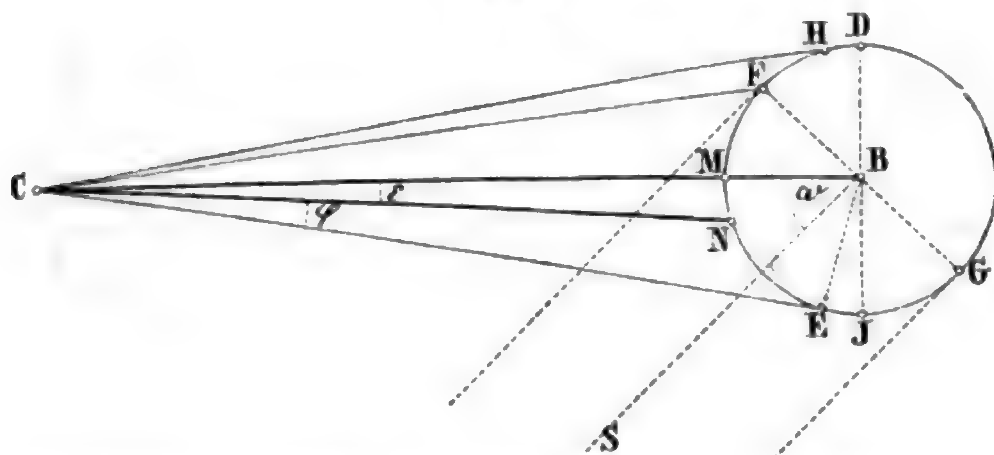
am grössten, wenn $\beta = 90^0$ ist, d. h. wenn die Visirebene senkrecht zur Signalebene steht; lässt man ihn nur von γ abhängen, so wird er am kleinsten für $\gamma = 0$ und am grössten für $\gamma = 90^0$. Setzt man $\gamma = 0$ und $\beta = 90^0$, so findet man

$$\delta = \frac{h \cos \alpha}{l \sin 1''} = 206265'' \ \frac{h \cos \alpha}{l} \tag{119}$$

woraus zu entnehmen, dass δ mit der Höhe (h) des anvisirten falschen Punkts (B) und mit dem Neigungswinkel (α) der Signalstange wächst, dagegen aber mit der Länge des Winkelschenkels abnimmt.

2) Wenn eine als Signal dienende runde Säule (B, Fig. 65) nicht in der Richtung der Visirebene (CB) von der Sonne beleuchtet ist, so wird man das Fadenkreuz des bei C befindlichen Fernrohrs nicht auf die Mitte M der sichtbaren Cylinderfläche HE, sondern auf die Mitte N des von der Sonne in der Richtung SB beschienenen und von C aus sichtbaren Theils FE dieser Fläche einstellen und dadurch einen Fehler in den Horizontalwinkel bringen, welcher dem Winkel MCN $= \varepsilon$ entspricht.

Fig. 65.



Um ε zu berechnen, bezeichnen wir mit

ω den Winkel der Sonnenstrahlen gegen die Visirebene CB; mit

r den Halbmesser FB der anvisirten Säule; mit

l die Länge des Winkelschenkels CB; und mit

φ den Winkel FCN, welcher gleich dem Winkel NCE ist.

Aus dem als gleichschenklig anzusehenden Dreiecke CFB folgt

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{r \cos \omega}{l} \tag{120}$$

und aus dem bei B rechtwinkligen Dreiecke CBE erhält man

$$\sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{r}{l}. \tag{120a}$$

Da nun $\varphi - \varepsilon$ und $\varphi + \varepsilon$ sehr kleine Winkel sind und daher

$$\varphi - \varepsilon = \frac{r \cos \omega}{l \sin 1''}$$

$$\varphi + \varepsilon = \frac{r}{l \sin 1''}$$

ist, so findet man aus diesen beiden Gleichungen sofort den Winkel

$$\varepsilon = \frac{r \sin^2 \frac{1}{2}\,\omega}{l \sin 1''} = 206265'' \, \frac{r}{l} \sin^2 \tfrac{1}{2}\,\omega, \qquad (121)$$

und für den besonderen Fall, dass $\omega = 60^0$, $r = 0',5$ und $l = 1000'$ ist, $\varepsilon = 25{,}8$ Secunden. Hieraus folgt, dass dieser Fehler selbst bei minder scharfen Messungen nicht immer übersehen werden darf.

§. 53. **Gesammtwirkung der Fehler.** Nach den in den §§. 47 bis 52 enthaltenen Formeln kann man in jedem gegebenen Falle aus bekannten Fehlerursachen deren Einwirkung auf das Messungsresultat berechnen. Angenommen, diese Rechnung wäre für ein bestimmtes Instrument und verschiedene Winkel durchgeführt worden und hätte zu dem Resultate geführt, dass der mittlere Fehler wegen excentrischer Aufstellung des Instruments $\pm\,\delta_1$ Secunden, der aus einer Excentricität der Alhidade hervorgehende $\pm\,\delta_2$ Secunden, der von der Excentricität des Fernrohrs herrührende $\pm\,\delta_3$ Secunden u. s. w. betrage, so wäre es zwar denkbar, dass in dem ungünstigsten Falle alle positiven oder alle negativen Werthe von δ zusammenträfen und der Gesammtfehler alsdann $\pm\,(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_6)$ würde, wahrscheinlich ist aber dieses Zusammentreffen nicht. Man kann daher auch die Gesammtwirkung Δ der einzelnen regelmässigen Beobachtungsfehler nicht $= \pm\,[\delta]$ setzen, sondern muss sie nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmen, welche

$$\Delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_6^2} = \sqrt{[\delta\delta]} \qquad (122)$$

liefert. Betrüge also beispielsweise jeder mittlere Fehler $\pm\,10''$, so wäre der Gesammtfehler nicht $\pm\,60''$, sondern nur $\sqrt{600} = \pm\,24'',5$.

3. Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische.

§. 54. Es ist bereits bekannt, wie man einen gegebenen Punkt des Messtisches centrisch über einem gegebenen Punkte des Felds aufstellt und gleichzeitig das Blatt nach einer gegebenen Richtung orientirt und in eine wagrechte Lage bringt; ferner, wie man mit dem Messtische und der Kippregel horizontale Winkel misst. Hier wird gelehrt, wie sich aus drei gemessenen Stücken eines beliebigen Dreiecks auf dem Felde ein diesem ähnliches Dreieck auf dem Messtischblatte zeichnen lässt.

Wenn man bloss nach dem Verhältniss der Seiten eines Felddreiecks[1] fragt, so genügt ein ähnliches Dreieck auf dem Messtische, ein Bilddreieck, vollkommen, diese Frage zu beantworten; will man aber auch Aufschluss haben über die Grösse der Seiten oder die Fläche des Dreiecks, so muss mindestens eine Seite des Felddreiecks bekannt und in einem bestimmten verjüngten Massstabe auf dem Messtischblatte aufgetragen sein, damit man

[1] Dieser Ausdruck wird der Kürze halber für »Dreieck auf dem Felde« gebraucht, so wie wir ein Dreieck auf dem Messtische, das einem natürlichen ähnlich ist, das »Bilddreieck« des letzteren nennen.

die anderen Seiten mit demselben Massstabe messen kann.[1] Wir nehmen an, dass die Erforschung der absoluten Grösse der Seiten und Flächen stets mit beabsichtigt werde und setzen desshalb immer eine oder zwei Seiten als gegeben voraus.

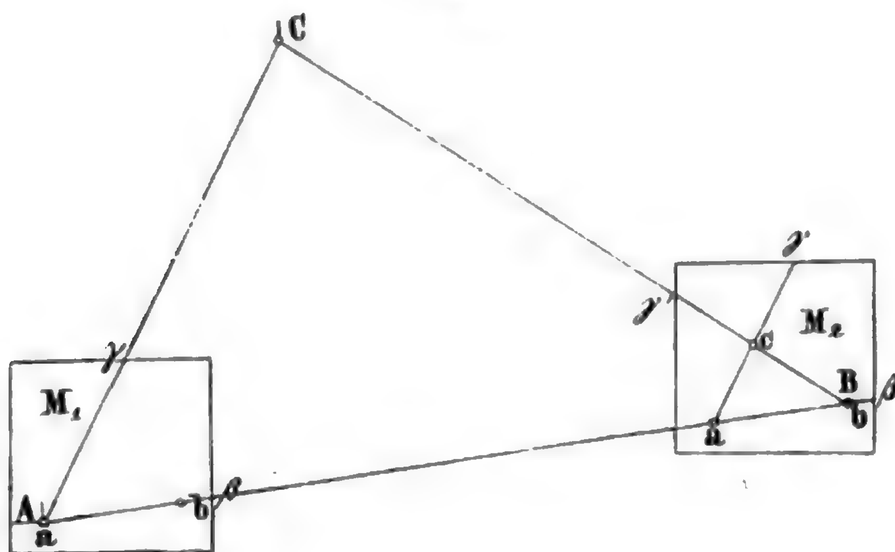
Bei der Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische kommen eigentlich nur drei verschiedene Fälle vor; es können nämlich entweder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, oder eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gemessen werden, um das Dreieck daraus zu construiren. Jeder dieser Fälle wird von den practischen Geometern kurz bezeichnet; diese Bezeichnungen sind aber sehr schwankend und meist nicht gut gewählt. Um jedoch von den gebräuchlichen Ausdrücken die besseren (wenn auch zum Theil in anderem Sinne) zu benützen, bezeichnen wir

a) durch „Vorwärtsabschneiden" die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln;

b) durch „Rückwärtsabschneiden" die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel; und

c) durch „Seitwärtsabschneiden" die Aufnahme eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Fig. 66.



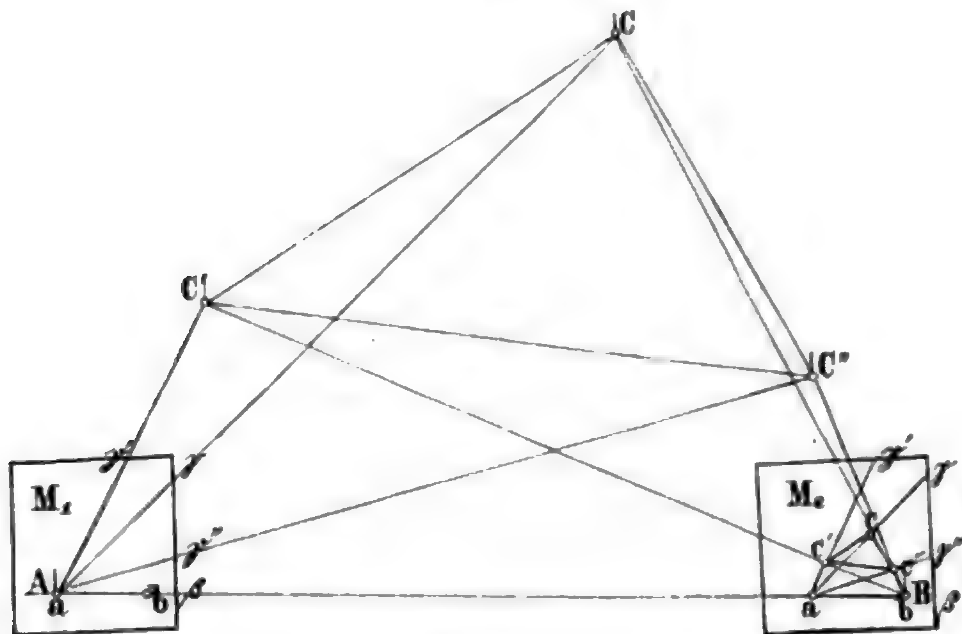
§. 55. **Aufgabe.** Ein auf dem Felde gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmen.

Das Felddreieck heisse ABC und sein Bilddreieck abc (Fig. 66). Da wir annehmen, dass es sich bloss um die Aufnahme des gegebenen Dreiecks handle, also keine der Seiten des Bilddreiecks auf dem Messtisch-

[1] Man kann zwar das Dreieck auch aufnehmen, ohne sofort die gegebene Seite in einem bestimmten verjüngten Masse aufzutragen, allein dann muss am Ende der Aufnahme deren Verjüngung erst bestimmt werden, wodurch sich der Uebelstand ergibt, dass man zur Messung der Seiten die vorhandenen verjüngten Massstäbe nicht benützen kann, sondern erst einen neuen passenden zeichnen muss.

blatte eine bestimmte Richtung gegen schon vorhandene Linien zu haben brauche: so stellen wir den Messtisch über einem der gegebenen zugänglichen Punkte (A) des Felds so auf, dass dessen Bild (a), welches durch die Lothgabel gefunden wird, eine Lage erhält, bei welcher das Bilddreieck auf dem Messtische Platz findet, ohne dass seine Ecken zu nahe an die Ränder des Blatts fallen. Ist der Tisch horizontal gestellt und der Bildpunkt a bestimmt, so legt man an diesen das Lineal der Kippregel genau an, visirt nach B und zieht an der Kante des Lineals mit einem sehr harten Bleistifte eine äusserst feine Linie aβ so lang als möglich. Auf dieser Linie muss der Punkt b liegen, und man erhält ihn, wenn die Horizontalprojection von AB gemessen und im verjüngten Masse als die Linie ab von a aus abgetragen wird. Nachdem b bestimmt ist, visirt man von a nach C und zieht wiederum eine sehr feine Linie aγ bis an den Rand des Tischblatts. Nun kommt der Messtisch von der Stellung M_1 in die M_2 über dem Punkte B und zwar dadurch, dass man b lothrecht über B und ba in die Verticalebene BA bringt, während gleichzeitig das Tischblatt horizontal gestellt wird. (Vergl. Bd. I, Abschn. III, Abth. B.) Kürzer bezeichnet man dieses Verfahren, indem man sagt: es wird b centrisch mit B gestellt

Fig. 67.

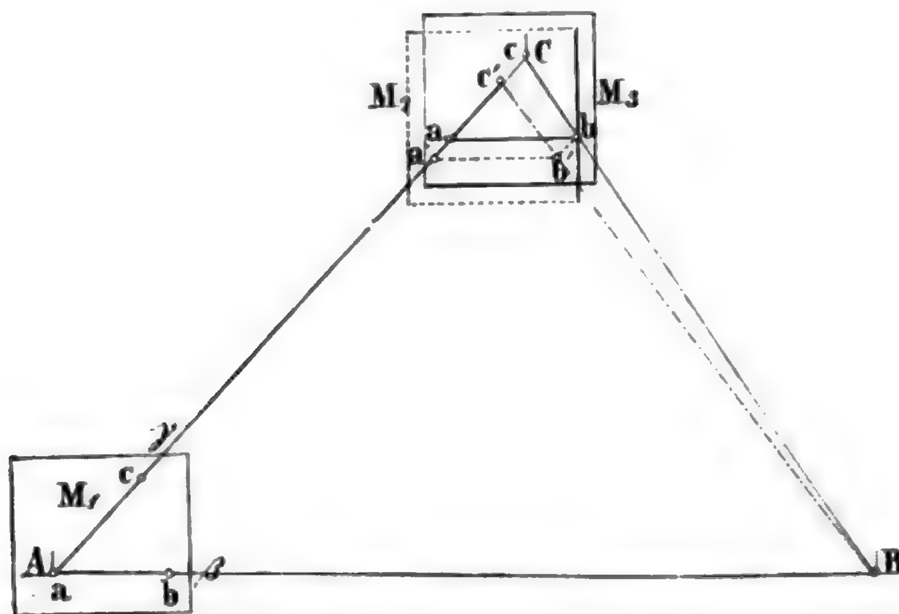


und der Tisch nach AB orientirt. Hat man sich überzeugt, dass bei horizontalem Tische die Visirlinie der an βa liegenden Kippregel das in A stehende Signal trifft, so visire man von b nach C und ziehe die Linie bγ'. Diese Linie begegnet der früher gezogenen aγ in c und schneidet somit auf dem Messtische den nach vorne liegenden Bildpunkt c ab, der mit a und b das gesuchte Dreieck abc bildet. Denn da der Winkel $\gamma a \beta = A$ und $ab\gamma' = B$, so ist das Dreieck abc dem Dreiecke ABC, wie es sein muss, ähnlich, und man kann folglich das absolute Mass von AB und BC erhalten, wenn man ac und bc mit demselben Massstabe misst, nach welchem ab aufgetragen wurde.

Da der Punkt C jede beliebige Lage haben, sich also auch in C′ oder C″ (Fig. 67) befinden kann, so ist klar, dass sich diese letzteren Punkte von A und B aus gerade so aufnehmen lassen wie der erstere. Werden aber drei solche Punkte von der Standlinie AB aus aufgenommen, so erhält man auf dem Messtische ein Dreieck cc′c″, welches dem Dreiecke CC′C″ ähnlich und eben so verjüngt ist wie die Grundlinie ab. Es geht hieraus zur Genüge hervor, dass es, um ein Dreieck durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmen, nicht gerade nöthig ist, eine seiner Seiten als Standlinie zu wählen, sondern dass sich jede Gerade dazu eignet, welche nicht zu kurz ist, leicht gemessen werden kann und von ihren Endpunkten aus eine freie Aussicht nach den aufzunehmenden Dreieckspunkten gestattet. Ferner sieht man sofort ein, dass man eine beliebige Anzahl Punkte, die um die Standlinie AB vertheilt sind und von ihr aus anvisirt werden können, durch Vorwärtsabschneiden bestimmen kann, und dass somit diese Methode auch zur Aufnahme von Vielecken geeignet ist. Uebrigens bedarf es wohl kaum der Erinnerung, dass man den Standpunkt A nicht eher verlässt, bis alle aufzunehmenden Eckpunkte anvisirt und die Linien aβ, aγ, aγ', aγ'' gezogen sind, und dass man in B ebenso zu verfahren habe.

§. 56. **Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebenes Dreieck durch Rückwärtsabschneiden aufzunehmen.**

Fig. 68.



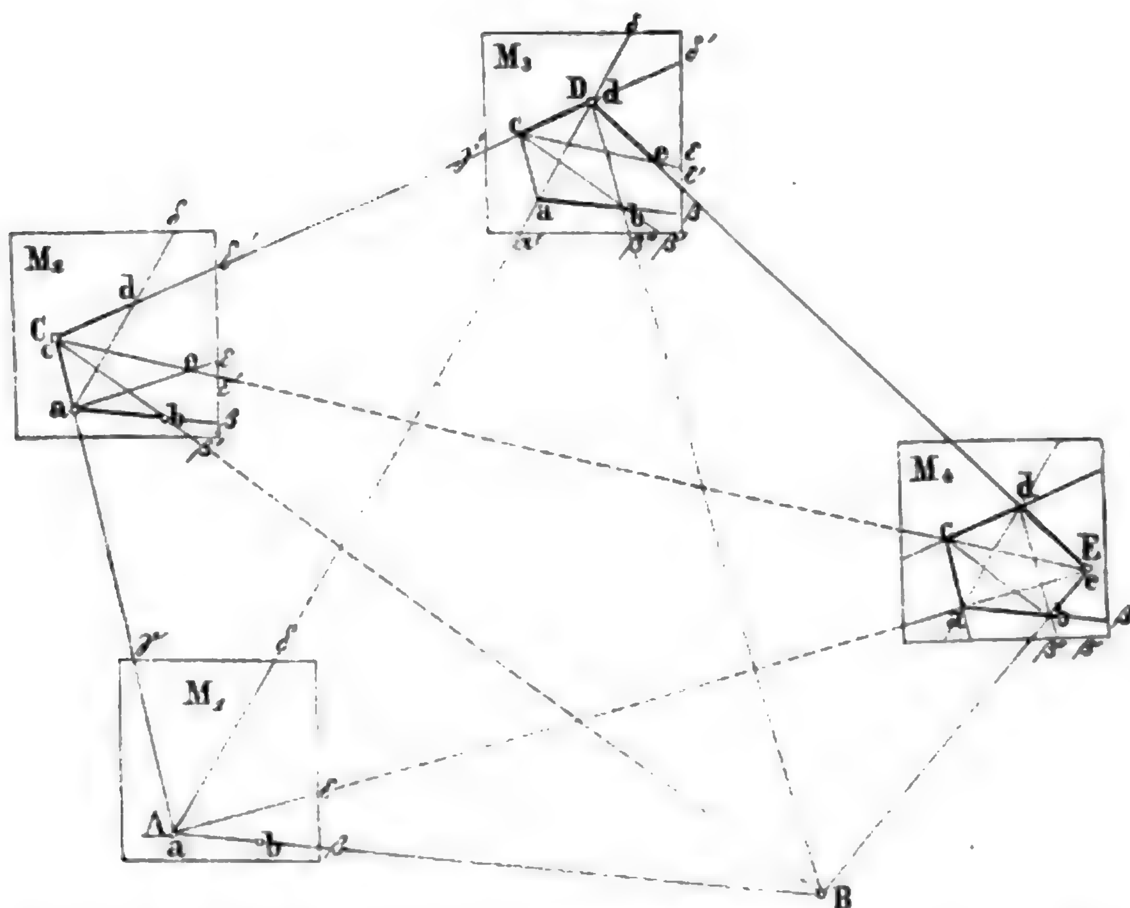
Es sei wieder ABC (Fig. 68) das gegebene Dreieck und abc das gesuchte Bilddreieck. Die Seite, welche bereits gemessen und auf den Horizont reducirt ist, heisse AB, und die zu messenden Winkel seien A und C.

In dem Punkte A stelle man den Messtisch so auf, dass a centrisch zu A und die Platte horizontal wird. Hierauf visire man nach B und C, ziehe die Linien aβ und aγ, und trage AB in verjüngtem Masse (ab) ab. Nachdem die Messung in A vollendet ist, stelle man den Messtisch über C auf. Würde die Länge des Schenkels AC bekannt sein, so könnte

man durch Abtragen ihrer Verjüngung ac auf aγ den Punkt c bestimmen, und es wäre die Aufgabe gelöst. Da aber AC unbekannt ist, so schätzt man diese Länge und nimmt danach vorläufig den Punkt c an. Die weitere Arbeit besteht nun darin, zu prüfen, ob c richtig angenommen ist und, wenn dieses nicht der Fall, den richtigen Punkt c durch das Prüfungsverfahren selbst zu finden.

Zu dem Ende macht man c centrisch zu C und orientirt das Blatt M_2 nach CA, indem man die Kippregel an ac legt und die Wendeplatte des Tisches so lange dreht, bis das Fadenkreuz der Kippregel das Signal A deckt. Findet diese Deckung statt und ist der Tisch horizontal, so lege man die Linealkante genau an den Punkt b' der Linie a'b', welche die ab in der Stellung M_2 des Messtisches repräsentirt, an, visire nach B und ziehe die Linie b'c'. Wäre M_2 die richtige Stellung des Tisches und folglich a'c die richtige verjüngte Länge von AC, so müsste der Punkt c' mit c zusammenfallen, da in den Dreiecken c'a'b' und CAB zwei Seiten proportionirt

Fig. 69.

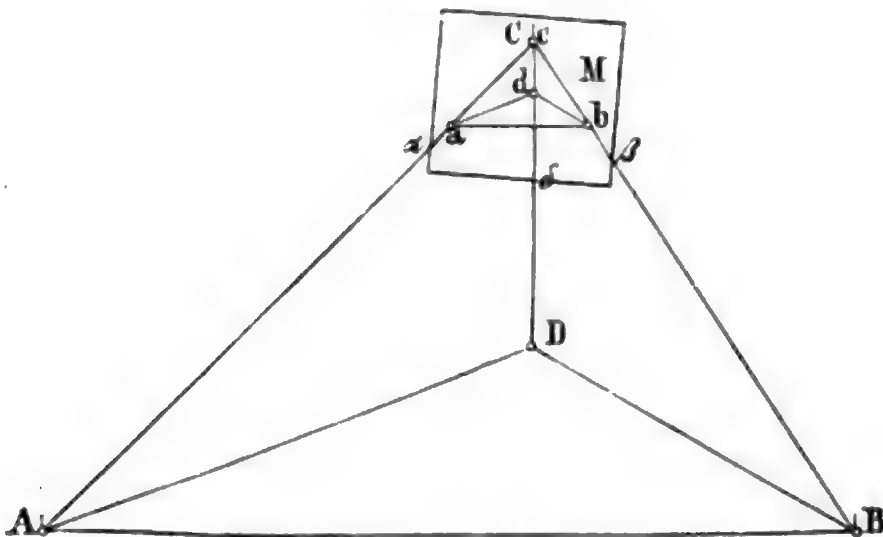


und die eingeschlossenen Winkel c'a'b' und CAB gleich wären. Fällt nun c' nicht auf c, so ist die angenommene Linie a'c um cc' entweder zu lang oder zu kurz, nach unserer Figur zu lang. Darum verschiebe man jetzt das Blatt in der Richtung von a' nach c', bis dieser neue Punkt lothrecht über C liegt, und orientire das Blatt wieder nach AC, wodurch es die Lage M_3 annimmt. Legt man nun die Linealkante an b und stellt das Fadenkreuz der Kippregel auf B ein, so wird die an dem Lineale gezogene Linie bc entweder

genau oder doch fast genau durch den Punkt c′ gehen, der jetzt in c steht, wodurch das Dreieck abc vollständig bestimmt ist; denn es ist nunmehr der Winkel bei a = dem Winkel A und der Winkel bei c = dem Winkel C. Dass das Dreieck abc in dem Massstabe gezeichnet ist, nach welchem die Seite AB aufgetragen wurde, folgt aus der Achnlichkeit der Dreiecke abc und ABC von selbst.

So wie der Punkt C rückwärts von AB abgeschnitten wurde, lässt sich jeder andere beliebige Punkt D, E (Fig. 69) abschneiden; folglich kann man auch durch dieses Verfahren ein Bilddreieck cde herstellen, welches einem gegebenen Felddreiecke CDE ähnlich ist, ohne dass man eine Seite des letzteren zu kennen braucht, wenn man nur irgend eine Gerade AB hat, deren horizontale Länge bekannt ist und welche so liegt, dass sie von den drei Punkten C, D, E aus anvisirt werden kann, wie in Fig. 69 angenommen wurde. Es versteht sich hierbei von selbst, dass es nicht nöthig ist, dass man von C nach D, oder von D nach E, oder endlich von C nach E sehen könne; gestattet jedoch das Terrain in einer oder der anderen dieser Richtungen das Visiren, so wird man diese sich von selbst darbietende Controle der Messung nicht von der Hand weisen. Wie die einzelnen Linien der Fig. 69 in den vier Lagen M_1, M_2, M_3, M_4 des Messtisches nach und nach entstanden sind und sich das Vieleck abcde, welches dem natürlichen Polygon ABCDE ähnlich ist, ergeben hat, bedarf nach den vorausgehenden Erörterungen wohl keiner besonderen Erklärung mehr.

Fig. 70.



§. 57. Aufgabe. Ein in der Natur gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Seitwärtsabschneiden aufzunehmen.

Das aufzunehmende Dreieck heisse ABC und sein Bild abc (Fig. 70). Man messe auf dem Felde die Horizontalprojectionen zweier Seiten (AC, BC), stelle im Scheitel des von ihnen gebildeten Winkels (C) den Messtisch horizontal, projicire diesen Winkelscheitel auf die Tischplatte, lege die Linealkante der Kippregel an die Projection (c), visire die Signale (A, B) der beiden übrigen Dreieckspunkte an und ziehe die Linien ($c\alpha$, $c\beta$), welche

zu diesen Visirlinien gehören. Trägt man nun auf beiden die verjüngten Seitenprojectionen (ca, cb) ab und verbindet die Endpunkte (a, b), so ist das hierdurch entstehende Dreieck abc dem Dreiecke ABC ähnlich, da beide proportionirte Seiten und zwischen diesen gleiche Winkel haben.

Wäre noch ein vierter Punkt D auf dem Felde gegeben gewesen, so hätte man denselben von C aus ebenso wie A oder B aufnehmen und durch den Punkt d auf dem Messtische darstellen können. Demnach erhielte man das Tischdreieck abd von einem Punkte C ausserhalb des Felddreiecks ABD bloss durch wiederholte Anwendung der Methode des Seitwärtsabschneidens. Denn indem man von c nach D visirt, die Linie cδ zieht und auf derselben die Verjüngung von CD = cd abträgt, hat man eigentlich die drei Dreiecke ABC, ACD, BCD direct durch Abmessung zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels, ADB aber indirect aus den drei durch Construction sich ergebenden Stücken ad, db, W . adb aufgenommen.

Es ist hiernach leicht einzusehen, wie sich durch Seitwärtsabschneiden ein Vieleck aufnehmen lässt, ohne dass man den Messtisch in einem der Eckpunkte aufstellt. Damit wird aber keineswegs behauptet, dass diese Methode practisch und der in §. 70 beschriebenen vorzuziehen sei. Bei besonderen Localverhältnissen kann übrigens von ihr in Beziehung auf einzelne Polygonpunkte Gebrauch gemacht werden.

§. 58. **Aufgabe. Man soll den Messtisch, auf welchem das Bild einer unzugänglichen Geraden gegeben ist, in einem annähernd gegebenen Punkte orientiren.**

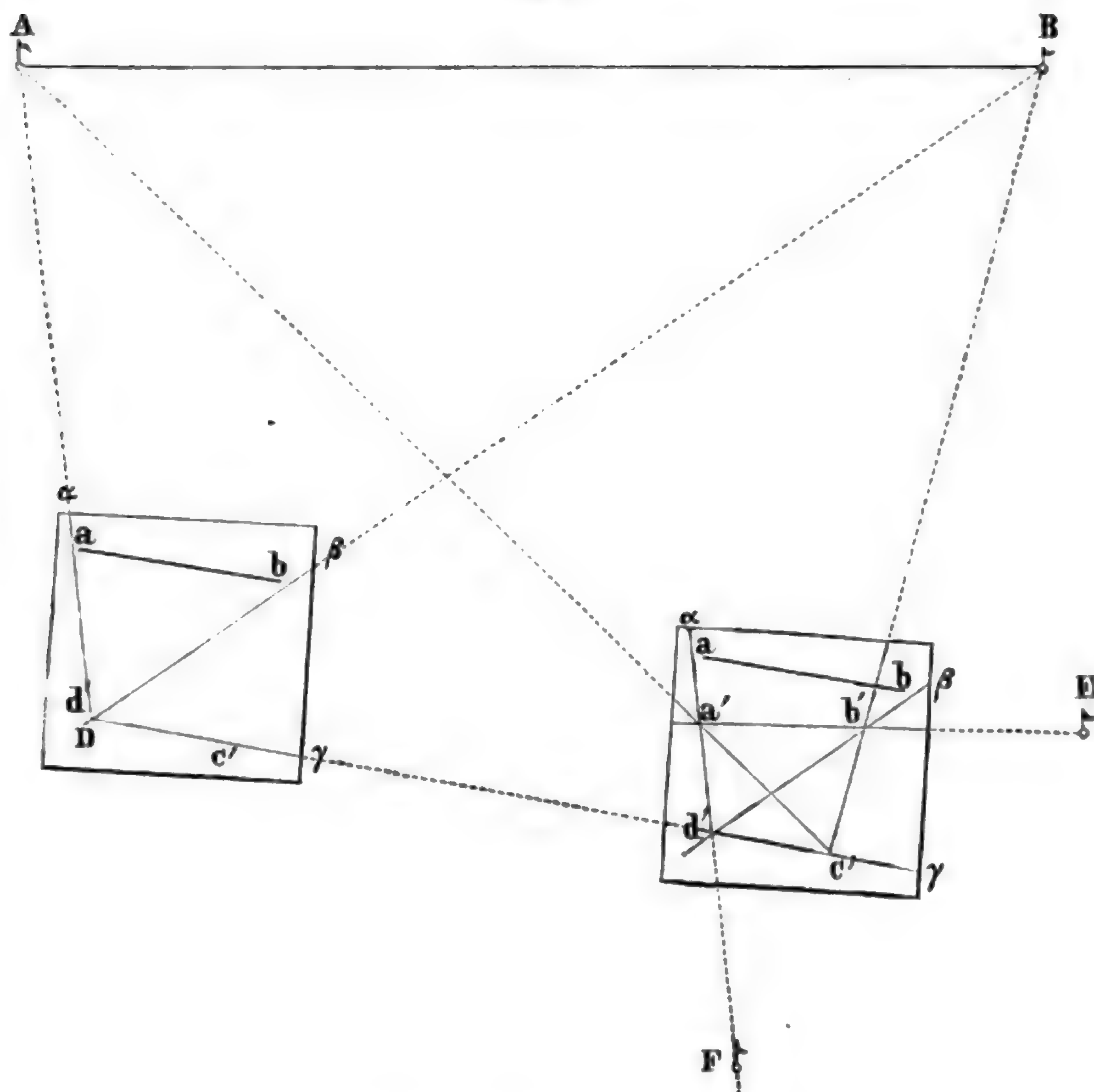
Sind A und B die unzugänglichen Punkte des Felds und a, b ihre Bilder, sowie C der auf dem Felde annähernd gegebene und c der auf dem Messtische gesuchte Punkt, so handelt es sich hier sowohl um die Bestimmung des Dreiecks ABC durch das ähnliche Dreieck abc, als auch darum, den Messtisch über C so aufzustellen, dass die Seiten des Dreiecks abc den gleichnamigen des Dreiecks ABC parallel werden.

Stellt man nun zunächst in einem beliebigen Punkte D des Felds den Messtisch so auf, dass ab dem Augenmasse nach zu AB parallel ist; visirt man ferner von dem auf den Tisch projicirten Bildpunkte d' die Punkte A, B, C an und zieht die Visirlinien d'α, d'β, d'γ; versetzt man hierauf den Messtisch nach C und zwar so, dass das nach dem Augenmasse angenommene Bild c'd' von CD in die Verticalebene CD fällt, während c' lothrecht über C liegt; und schneidet man endlich die Punkte A und B von c' aus ein: so entsteht das Viereck a'b'c'd', welches dem Vierecke ABCD ähnlich und parallel ist. Die Lage, welche der Messtisch jetzt hat, muss nun dazu benützt werden: erstens ab parallel zu AB zu machen, und zweitens über ab ein den Vierecken ABCD und a'b'c'd' ähnliches zu beschreiben.

Zu dem Ende lege man die Kippregel an a'b' so genau als möglich und stelle in grosser Entfernung einen Stab oder ein Signal E in die Visirlinie; ebenso verfahre man mit der Richtung a'd', indem man das Signal F bestimmt, und schliesslich senkele man den Punkt a' auf das Feld und

bezeichne seine Projection mit einem Pfahle G. Ist dieses bei unveränderter Lage des Messtisches geschehen, so verändere man jetzt diese Lage so, dass der Punkt a über G und die Linie ab in die Richtung GE kommt; alsdann schneide man c durch die Visirlinien aA, bB und d durch cD, aF ab, senkele c auf das Feld und bestimme hierdurch die definitive Lage von C. Hiermit ist die Aufgabe gelöst.

Fig. 71.

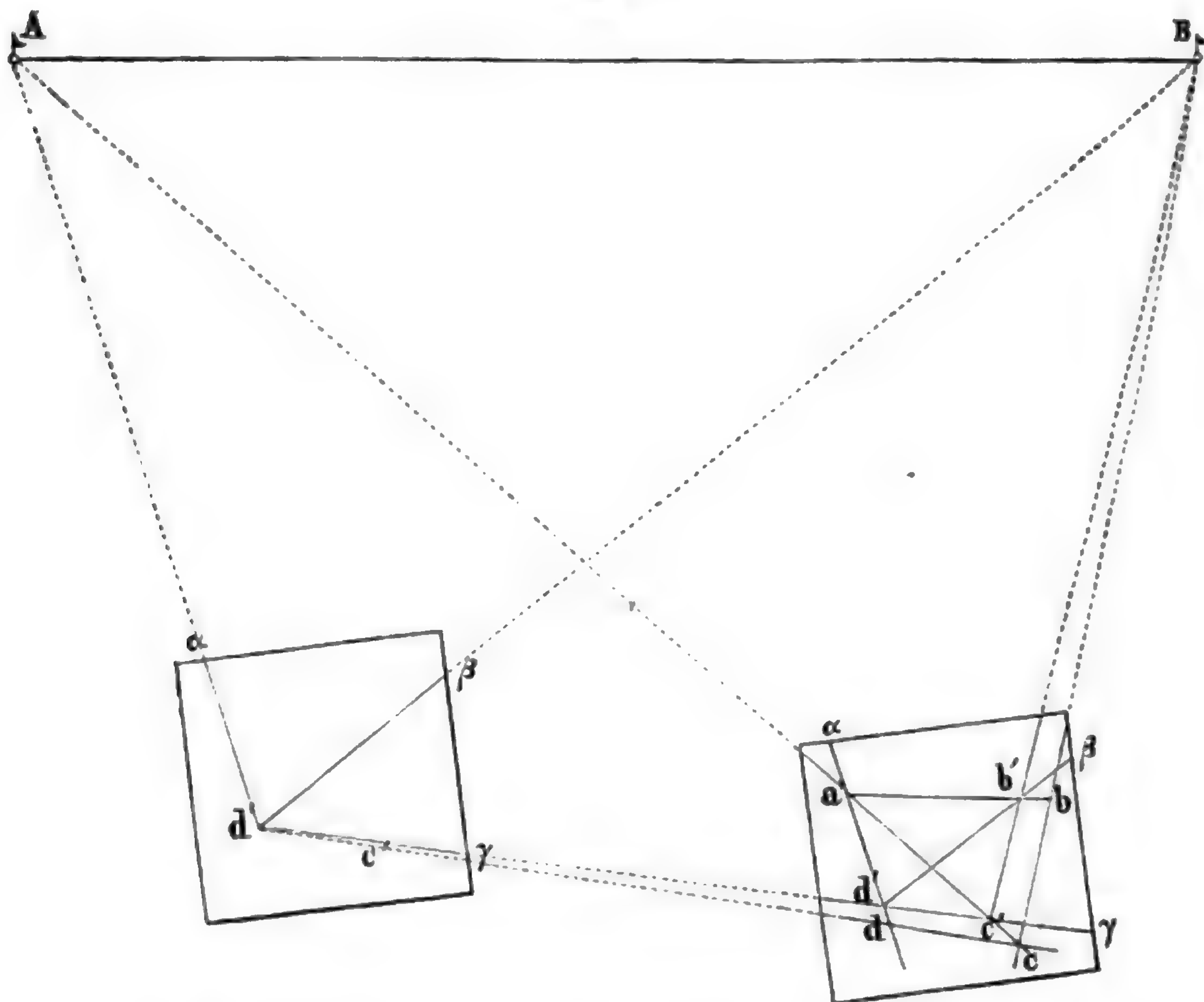


§. 59. **Aufgabe. Die Entfernung zweier unzugänglichen Punkte A, B ist bekannt: man soll die Lage von zwei zugänglichen Punkten C, D gegen A und B bestimmen.**

Durch Aufstellen des Messtisches über D und C bilde man wie in dem vorigen Falle ein dem Vierecke ABCD ähnliches und parallel liegendes a′b′c′d′. Nun trage man auf a′b′ von a′ aus das verjüngte Mass von AB = a′b ab und bestimme den Punkt c durch Rückwärtsabschneiden auf A und B. Senkelt man c auf das Feld, so ergibt sich die definitive Lage des Punkts C und der Tisch ist über diesem Punkte orientirt. Um noch die richtige Lage des Bilds von D zu finden, darf man nur von c

nach D visiren und den Schnitt d mit der verlängerten a'd' bestimmen, welcher das gesuchte Bild ist. Man hat somit durch ein einfaches Verfahren die Lage zweier unbekannten Punkte gegen zwei andere gefunden, von denen man bloss ihren horizontalen Abstand kennt; ein Ergebniss, das vielfältig benützt werden kann.

Fig. 72.



Die hier behandelte Aufgabe führt in der practischen Geometrie auch den Namen „Hansen'sche Aufgabe“, weil Hansen im Jahre 1841 eine trigonometrische Lösung derselben gegeben und nicht nur diese Lösung, sondern auch die Aufgabe selbst als neu bezeichnet hat. Die letztere Bezeichnung ist aber aus den in Abschn. II, D, 8 angegebenen Gründen unrichtig.

4. Aufnahme der Dreiecke mit dem Theodolithen.

§. 60. Handelt es sich bei der Bestimmung der Winkel eines ebenen Dreiecks nicht um den grösstmöglichen Grad der Genauigkeit, so genügt es, zwei Winkel dieses Dreiecks unmittelbar zu messen und den dritten zu berechnen. Es werden dann allerdings die drei Winkel nicht gleich genau sein, indem der berechnete Winkel die algebraische Summe der Beobachtungsfehler, welche in den gemessenen Winkeln stecken, enthält; aber da

diese Fehler als äusserst klein vorausgesetzt werden, so wird auch ihre Summe nicht bedeutend sein.

Wenn dagegen das ebene Dreieck, dessen Winkel zu bestimmen sind, einen Bestandtheil eines trigonometrischen Netzes bildet, das einer grösseren Flurvermessung zu Grunde liegt; wenn also von diesem Dreiecke wieder andere Dreiecke, die an seinen Seiten liegen, unmittelbar, und jene Dreiecke, die sich an diese anschliessen, mittelbar abhängen; so unterlässt man es nicht, alle drei Winkel des Dreiecks direct oder nöthigenfalls durch Centrirung zu messen. Indem man alsdann die beobachtete Winkelsumme mit der theoretischen von 180° vergleicht, erhält man nicht nur ein Urtheil über die Genauigkeit der Messung, sondern kann auch durch Vertheilung der Differenz beider Summen auf die drei Winkel den Fehler in jedem einzelnen Winkel im Allgemeinen kleiner machen, als er in dem Falle ist, wo man bloss zwei Winkel misst und den dritten berechnet.

Die unmittelbare Messung aller Winkel eines Dreiecks, welche in der Regel schon für ein ebenes Dreiecksnetz gefordert wird, ist unerlässlich für ein sphärisches Dreieck oder ein aus solchen Dreiecken bestehendes Netz. In diesem Falle ist die Summe aller Winkel des Dreiecks grösser als 180°, und es heisst der Ueberschuss dieser Summe der sphärische Excess. Bezeichnet man diese von der Form des Dreiecks abhängende Grösse mit ε, so soll die beobachtete Winkelsumme $= 180^0 + \varepsilon$ sein; da sie es aber nie oder nur zufällig ist, so besteht auch hier wieder eine Differenz, welche uns ein Urtheil über die Genauigkeit der Winkelmessungen und Gelegenheit zu deren Verbesserungen gibt. Heisst nämlich die beobachtete Winkelsumme $180^0 + \varepsilon'$, so ist die Winkeldifferenz $\varepsilon - \varepsilon'$ zu vertheilen.

In welcher Weise diese Vertheilung sowohl bei sphärischen als ebenen Dreiecken zu geschehen habe, hängt davon ab, ob alle drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen sind oder nicht. Sind alle Winkel gleich genau, so wird die Differenz $\varepsilon - \varepsilon'$ nach §. 22, S. 26 gleichheitlich vertheilt; ist aber die Genauigkeit verschieden, so vertheilt man die Grösse $\varepsilon - \varepsilon'$ nach §. 24, S. 27 im umgekehrten Verhältniss der Gewichte, welche den einzelnen Winkelmessungen zukommen.

§. 61. **Aufgabe. Man soll den sphärischen Excess eines geodätischen Dreiecks bestimmen.**

Obwohl die Seiten eines Dreiecks, das einem trigonometrischen Netze für eine Landes- oder Gradmessung angehört, in Wirklichkeit keine grössten Kreise einer Kugel, sondern richtiger Verticalschnitte des Erdsphäroids und, ganz streng genommen, geodätische Linien sind: so pflegt man doch den sphärischen Excess eines solchen Dreiecks so zu berechnen, als ob dieses ein Kugeldreieck wäre, und man ist dazu berechtigt, weil der hieraus entspringende Fehler ganz unmerklich wird, indem selbst die grössten geodätischen Dreiecke nur einen ausserordentlich kleinen Theil der Erdoberfläche umschliessen. Hier wird zunächst der sphärische Excess aus den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks (das also kein geodätisches zu sein braucht)

bestimmt und dann gezeigt, wie man daraus den Excess der Erddreiecke findet, wenn entweder auch drei Seiten, oder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und zwei ihr anliegende Winkel bekannt sind.

Bezeichnen a, b, c die gegebenen Seiten und A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel des sphärischen Dreiecks ABC, dessen Excess

$$\varepsilon = A + B + C - 180^0$$

gesucht wird, so kann man nach Gent (Grunert's Archiv Bd. 20, S. 358) aus den Gauss'schen Formeln:

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2} C$$

zunächst die folgenden Gleichungen bilden:

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \mp \cos(90^0 - \tfrac{1}{2} C)}{\sin \tfrac{1}{2} C} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a + b) \mp \cos \tfrac{1}{2} c}{\cos \tfrac{1}{2} c},$$
$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \mp \sin(90^0 - \tfrac{1}{2} C)}{\cos \tfrac{1}{2} C} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a - b) \mp \cos \tfrac{1}{2} c}{\cos \tfrac{1}{2} c}$$

und hieraus durch einfache Zerlegungen der Zähler die nachstehenden Relationen ableiten, in denen

$$a + b + c = 2s \text{ und } A + B - C + 180^0 = \omega$$

gesetzt ist und ε den gesuchten sphärischen Excess bedeutet:

$$\sin \tfrac{1}{4} \varepsilon \sin \tfrac{1}{4} \omega \cos \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2} s \sin \tfrac{1}{2}(s - c) \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos \tfrac{1}{4} \varepsilon \cos \tfrac{1}{4} \omega \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2}(s - c) \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$\sin \tfrac{1}{4} \varepsilon \cos \tfrac{1}{4} \omega \cos \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(s - a) \sin \tfrac{1}{2}(s - b) \cos \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos \tfrac{1}{4} \varepsilon \sin \tfrac{1}{4} \omega \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(s - a) \cos \tfrac{1}{2}(s - b) \cos \tfrac{1}{2} C.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweite und die dritte durch die vierte, so folgt:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4} \varepsilon \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} \omega = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s - c),$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4} \varepsilon \cot \tfrac{1}{4} \omega = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s - a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s - b),$$

und wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man zur Berechnung des sphärischen Excesses irgend eines Kugeldreiecks den zuerst von Lhuilier aufgefundenen Ausdruck:

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{4} \varepsilon = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s - a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s - b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s - c). \quad (123)$$

Um von der Grösse des sphärischen Excesses der geodätischen Dreiecke eine bestimmte Anschauung zu geben, denken wir uns ein gleichseitiges Kugeldreieck und berechnen daraus Excesse für verschiedene Werthe der Seiten nach der Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{4} \varepsilon = \operatorname{tg} \tfrac{3}{4} a \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{4} a, \quad (124)$$

welche aus der vorhergehenden folgt, wenn man $a = b = c$ setzt. Nimmt man nacheinander $a = 1, 5, 10, 15$ geogr. Meilen $= 4, 20, 40, 60$ Minuten an, so wird der sphärische Excess beziehlich $\frac{1}{8}$, 3, 12, 27 Secunden.

Hieraus erhellt vorläufig zur Genüge, dass man bei Erddreiecken, deren Seiten weniger als eine Meile oder auch nur weniger als 10 Kilometer betragen, gar keine Rücksicht auf den sphärischen Excess zu nehmen braucht, und dieselben folglich als ebene Dreiecke behandeln kann.

Da die Seiten a, b, c der geodätischen Dreiecke stets nur einen sehr kleinen Theil eines grössten Kreises der Erdkugel ausmachen, und meistentheils die halbe Summe aller drei Seiten kleiner als ein Erdgrad, d. h. kleiner als 15 Meilen ist, so darf (unter r den Halbmesser der Erdkugel und unter a, b, c, s die wirklichen Längen der Seiten verstanden) in dem Ausdrucke (123)

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\, s = \frac{s}{2r};\ \operatorname{tg} {}^1/_2 (s - a) = \frac{s - a}{2r};\ \operatorname{tg} {}^1/_2 (s - b) = \frac{s - b}{2r}$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 (s - c) = \frac{s - c}{2r};\ \operatorname{tg} {}^1/_4\, \varepsilon = {}^1/_4\, \varepsilon \operatorname{tg} 1''$$

gesetzt und jener Ausdruck dadurch in den folgenden verwandelt werden:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{r^2 \operatorname{tg} 1''}. \qquad (125)$$

Nun ist aber aus der ebenen Trigonometrie bekannt, dass die Fläche f eines ebenen Dreiecks, welches die Seiten a, b, c hat, der Quadratwurzel aus s (s — a) (s — b) (s — c) gleich ist; führt man daher in die letzte Gleichung f ein, so wird für ein Dreieck, dessen Seiten im Verhältniss zur Kugel, auf der es liegt, klein sind, also für ein geodätisches Dreieck, der sphärische Excess:

$$\varepsilon = \frac{f}{r^2 \operatorname{tg} 1''} = 206265'' \cdot \frac{f}{r^2} \qquad (126)$$

Sind zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C' eines ebenen Dreiecks ABC bekannt, so ist

$$f = {}^1/_2\, a\, b \sin C';$$

in dem vorliegenden Falle ist aber nicht C', sondern der Winkel C bekannt, welcher um $^1/_3\ \varepsilon$ grösser ist als C'. Bedenkt man jedoch, dass selbst bei Dreiecken, deren Seiten 5 Meilen lang sind, $^1/_3\ \varepsilon$ nur ungefähr 1 Secunde beträgt und dass folglich bei gleichseitigen Dreiecken die Fläche f, wenn man C statt C' setzt, nur in dem Verhältniss von sin 60° 0' 1" zu sin 60° zu gross wird, und dass sich mithin auch ε nur um $^1/_{300000}$ seines eigenen Werths zu gross darstellt: so kann unbeschadet der Genauigkeit, welche sich durch die feinsten Mittel noch erreichen lässt, $f = {}^1/_2\, a\, b \sin C$ und

$$\varepsilon = \frac{a\, b \sin C}{2r^2 \operatorname{tg} 1''} = 206265'' \cdot \frac{a\, b \sin C}{2\, r^2} \qquad (127)$$

gesetzt werden. Kennt man in einem sphärischen Dreiecke ABC eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel A und B, so ist aus dem vorhin angegebenen Grunde der sphärische Excess genau genug durch die Formel

$$\varepsilon = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2r^2 \sin (A + B) \operatorname{tg} 1''} \qquad (128)$$

ausgedrückt. (Eine andere Ableitung der Ausdrücke (125) und (126) aus der Lhuilier'schen Gleichung (123) enthält Crelle's Journal d. Math. Bd. 50, S. 39.)

§. 62. **Aufgabe.** In einem Dreiecke ABC, dessen Seite AB = c = 24187,5 Toisen ist, wurde unter übrigens gleichen Umständen der Winkel bei

A mit dem Gewichte 10 = 71° 48′ 34″,3
B mit dem Gewichte 20 = 48° 27′ 12″,8
C mit dem Gewichte 12 = 59° 44′ 22″,5

gemessen: man soll diese Winkel ausgleichen.

Zuerst ist der sphärische Excess ε nach der vorstehenden Formel zu berechnen. In diesem Ausdrucke ist bekannt:

$$c = 24187^T,5; \; r = 3266608^T; \; \frac{1''}{\mathrm{tg}\,1''} = 206265''.$$

Die Winkel A und B könnte man zwar nehmen, wie sie gemessen wurden: da jedoch $\alpha + \beta + \gamma = 180^0\,0'\,9'',6$ gegeben ist, so sind die Werthe von A und B, welche um den dritten Theil von $\varepsilon' = 9'',6$ d. i. um 3″,2 verkleinert sind, zur Berechnung des sphärischen Excesses am geeignetsten, nämlich:

$$A' = 71^0\,48'\,31'',1; \; B' = 48^0\,27'\,9'',6.$$

Setzt man alle diese Werthe in den Ausdruck für ε ein und vollzieht die Ausrechnung, so findet man den Excess

$$\varepsilon = 4'',65$$

und es ist folglich die Differenz $180^0\,0'\,4'',65 - 180^0\,0'\,9'',60 = -4'',95$ auf die drei Winkel A, B, C nach §. 23, S. 26 zu vertheilen. Heissen die Verbesserungen beziehlich v_1, v_2, v_3, so hat man zunächst die Bedingungsgleichung

$$v_1 + v_2 + v_3 = -4'',95,$$

dann die drei Correlatengleichungen:

$$v_1 = \frac{k_1}{10}; \; v_2 = \frac{k_1}{20}; \; v_3 = \frac{k_1}{12}$$

und schliesslich die Normalgleichung

$$\left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{12}\right) k_1 = 0,233\,k_1 = -4'',95.$$

Hieraus findet man $k_1 = -21'',25$ und damit die Verbesserungen

$$v_1 = -2'',12; \; v_2 = -1'',06; \; v_3 = -1'',77.$$

Es sind somit die verbesserten Winkel:

$$A = 71^0\,48'\,32'',18$$
$$B = 48^0\,27'\,11'',74$$
$$C = 59^0\,44'\,20'',73$$

und die Summe dieser drei Winkel beträgt $180^0\,0'\,4'',65$, wie es sein muss.

5. Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf Dreiecksberechnungen.

§. 63. Ein Dreieck ist durch drei Stücke bestimmt, wenn sich darunter eine Seite befindet. Sind diese Stücke mit mathematischer Genauigkeit gegeben, so werden auch die übrigen Stücke mit dieser Genauigkeit gefunden; enthalten aber die gegebenen Stücke kleine Fehler, so müssen nothwendig auch die aus ihnen berechneten Stücke des Dreiecks mehr oder minder fehlerhaft werden. Es ist nun für den practischen Geometer wichtig, zu wissen: innerhalb welcher Grenzen die berechneten Stücke eines Drei-

ecks falsch sind, wenn die Fehlergrenzen der Messungsresultate bekannt sind, und für welche Form der Dreiecke der Einfluss der Beobachtungsfehler möglichst klein wird.

Bei der nachfolgenden Untersuchung dieser Fragen wird vorausgesetzt, dass die Messungsfehler nicht von einem schlechten Zustande der Instrumente oder von der Ungeschicklichkeit oder Nachlässigkeit des Geometers herrühren, sondern dass sie zu den unvermeidlichen Fehlern gehören, also möglichst klein sind. Werden nun zwei so kleine Grössen mit einander multiplicirt, so kann ihr Product gegen jedes andere Product, das aus einer gemessenen Grösse und deren Zuwachs oder Abnahme hervorgeht, vernachlässigt werden, so wie die zweite Potenz der Fehlergrösse verschwindend klein ist gegen ihre erste Potenz.

Unter dieser Voraussetzung, und da es sich bei Betrachtung der Folgen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler doch nur um annähernde Resultate handelt, ist es gestattet, die Aenderung, welche eine Function von gemessenen und desshalb fehlerhaften Grössen erleidet, wenn letztere um ihre Fehler verbessert werden, dadurch zu finden, dass man jene Function nach den einer geringen Veränderlichkeit fähigen Grössen differentiirt.

Sind z. B. die Grundlinie x und die Höhe y eines Parallelogramms beziehlich um Δx und Δy zu klein gemessen worden, also ihre wahren Längen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, so ist der wahre Flächeninhalt des Parallelogramms

$$(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y,$$

während der aus den Messungsresultaten hervorgehende xy ist. Die Aenderung nun, welche der Ausdruck xy erleidet, indem man $x + \Delta x$ für x und $y + \Delta y$ für y setzt, ist mit Rücksicht auf die Bemerkung über die Grösse des Products $\Delta x\,\Delta y$:

$$\Delta(xy) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\,\Delta y + y\,\Delta x.$$

Vergleicht man aber dieses Ergebniss mit dem, welches aus der Differentiirung des Products xy hervorgeht, so unterscheidet es sich von letzterem nur dadurch, dass hier Δ steht, wo dort d; und dieser Unterschied rührt lediglich davon her, dass die Fehler Δx, Δy keine unendlich kleinen Grössen sind und zu sein brauchen, obwohl sie immerhin als sehr klein zu denken sind. Wir werden übrigens in den nachfolgenden Entwickelungen dx, dy statt Δx, Δy schreiben und uns also darunter sehr kleine Werthe vorstellen.

Die Fehler dx und dy können ebensowohl positiv als negativ sein und es kann $+ dx$ mit $+ dy$, $+ dx$ mit $- dy$, $- dx$ mit $+ dy$ und $- dx$ mit $- dy$ zusammentreffen.

Bewegt sich also der wahre Werth einer Linie x zwischen $x + dx$ und $x - dx$, jener der Linie y aber zwischen $y + dy$ und $y - dy$, so kann der wahre Werth des Verhältnisses beider von dem Verhältniss $x : y$ ebensowohl um die Grösse

$$\pm \frac{y\,dx + x\,dy}{y^2} \text{ als um die Grösse } \pm \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

verschieden sein. Die äussersten Grenzen des Verhältnisswerths sind demnach

$$\frac{x}{y} + \frac{y\,dx + x\,dy}{y^2} \text{ und } \frac{x}{y} - \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

Stellen dx und dy Fehler vor, welche bei Winkelmessungen unvermeidlich waren, so sind dieselben, wenn sie mit den Winkeln, denen sie angehören, unmittelbar verglichen werden, auch in derselben Masseinheit, worin diese gegeben sind, auszudrücken, so dass, wenn in einem Winkel x von 37° 40′ 20″ ein Fehler dx von 5″ vorkäme, der absolute Werth von dx = 5″ wäre, während der von x = 135620″ ist. Der relative Fehler würde demnach sein:

$$\frac{dx}{x} = \frac{5}{135620} = \frac{1}{27124}.$$

Ist aber ein Winkel nicht unmittelbar, sondern durch irgend eine trigonometrische Function d. h. durch das Verhältniss zweier Linien gegeben, so muss auch sein Fehler durch ein solches Verhältniss ausgedrückt werden. Das passendste Verhältniss gibt in diesem Falle, da der Fehler immer nur klein sein darf, der Kreisbogen, welcher den Winkelfehler misst, zu dem Halbmesser 1 des Kreises. Hiernach ist ein Fehler von 1 Secunde gleich

$$\frac{2\pi}{360\,.\,60\,.\,60} = \frac{1}{206265}, \qquad (129)$$

und der Fehler von einer Minute gleich

$$\frac{2\pi}{360\,.\,60} = \frac{60}{206265} = \frac{1}{3438}. \qquad (130)$$

Hätte man sin x . dx zu berechnen, in welchem x = 37° 40′ 20″ ist und dx einem absoluten Fehler von 5″ entspricht, so würde wie folgt zu verfahren sein. Es ist nämlich

$$\log \sin x = \log (\sin 37^0\,40'\,20'') = 0{,}78614 - 1$$

$$\log dx = \log \left(\frac{5}{206265}\right) = \log \left(\frac{1}{41253}\right) = 0{,}38455 - 5$$

$$\log (\sin x\,.\,dx) = \log \sin x + \log dx = 0{,}17069 - 5$$

$$\sin x\,.\,dx = 0{,}0000148.$$

Nach dieser Vorbereitung wird das Nachfolgende leicht zu verstehen und anzuwenden sein.

§. 64. **Aufgabe. Ein Dreieck ist durch Vorwärtsabschneiden aufgenommen worden; man soll bestimmen, welchen Einfluss die Beobachtungsfehler auf die berechneten Seiten haben, und wann dieser Einfluss am kleinsten wird.**

Das Dreieck heisse ABC, die gemessene Seite sei c und die beiden anliegenden ebenfalls gemessenen Winkel seien A und B. Die Messungsfehler sollen $\pm$ dc, $\pm$ dA, $\pm$ dB sein. Es fragt sich, innerhalb welcher Grenzen die berechneten Werthe der Seiten a und b unsicher sind.

Betrachten wir zuerst die Seite a und nehmen wir an, alle Beobachtungsfehler seien positiv, also die Seite c um dc, der Winkel A um dA und der Winkel B um dB zu klein gemessen, so dass die richtigen Werthe

beziehlich $c + dc$, $A + dA$ und $B + dB$ sind. Sucht man die Seite a aus den durch Beobachtung gefundenen Grössen c, A und B, so dient dazu die bekannte Gleichung:

$$a = \frac{c \sin A}{\sin (A + B)}. \tag{131}$$

Würde man nun in diesem Ausdrucke $c + dc$ für c, $A + dA$ für A, und $B + dB$ für B setzen, so fände man einen zweiten Werth von a und dessen Unterschied von dem ersten gäbe den Fehler in der Seite a. Diesen Fehler erhält man aber unmittelbar, wenn man die vorstehende Gleichung in dem Sinne differentiirt, welcher im §. 63 angedeutet wurde.

Zur Vereinfachung dieses Geschäfts kann man die Gleichung (131) auch so schreiben:

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin (A + B).$$

und daraus durch Differentiiren erhalten:

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{dA}{\operatorname{tg} A} - \frac{dA + dB}{\operatorname{tg} (A + B)}. \tag{132}$$

Der Ausdruck rechts liefert, wie man sieht, das Verhältniss des Fehlers in der Seite a zu dieser Seite selbst. Wären beide Winkel fehlerfrei gewesen, so würde

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c},$$

d. h. die berechnete Seite a in demselben Verhältniss falsch sein, als die gemessene Seite c. Wäre dagegen die Seite c ohne Fehler, so erhielte man

$$\frac{da}{a} = \frac{dA}{\operatorname{tg} A} - \frac{dA + dB}{\operatorname{tg} (A + B)},$$

oder, wenn man $A + B = 180^0 - C$ setzt und berücksichtigt, dass $\operatorname{tg} (180^0 - C) = - \operatorname{tg} C$ ist:

$$\frac{da}{a} = \frac{dA}{\operatorname{tg} A} + \frac{dA + dB}{\operatorname{tg} C}. \tag{133}$$

Hiernach wird der Werth des Fehlers da um so grösser, je kleiner tg C, d. h. je spitzer der Winkel C ist, und es wird bei unverändertem A der Fehler da um so kleiner, je mehr sich der Winkel C einem rechten nähert, oder darüber hinaus geht.

Sind die Fehler dc, dA, dB mit negativen oder verschiedenen Vorzeichen versehen, so darf man nur, um den Werth von $da : a$ zu erhalten, in der rechten Seite der Gleichung (132) diese Vorzeichen einführen. Stellt man alle möglichen Werthe des Verhältnisses $da : a$ her, so wird einer den grössten absoluten Werth haben, und da dieser Werth sowohl positiv als negativ sein kann, so gibt derselbe den Spielraum an, innerhalb dessen sich der relative Fehler $da : a$ bewegen kann.

Dass dieselben Betrachtungen, welche für die Seite a angestellt werden können, auch für b gelten, versteht sich von selbst. Es wird demnach auch

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \frac{dB}{\operatorname{tg} B} - \frac{dA + dB}{\operatorname{tg} (A + B)} \tag{134}$$

sein. Fragt man, unter welcher Bedingung

$$\frac{db}{b} = \frac{da}{a}$$

wird, so liefern die Gleichungen (132) und (134) sofort die Antwort: wenn $B = A$ ist. Fragt man weiter, unter welcher Bedingung der Fehler in der berechneten Seite b am kleinsten wird, vorausgesetzt, dass dc null oder constant ist, so ist die Antwort darauf dieselbe, welche aus der Gleichung (133) für die Seite a hervorging.

Stellt man jetzt die Frage auf: wie muss ein durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmendes Dreieck beschaffen sein, wenn dasselbe den Messungsfehlern unter allen Verhältnissen den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Seiten gestatten soll: so kann man sich die Antwort, dass es gleichseitig oder doch nahezu gleichseitig sein muss, leicht selbst geben. Denn nimmt man es aus der Seite c auf, so soll für a und b der Winkel C sich 90^0 nähern; wird es aus a aufgenommen, so gilt dieselbe Forderung für den Winkel A, um die Fehler in b und c möglichst klein zu machen; und macht man die Seite b zur Basis, so soll, um da und dc möglichst klein zu erhalten, der Winkel B sich 90^0 nähern. Da es aber nicht möglich ist, dass alle drei Winkel zugleich 90^0 nahe kommen, und da die Fehler da, db, dc um so grösser werden, je spitzer die Winkel C, B, A sind: so ist es offenbar das Vortheilhafteste, wenn $A = B = C = 60^0$ und mithin das Dreieck gleichseitig ist.

§. 65. Aufgabe. In einem durch Rückwärtsabschneiden aufgenommenen Dreiecke sind die gemessenen Stücke fehlerhaft: es soll angegeben werden, um wie viel die daraus berechneten Seiten falsch sind, und welches die beste Form des Dreiecks für diese Art der Aufnahme ist.

Heisst das Dreieck ABC und sind die gemessenen Stücke: die Seite c, der Winkel A und der Winkel B: so findet man aus diesen Stücken die Seite a aus der Gleichung

$$a \sin C = c \sin A, \tag{135}$$

welche für die logarithmische Berechnung folgende Gestalt annimmt:

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C.$$

Ist die Seite c mit dem Fehler $\pm$ dc, der Winkel A mit dem Fehler $\pm$ dA und der Winkel C mit dem Fehler $\pm$ dC behaftet, berücksichtigt man aber vorläufig nur die positiven Werthe der Fehler, so erhält man durch Differentiiren der letzten Gleichung den relativen Fehler der berechneten Seite a gleich

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{dA}{\operatorname{tg} A} - \frac{dC}{\operatorname{tg} C}. \tag{136}$$

Führt man in dem Ausdrucke rechts alle möglichen Verbindungen der Vorzeichen von dc, dA und dC ein, so wird man den grössten absoluten Werth von da : a finden und damit auch die grösste Abweichung des aus den ge-

messenen Stücken berechneten Werths der Seite a von ihrem wahren Werthe. Da der Ausdruck

$$\frac{dA}{\operatorname{tg} A} - \frac{dC}{\operatorname{tg} C} = 0$$

ist, wenn die relativen Fehler der gemessenen Winkel einander gleich sind, so folgt, dass in diesem Falle die Seite a in demselben Masse falsch erhalten wird, als die Seite c fehlerhaft gemessen wurde. Wäre c fehlerfrei und hätte man in A und C Fehler begangen, welche sich ihrer absoluten Grösse nach wie die Tangenten von A und C verhielten, ihrer Lage nach aber beide positiv oder beide negativ wären: so würden sich die Wirkungen dieser Fehler gegenseitig vernichten und man fände die Seite a gerade so, wie sie fehlerfreie Stücke geliefert hätten.

Sind dc und dA positiv, so wird für $A < 90^0$ und $C > 90^0$

$$\frac{da}{a} = \pm\left(\frac{dc}{c} + \frac{dA}{\operatorname{tg} A} + \frac{dC}{\operatorname{tg} C}\right), \qquad (137)$$

je nachdem der Fehler dC negativ oder positiv ist. Dieser Fehler ist — insofern er von dem Vorzeichen abhängt — der grösste, welcher in der Seite a vorkommen kann und es beträgt somit die Schwankung der Grenzen des Werths von a:

$$2\left(\frac{dc}{c} + \frac{dA}{\operatorname{tg} A} + \frac{dC}{\operatorname{tg} C}\right).$$

Ist der Fehler $dA = dC$, so wird, wenn diese Fehler in gleichem Sinne begangen wurden, der Fehler in a, so weit er von den Winkeln abhängt, null, sobald diese Winkel einander gleich sind. Geht man nun nicht davon aus, dass gerade die Seite c zur Aufnahme des Dreiecks diene, sondern stellt man es frei, welche Seite man dazu wählen mag, so ist klar, dass, wenn der Aufnahme die Seite b zu Grunde gelegt und c gesucht wird, die Winkel B und C ebenfalls einander gleich sein müssen, wenn die Grösse von c durch die Winkelmessung nicht berührt werden soll. Hat man aber die Bedingung $A = C$ und $B = C$, also $A = B = C$, so folgt von selbst, dass wiederum das gleichseitige oder ein diesem nahekommendes Dreieck dasjenige ist, welches den Messungsfehlern den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Stücke gestattet.

§. 66. Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross die aus den Beobachtungsfehlern entspringenden Fehler in den berechneten Stücken eines durch Seitwärtsabschneiden aufgenommenen Dreiecks werden, und welche Form des Dreiecks für diese Art der Aufnahme am zweckmässigsten ist.

Die gemessenen Stücke des Dreiecks ABC seien die Seiten a, b und der Winkel C. Zur Berechnung der Seite c dient die bekannte Gleichung:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C.$$

Differentiirt man diese Gleichung in dem früher angegebenen Sinne, so erhält man:

$$c\,dc = a\,da + b\,db - (a\,db + b\,da)\cos C + a\,b\sin C\,dC, \qquad (138)$$

oder, wenn man die Gleichung mit c^2 dividirt und dafür den ursprünglichen durch a, b, c gegebenen Ausdruck setzt:

$$\frac{dc}{c} = \frac{(a - b\cos C)\,da + (b - a\cos C)\,db + ab\sin C\,dC}{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}. \quad (139)$$

In diesem Ausdrucke kommen nur die wirklich gemessenen Grössen a, b, C vor. Führt man aber auch die übrigen c, A, B ein und berücksichtigt, dass $a - b\cos C = c\cos B$ und $b - a\cos C = c\cos A$ ist, so erhält man aus (139) die Gleichung:

$$\frac{dc}{c} = \frac{a\cos B}{c}\,\frac{da}{a} + \frac{b\cos A}{c}\,\frac{db}{b} + \frac{b\sin A}{c}\,dC. \quad (140)$$

Sind a und b mit gleicher relativer Genauigkeit gemessen, so ist, da $a\cos B + b\cos A = c$, der relative Fehler in c gleich

$$\frac{dc}{c} = \frac{da}{a} + \frac{b\sin A}{c}\,dC.$$

Setzt man in Gleichung (138) den Winkel $C = 180^0$, so wird

$$c\,.\,dc = (a + b)\,(da + db),$$

und da in diesem Falle das Dreieck in eine Gerade von der Länge $a + b = c$ übergeht, so folgt, wie es sein muss, $dc = da + db$. Nimmt man $C = 0$ an, so wird $c\,.\,dc = (a - b)\,(da - db)$ und da hier $c = a - b$ ist, so erhält man $dc = da - db$; ein Ergebniss, dessen Richtigkeit auch ohne diese Entwickelung einleuchten würde.

Wären die Seiten fehlerfrei gemessen, also da und db null, so würde

$$c\,.\,dc = ab\sin C\,dC,$$

d. h. der Fehler in der berechneten Seite dem Winkelfehler proportional sein.

Will man ausser dem Fehler in der Seite c auch die Fehler in den Winkeln A und B bestimmen, so gehören dazu drei Gleichungen, während wir bisher bloss eine, nämlich die aus der Grundgleichung hervorgegangene (138) behandelten. Eine der beiden Gleichungen, in welchen die Winkel A und B vorkommen, ist die bekannte Relation

$$a\sin B = b\sin A,$$

woraus durch Differentiiren folgt:

$$a\cos B\,.\,dB + \sin B\,da = b\cos A\,dA + \sin A\,db \quad (141)$$

und die dritte Gleichung ergibt sich aus der ebenfalls gegebenen Summe der drei auf 180^0 ausgeglichenen Winkel, nämlich aus

$$A + B + C = 180^0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so kommt

$$dA + dB + dC = 0. \quad (142)$$

Sucht man aus (141) und (142) die Werthe von dA und dB durch einfaches Substituiren, so gelangt man sofort zu den Ausdrücken:

$$dA = \frac{b\sin A}{c}\left(\frac{da}{a} - \frac{db}{b}\right) - \frac{a\cos B}{c}\,.\,dC \quad (143)$$

$$dB = \frac{b\sin A}{c}\left(\frac{db}{b} - \frac{da}{a}\right) - \frac{b\cos A}{c}\,.\,dC. \quad (144)$$

Man entnimmt hieraus, dass die Fehler in den berechneten Winkeln A und B um so kleiner werden, je grösser die Seite c im Verhältniss zu a und b, d. h. je grösser der eingeschlossene Winkel ist. Dieses Resultat ist (nach Abtheilung C) sehr günstig für die Aufnahme der Vielecke aus ihrem Umfange, weil hierbei meist stumpfwinklige Dreiecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzunehmen sind.

Haben die Messungen der Seiten a und b eine gleiche Genauigkeit, und sind die Messungsfehler in einerlei Sinn begangen worden, so ist

$$dA = -\frac{a \cos B}{c} dC \tag{145}$$

$$dB = -\frac{b \cos A}{c} dC. \tag{146}$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke und berücksichtigt, dass $a \cos B + b \cos A = c$ ist, so kommt, wie es sein muss,

$$dA + dB + dC = 0.$$

Werden die beiden Winkel A und B einander gleich, so ist $a \cos B = b \cos A = \frac{1}{2} c$ und daher

$$dA = dB = -\frac{1}{2} dC.$$

Soll ein Dreieck so angeordnet werden, dass, wenn man es nach und nach von allen drei Endpunkten aus durch Seitwärtsabschneiden aufnimmt, die Summe aller Folgen der Beobachtungsfehler auf die berechneten Stücke möglichst klein wird, so ist dazu abermals nur ein gleichseitiges oder diesem nahe kommendes Dreieck geeignet; denn für die Aufnahme aus der Ecke C ist es vortheilhaft, wenn die Winkel A und B und also auch die Seiten a und b gleich sind; für die Messung aus dem Punkte B werden die Folgen der Beobachtungsfehler am geringsten, wenn die Winkel A und C oder die Seiten a und c nicht von einander abweichen, und für die Aufnahme aus dem Punkte A besteht die Bedingung $B = C$ oder $b = c$; allen diesen Bedingungen zugleich kann aber nur ein gleichseitiges Dreieck entsprechen.

C. Messung von Vielecken und Flurmarken.

§. 67. Ist ein Verband von Grundstücken oder ein Flurbezirk für sich, d. i. ohne Zusammenhang mit einer grösseren Landesvermessung, aufzunehmen, so beginnt man die Messung nicht damit, dass man sofort jedes Grundstück einzeln aufnimmt und die erhaltenen Bilder in einer der Natur entsprechenden Folge aneinander reiht, sondern man überzieht erst die aufzunehmende Fläche mit einem Vielecke und knüpft an dessen genau gemessene Endpunkte und Seiten die Aufnahme der Grundstückgrenzen an. Der Vortheil dieses Verfahrens, wonach vom Grossen in's Kleine gearbeitet und die Controle der nachfolgenden Messungen in die vorausgegangenen Bestimmungen gelegt wird, beruht theils in der Sicherstellung gegen das Uebersehen grober Fehler in der Detailaufnahme, theils in der möglichst gleichmässigen Vertheilung der unvermeid-

lichen Messungsfehler, und ist jenem Vortheile vergleichbar, den ein geordneter Zusammenhang der Umfangs- und Zwischenmauern eines Gebäudes für dessen inneren Ausbau gewährt.

Es ist hier nur von solchen Vielecken die Rede, welche für kleinere Aufnahmen nöthig sind und welche demnach, auch wenn sie sich über eine Meile erstrecken sollten, als eben angesehen werden können; die grösseren, aus Dreiecken zusammengesetzten Vielecke oder die Netze, welche die Grundlage der Landes- und Gradmessungen bilden und deren horizontale Projectionen in der Regel nicht mehr auf einer Ebene, sondern nur auf der Kugelfläche richtig dargestellt werden können, werden erst in dem folgenden Abschnitte betrachtet. Auch setzen wir hier nicht immer nur geschlossene Vielecke, sondern auch durch gerade Linien verbundene Reihenfolgen von Punkten (polygonale Züge, offene Vielecke), wie sie bei Absteckungen für technische Zwecke oft genug vorkommen, voraus.

Wir verbinden die Lehre von der Messung der Vielecke und Flurbezirke desshalb, weil jene meist nur dazu gebraucht werden, um diese ihrer Form und Grösse nach darzustellen, und weil somit die Polygonmessungen der Hauptsache nach einen Theil der Flurmessungen bilden.

1. Aufnahme der Vielecke und Flurbezirke.

§. 68. Es gibt verschiedene Methoden Vielecke aufzunehmen, und man wendet je nach der Beschaffenheit des Terrains bald die eine bald die andere an; in manchen Fällen lassen sich zwei oder drei dieser Methoden vortheilhaft mit einander verbinden.

Geschieht die Aufnahme eines Vielecks von einem einzigen inner- oder ausserhalb desselben gelegenen Punkte aus, wobei die aufzunehmende Figur in Dreiecke zerlegt wird, die aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt werden, so nennt man das angewendete Verfahren die Polarmethode.

Bezieht man alle Eckpunkte und Seiten des Vielecks auf irgend zwei feste Punkte und die dadurch bezeichnete gerade Linie, welche als Grundlinie aller Dreiecke erscheint, in die das Polygon zerlegt wird, so geschieht dessen Aufnahme nach der Abschneidmethode.

Misst man alle Seiten und Winkel des Vielecks unmittelbar und stellt dasselbe aus diesen Theilen des Umfangs dar, so bedient man sich der Umfangsmethode.

Legt man endlich alle Punkte und folglich auch alle Seiten des Vielecks mit Hilfe von recht- oder schiefwinkligen Coordinaten fest, so heisst diese Art der Festlegung oder Aufnahme die Coordinatenmethode.

Diesen vier Methoden liesse sich leicht noch eine fünfte, nämlich die Dreiecksmethode, nach welcher jedes Vieleck in ein Netz von Dreiecken, die weder eine gemeinschaftliche Spitze noch Basis haben, zerlegt wird, beifügen; es ist aber vorzuziehen, diese bei grösseren Aufnahmen

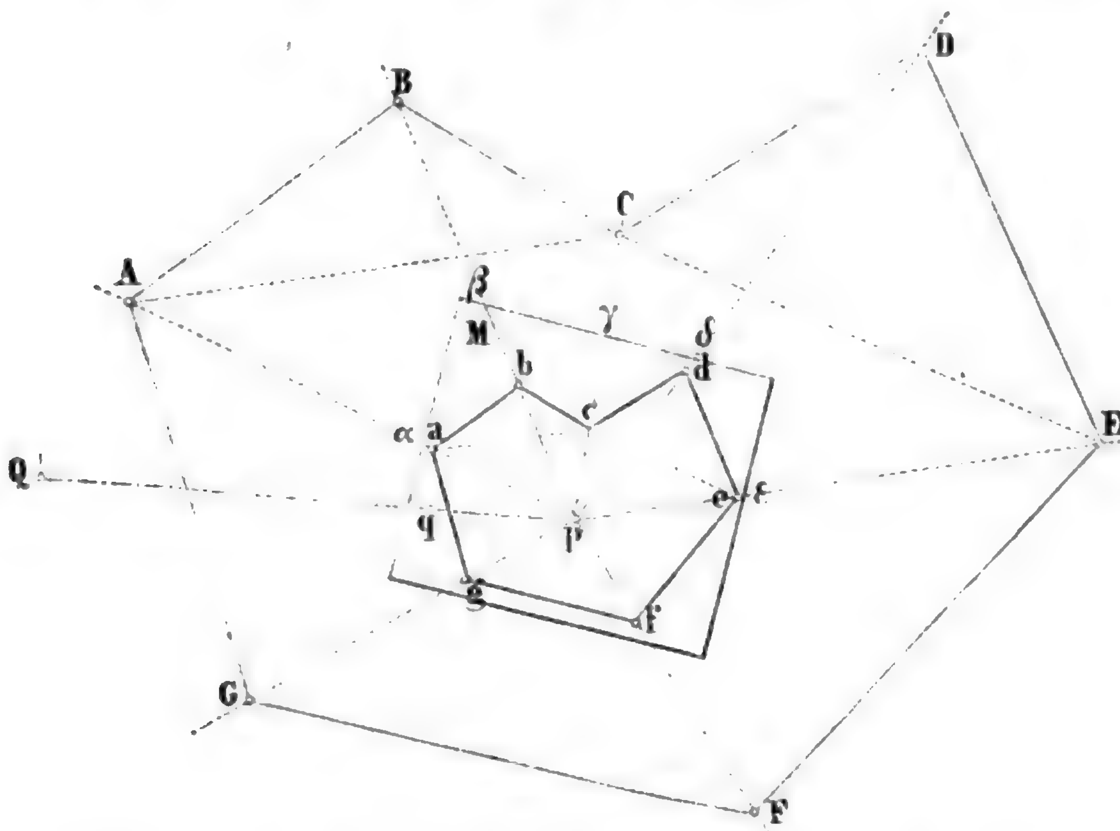
anzuwendende und unter dem Namen Trianguliren bekannte Methode erst in dem folgenden Capitel zu erörtern.

§. 69. Aufgabe. Ein auf dem Felde abgestecktes Vieleck soll nach der Polarmethode aufgenommen werden.

Die Lösung dieser Aufgabe setzt immer voraus, dass der Raum, den das Vieleck umschliesst, von Hindernissen möglichst frei ist, damit man von dem gewählten oder gegebenen Standpunkte aus nach allen Endpunkten hin visiren und messen kann. Der als Pol erscheinende Standpunkt wird am zweckmässigsten innerhalb und möglichst in der Mitte des Polygons angenommen; er kann aber auch in einer Ecke und sogar ausserhalb der aufzunehmenden Figur liegen.

Geschieht die Aufnahme mit dem Theodolithen, so stelle man denselben über dem Pole P (Fig. 73) centrisch und horizontal auf und messe die

Fig. 73.



Azimuthalwinkel aller Richtungslinien PA, PB u. s. w. bis wieder zu PA. Soll das aufzunehmende Vieleck gegen eine gegebene feste Linie, z. B. PQ, orientirt werden, so thut man am besten, alle Horizontalwinkel auf diese Linie, als den linken Schenkel eines jeden, zu beziehen, was einfach dadurch geschieht, dass man zuerst auf PQ einstellt und abliest. Besitzt man einen Repetitionstheodolithen, so wird man, um alle Azimuthe ohne Rechnung zu erhalten, beim Beginne der Messung den Nonius I des Horizontalkreises auf 0° stellen und den Kreis selbst so weit drehen, dass das Fadenkreuz genau auf das Signal Q einsteht. Die horizontalen Projectionen der Linien PA, PB u. s. w. werden entweder mit Messlatten oder mit der Messkette auf bekannte Weise bestimmt; ist aber das Theodolithenfernrohr,

wie das der neuen Kippregeln, zum Distanzmessen eingerichtet, so wird die Längenmessung selbstverständlich sofort mit der Winkelmessung verbunden und gleichzeitig die Erhebung oder Senkung des Rohrs beobachtet, um die gemessenen schiefen Entfernungen auf den Horizont zu reduciren. Wie aus den horizontalen Fahrstrahlen und den Azimuthalwinkeln das Vieleck zu zeichnen ist, bedarf wohl keiner Beschreibung.

Wird das Vieleck mit dem Messtische und dem Reichenbach'schen Distanzmesser aufgenommen, so stelle man, wenn das Bild pq der Orientirungslinie PQ gegeben sein sollte, den Messtisch so auf, dass p lothrecht über P und pq in der Verticalebene PQ liegt, wenn das Tischblatt horizontal ist und feststeht. Hierauf lege man die Linealkante des Distanzmessers an p, visire nach A, lese auf der daselbst befindlichen Distanzlatte die schiefe Entfernung AP ab, reducire dieselbe mit Tabelle oder Diagramm auf den Horizont und trage die reducirte Länge von p aus in verjüngtem Masse = pa auf der feinen Linie ab, welche man an der Linealkante hinzieht. In gleicher Weise verfahre man mit den Linien PB, PC, PD.. und verbinde schliesslich die Bildpunkte a, b, c, d.., wodurch eine dem gegebenen Vielecke ABCD.. ähnliche Figur abcd.. auf dem Messtischblatte entsteht, wie sie die Aufgabe verlangt.

Man sieht sofort ein, dass das Vieleck ABCDE.. nicht geschlossen zu sein braucht, um nach dieser Methode aufgenommen zu werden; man überzeugt sich aber auch leicht, dass weder in der Aufnahme des geschlossenen noch des offenen Vielecks eine Controle für die richtige Messung liegt, und dass die Prüfung der letzteren nur dadurch bewirkt werden kann, dass man entweder einzelne Seiten AB, BC.. oder Diagonalen AC, CE.. des Polygons misst und vergleicht, ob sie mit ihren Bildern ab, bc.. oder ac, ce.. übereinstimmen oder nicht.

§. 70. **Aufgabe. Ein gegebenes Vieleck von einer abgemessenen Standlinie aus aufzunehmen.**

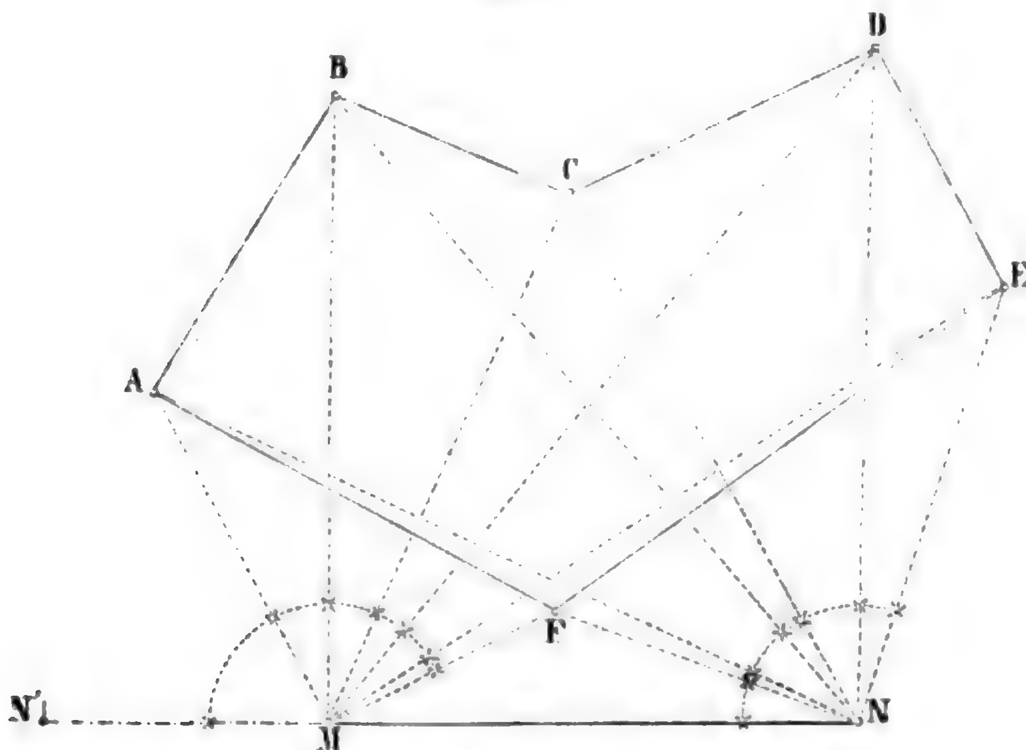
Die Aufnahme kann wieder mit dem Theodolithen oder dem Messtische geschehen. In beiden Fällen hat man die Standlinie geschickt zu wählen, wenn sie nicht schon vorgeschrieben ist. Diese Basis, welche inner- oder ausserhalb des Vielecks liegen kann, muss folgende Bedingungen möglichst gut erfüllen. Sie soll erstens zwei feste Endpunkte haben, auf denen sich die Winkelmessinstrumente sicher aufstellen und alle Punkte des Vielecks anvisiren lassen; ferner soll sie so liegen, dass sie genau gemessen werden kann und die Eckpunkte durch gute Schnitte (d. h. durch Winkel, welche weder sehr spitz noch sehr stumpf sind [1]) gibt; und endlich soll die Standlinie nicht zu kurz sein, damit wiederum die schlechten Schnitte vermieden werden. Im Allgemeinen kann man annehmen, dass eine ausserhalb des Vielecks liegende Grundlinie bessere Schnitte gibt, als eine im Vieleck.

Besitzt man zur Messung der Winkel einen Repetitionstheodolithen,

[1] Als sehr spitze Winkel sieht man hier schon diejenigen an, welche weniger als 20°, und als sehr stumpfe jene, welche mehr als 160° betragen.

dessen Fernrohr sich durchschlagen oder umlegen lässt, so wird man bei der Aufstellung in dem Punkte M der Basis MN (Fig. 74) den Nonius I auf den Nullpunkt des Horizontalkreises einstellen und diesen selbst so drehen, dass das Fernrohr genau auf das in der Richtung NM liegende Signal N' zeigt; hierauf das Fernrohr durchschlagen und sofort nach A visiren: die Ablesung am Nonius I gibt alsdann selbstverständlich den Winkel N'MA. Nach der Einstellung auf B erhält man aus der Ablesung am Nonius I den Winkel N'MB u. s. w. Sind alle Winkel in M gemessen und man will die Messung nicht wiederholen, so versetzt man das Instrument nach N, stellt wieder den Nonius I auf Null und richtet durch Drehung des Horizontal- und Verticalkreises das Fadenkreuz zuerst auf das Signal M. Ist der Horizontalkreis festgestellt, so bewegt man die Alhidade nach und nach so weit nach rechts, bis das Fadenkreuz successive auf die Punkte F, A,

Fig. 74.



B, C.. trifft und wiederum alle Winkel der Visirlinien NF, NA, NB.. mit der Basis NM gemessen sind. Trägt man diese Winkel mit Hilfe von Tangenten an die auf den Horizont reducirte Basis mn an, so bekommt man durch Verbindung der entsprechenden Schnitte das Vieleck abcdef, welches dem Vielecke ABCDEF ähnlich und die Lösung der Aufgabe ist.

Wie mit Hilfe des Messtisches und der Kippregel das Vieleck ABCDEF von der Standlinie MN aus aufzunehmen ist, lehrt bereits §. 55, weil sich hier das, was für drei Punkte gilt, auf eine beliebige Anzahl von Punkten und somit auch auf das Vieleck ABCDEF anwenden lässt. Sollte es die Lage der Standlinie mit sich bringen, dass ein Punkt (C) des Vielecks nicht durch Vorwärtsabschneiden bestimmt werden könnte, so müssten die beiden nächstgelegenen Polygonseiten (CB, CD) abgemessen und hiermit der gesuchte Punkt (c) construirt werden. Dasselbe hätte zu geschehen, wenn

der Schnitt dieses Punkts ein schlechter, also seine Bestimmung selbst unsicher wäre. Es versteht sich von selbst, dass sich der in Rede stehende Punkt auch nach §. 56 durch Rückwärtsabschneiden finden liesse, wobei irgend zwei von ihm aus gut sichtbare und schon vorher bestimmte Eckpunkte benützt werden könnten. Zur Controle der Messung kann man auch solche Punkte, welche aus guten Schnitten gefunden wurden, durch Rückwärtsabschneiden bestimmen und zusehen, ob man in beiden Fällen ein und dasselbe Resultat erhält.

§. 71. Aufgabe. Ein Polygon nach der Umfangsmethode aufzunehmen und zum Schlusse zu bringen.

Diese Aufnahmsmethode findet vorzüglich dann ihre Anwendung, wenn das Visiren innerhalb der darzustellenden Terrainfläche durch Häuser, Bäume etc. erschwert oder unmöglich ist, also bei Aufnahme von Ortschaften, Wäldern u. dgl. Sie wird durch das Messen der Seiten ziemlich mühsam, gewährt aber, wenn man alle Stücke des Vielecks gemessen hat, durch den mehr oder weniger genauen Schluss der aufgenommenen Figur sofort eine Controle der Messung.

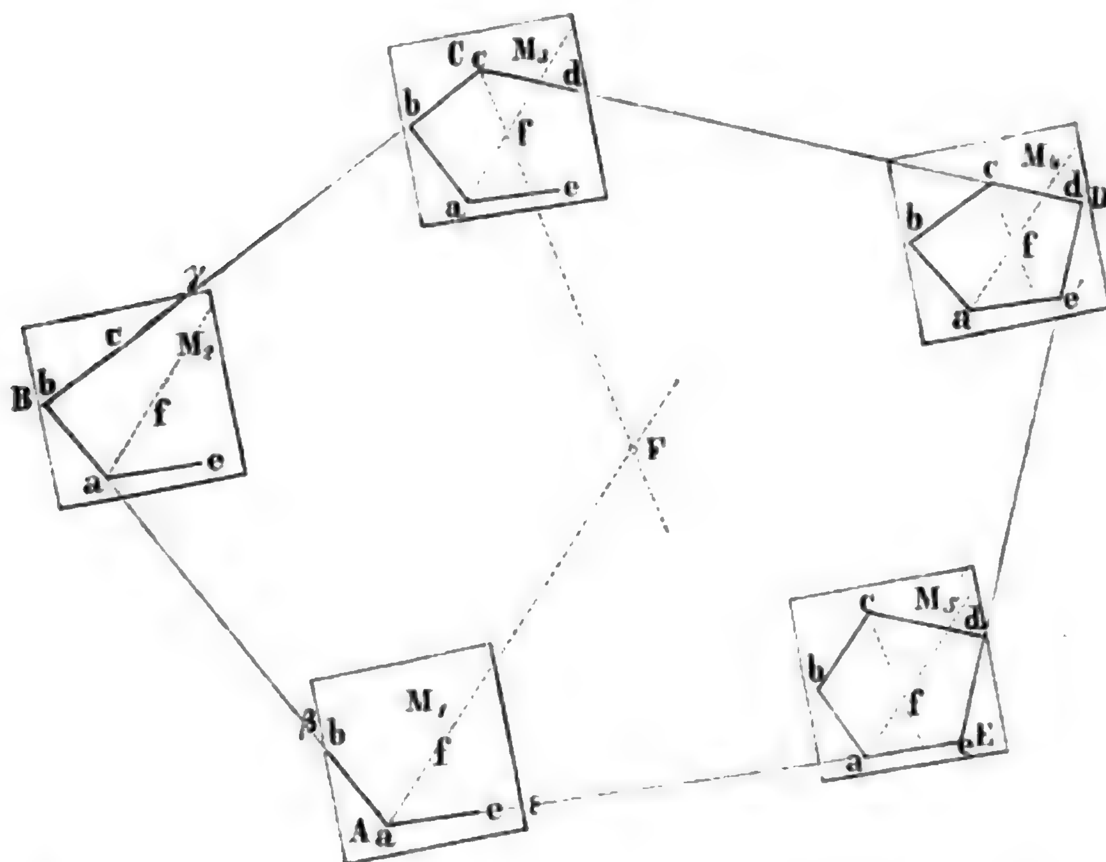
Ueber die Aufnahme des Vielecks mit Theodolithen und Messlatten ist kaum mehr zu bemerken, als dass das Messen der Winkel und Seiten mit aller Sorgfalt geschehen muss, und dass die Polygonwinkel, wenn ihre Summe nur sehr wenig von der dem Vielecke zukommenden Winkelsumme abweicht und somit die Abweichung als die Folge der unvermeidlichen Messungsfehler angesehen werden kann, vor dem ersten Auftragen der Figur durch gleichheitliche Vertheilung des Gesammtfehlers verbessert werden. Ist aber die Summe aller gemessenen Winkel auffallend verschieden von der, welche sie sein sollte, und geht daraus hervor, dass in einem oder mehreren Winkeln grobe Messungsfehler gemacht wurden, so müssen erst diese Fehler aufgesucht und beseitigt werden, ehe man zum Auftragen des Vielecks schreitet. Wie man aber einen grösseren Fehler, wenn er nur in einem Winkel oder nur in einer Seite gemacht wurde, durch Construction oder Rechnung finden kann, lehrt der §. 72, und wie ein mit dem Theodolithen aus dem Umfange aufgenommenes Polygon durch Coordinaten zweckentsprechend aufgetragen werden kann, der §. 73, auf die für solche Fälle hiermit verwiesen wird.

Bedient man sich, wie es meist geschieht, des Messtisches zur Aufnahme des Polygons aus dem Umfange, so hat man sich vor allen Dingen aus den zweimal und mit Messlatten sehr genau gemessenen Seiten der Figur ein Bild derselben in dem Massstabe zu entwerfen, welcher der Aufnahme zu Grunde gelegt werden soll, und zuzusehen, ob dieses (allerdings nur annähernd richtige) Bild auf dem Messtische Platz findet oder nicht, und wenn ja, in welcher Lage. Sollte die gezeichnete Figur zu gross sein, so kann man entweder einen kleineren Massstab für die Aufnahme wählen, oder aber die Aufnahme so vollziehen, dass man auf dem Messtische zwar alle Stücke des Vielecks gezeichnet erhält, aber dieses selbst erst auf einem

grösseren Blatte zusammensetzen muss. Zunächst setzen wir voraus, dass die ganze Figur auf dem Blatte Platz finde.

Stellt ABCDE das auf dem Felde mit starken Pfählen, in die oben zum Einstecken von Messfahnen Löcher gebohrt sind, bezeichnete Vieleck vor und sind bereits alle Seiten desselben gemessen und auf den Horizont reducirt, so stelle man den Messtisch auf dem Endpunkte A so auf, dass a lothrecht über A und die vorhin als passend gefundene Richtung a β in die Richtung von AB fällt, sobald der Tisch horizontal und fest steht. Ist ausser der Richtung a β auch die a ε nach E, d. i. der Winkel BAE bestimmt, so trage man AB in verjüngtem Masse = ab und AE verjüngt = ae ab. Sollte man von A aus einen Punkt F innerhalb der Figur sehen und von A nach F messen können, so ist es für die spätere Aufstellung

Fig. 75.



des Tisches und die Controle der Messung gut, diesen Punkt sofort mit aufzunehmen und in der Figur als f darzustellen. Hierauf kommt der Messtisch in die zweite Lage M_2 über den Punkt B, so nämlich, dass b lothrecht über B steht und ba nach BA orientirt ist. In B wird der Winkel CBA gemessen und die Seite BC verjüngt = bc aufgetragen. In C wird c über C gestellt, nach CB orientirt, der Winkel BCD gemessen und CD verjüngt = cd abgetragen. Sollte man von C aus auch F sehen können, so visirt man, die Kippregel an c legend, dahin und überzeugt sich, ob die an der Linealkante gezogene Linie durch f geht oder nicht. Ginge diese Linie nicht durch f, so müsste in dem bisherigen Verfahren ein Fehler vorgekommen sein, der sofort aufzusuchen und zu verbessern wäre. Die Fort-

setzung der Messung fordert, dass d centrisch über D und dc in die Richtung DC gestellt werde. Hier wird nach E visirt und die Seite de' erhalten. Trifft der Punkt e' der Seite de' mit dem Punkte e der Seite ae zusammen, so schliesst sich das Polygon, ausserdem sagt man: „es schliesst sich nicht."

Findet ein Schluss der Figur statt, so kann man denselben als ein gutes Zeichen für die genaue Arbeit ansehen; man wird aber in diesem Falle gleichwohl noch den Punkt e über E bringen, den Messtisch nach ED orientiren und zusehen, ob auch der bereits gezeichnete Winkel aed dem AED gleich ist. Diese Prüfung der Messung ist desshalb gut, weil man dadurch erfährt, ob das Schliessen nicht in Folge eines gröberen Messungsfehlers, der alle unvermeidlichen Fehler ausgleicht, geschieht.

In der Regel wird sich, wenn man in dem vorletzten Punkte (D) angekommen ist, die Figur nicht schliessen, d. h. es wird, mit Beziehung auf

Fig. 76.

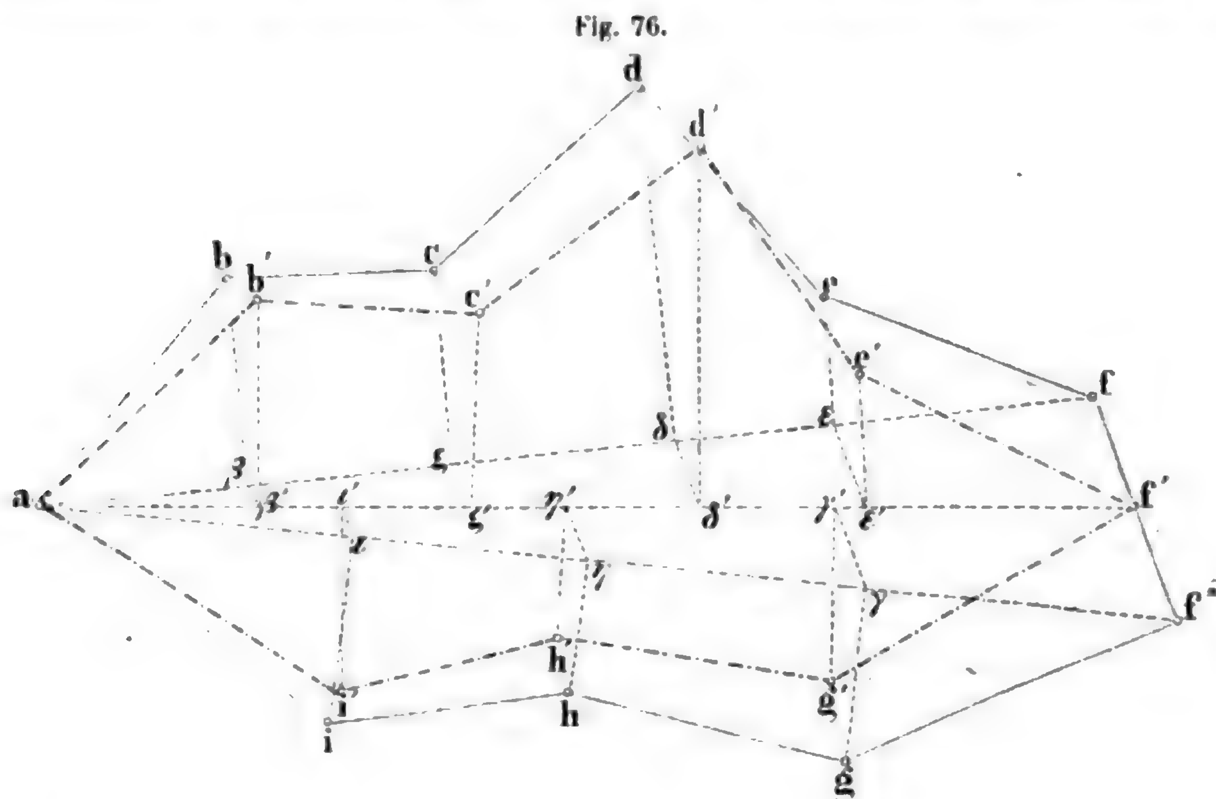


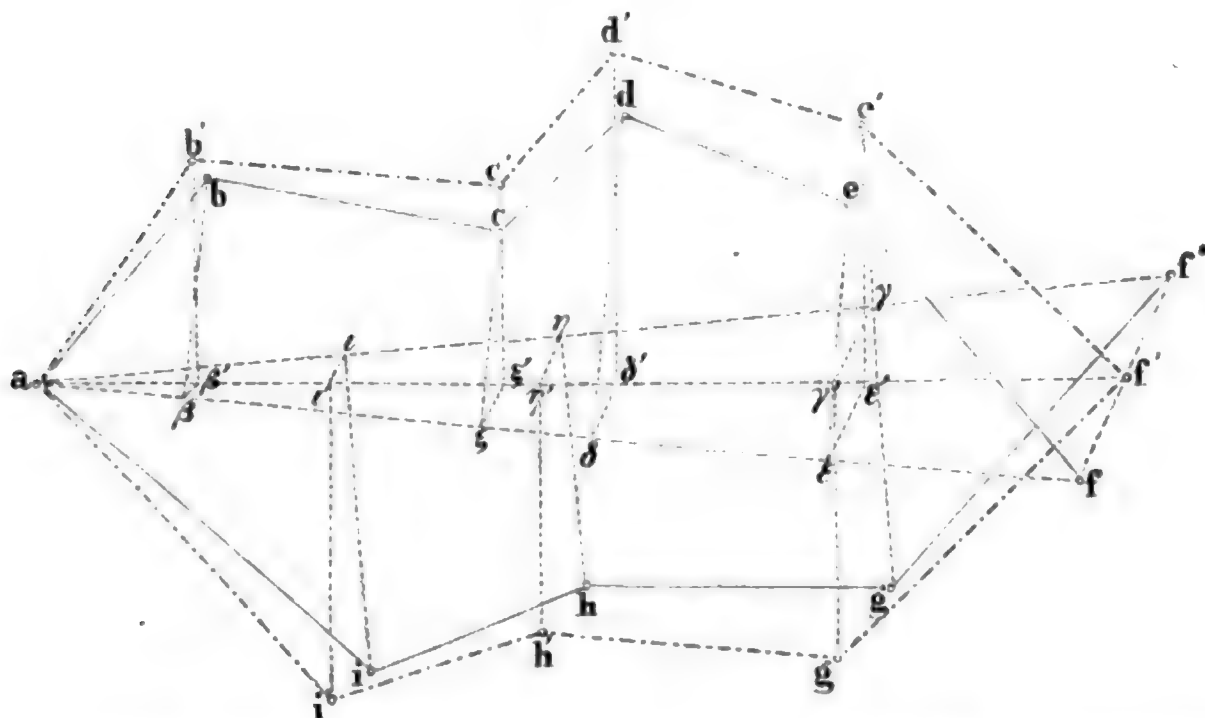
Fig. 75, der Punkt e' von e mehr oder weniger abstehen. Diese Erscheinung wird als das Resultat der unvermeidlichen Beobachtungsfehler angesehen, so lange der Abstand ee' in günstigem Terrain nicht mehr als $^1/_{800}$ und in ungünstigem Terrain nicht mehr als $^1/_{400}$ des ganzen Umfangs abcde beträgt. In diesem Falle schreitet man zur Ausgleichung der unvermeidlichen Fehler, d. h. man bringt das aufgenommene Polygon zum Schluss; beträgt aber die Linie ee' mehr als $^1/_{800}$ und beziehungsweise mehr als $^1/_{400}$ des Polygonumfangs, so bleibt nichts Anderes übrig, als die ganze Messung zu wiederholen und dabei zu berücksichtigen, dass sich die unvermeidlichen Fehler besser vertheilen, wenn man die Aufnahme des Polygons nach zwei Seiten hin vornimmt, d. i. von A über B bis C und hierauf von E über D bis C.

Bei den nachfolgenden empirischen Regeln über die Herbeiführung von

Polygonschlüssen, welche den practischen Anforderungen genügen, ist vorausgesetzt, dass das Polygon von dem Punkte A aus nach zwei Seiten hin aufgenommen sei, und dass dadurch die beiden Theile desselben a b c d e f und a i h g f″ (Fig. 76 bis 78) erhalten worden seien. Wäre die Aufnahme von dem Punkte f″ aus über g und a bis nach f hin in einer Richtung vollzogen und am Ende der Abstand f f″ der Schlusspunkte erhalten worden, so würde man das Polygon in zwei Theile a b c d e f und a i h g f″ zerlegen, und zwar dadurch, dass man einen Punkt a sucht, der wo möglich um gleichviele Seiten von f und f″ absteht. Denkt man sich nun die Linien a f und a f″ gezogen, so können dieselben folgende drei Lagen gegen einander annehmen:

1) Der eine Theil des Polygons a b c d e f ist von dem anderen a i h g f″ ganz getrennt, wie in Fig. 76;

Fig. 77.



2) beide Theile greifen in einander über, wie in Fig. 77 der Theil a b c d e f in den Theil a i h g f″; und

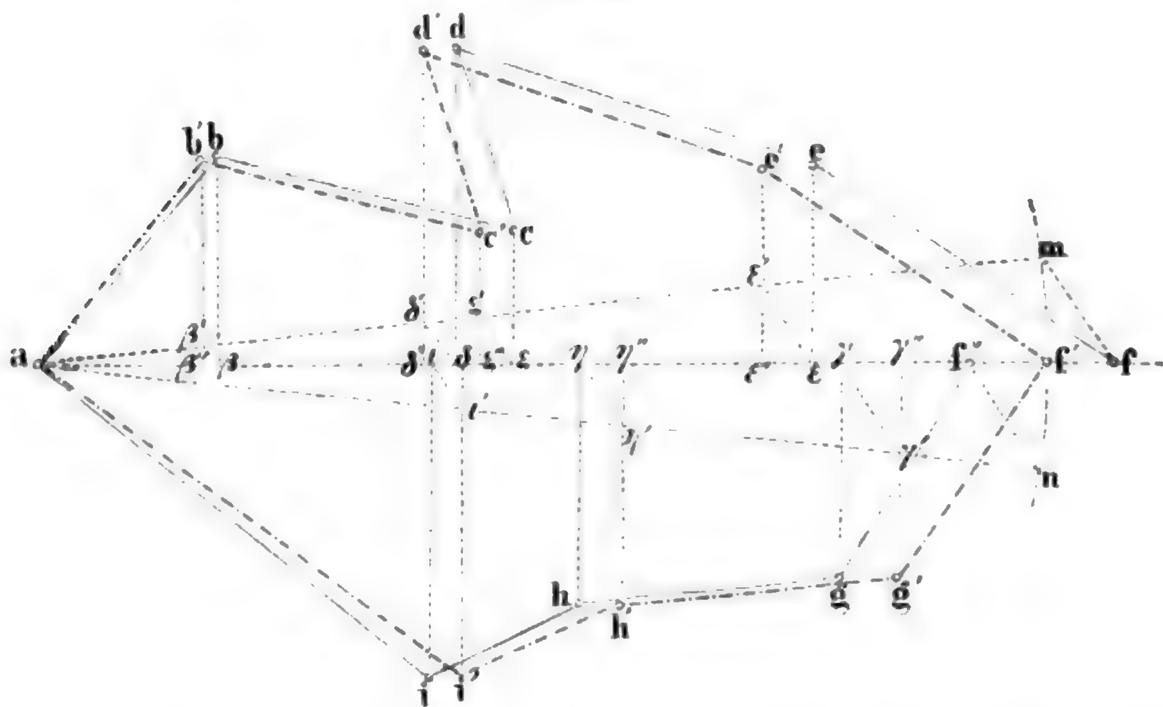
3) die Verbindungslinien a f und a f″ fallen in eine Gerade, wie in Fig. 78.

In dem ersten Falle (Fig. 76) ziehe man f f″, fälle die Senkrechten b β, c ζ, d δ, e ε, g γ, h η, i ι, halbire f f″ in f′ und ziehe die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ zu f f″ parallel bis an die Halbirungslinie a f′. Hierauf errichte man in den Punkten β', ζ', δ', ε', γ', η', ι' Senkrechte zu a f′ und mache dieselben nach einander gleich b β, c ζ, d δ, e ε, g γ, h η, i ι. Werden nun die Köpfe dieser Senkrechten durch Gerade verbunden, so entsteht das Polygon a b′ c′ d′ e′ f′ g′ h′ i′ a, welches sich schliesst und von dem durch die Aufnahme unmittelbar erhaltenen nur sehr wenig unterscheidet.

In dem zweiten Falle (Fig. 77) verbinde man zuerst wieder f mit f'', halbire ff'' in f' und ziehe af'. Hierauf errichte man zu af die Senkrechten $b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$ und zu af'' die Perpendikel $g\gamma$, $h\eta$, $i\iota$. Von deren Fusspunkten aus ziehe man die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ parallel zu ff'', bis sie die Linie af' schneiden. Errichtet man nun in den Schnittpunkten die Ordinaten $\beta'b' = \beta b$, $\zeta'c' = \zeta c$, $\delta'd' = \delta d$, $\varepsilon'e' = \varepsilon e$, $\gamma'g' = \gamma g$, $\eta'h' = \eta h$, $\iota'i' = \iota i$ und verbindet deren Köpfe nacheinander durch gerade Linien, so erhält man das gesuchte geschlossene Polygon ab'c'd'e'f'g'h'i'a.

In dem dritten Falle endlich (Fig. 78) halbire man wieder den Abstand ff'' in f', beschreibe aus a mit dem Halbmesser af' einen Kreisbogen und ziehe die Halbmesser am und an unter gleichen Winkeln gegen die Linie af'. Weiter fälle man zu af' die Senkrechten $b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$, $g\gamma$, $h\eta$, $i\iota$ und ziehe von deren Fusspunkten aus die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$,

Fig. 78.

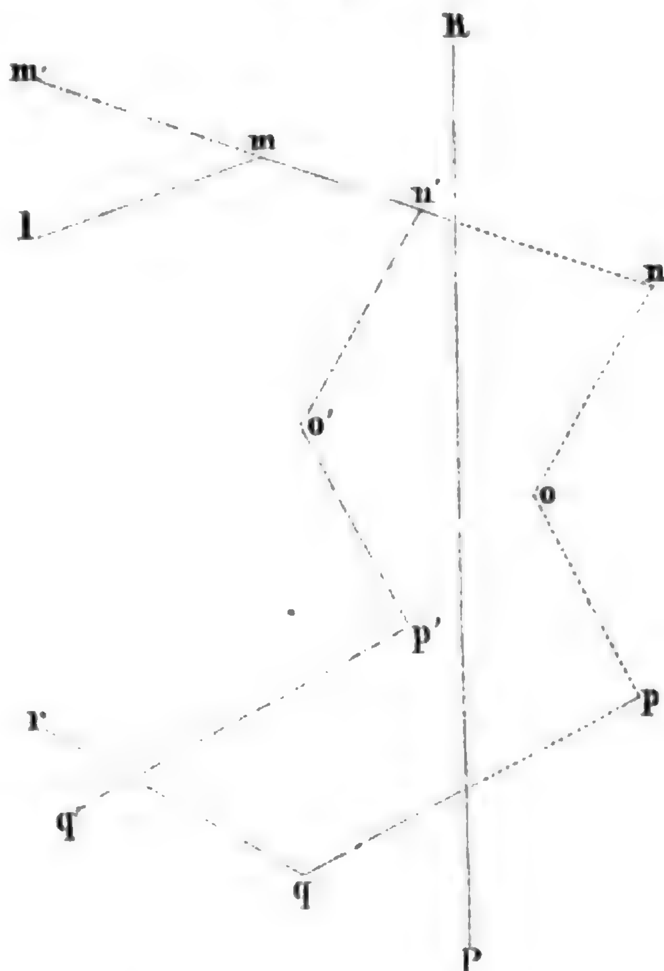


$\eta\eta'$, $\iota\iota'$ mit fm und f''n parallel, bis die Hilfslinien am und an geschnitten werden. In den Schnittpunkten errichte man wieder Senkrechte zu af' und mache $\beta''b' = \beta b$, $\zeta''c' = \zeta c$, $\delta''d' = \delta d$, $\varepsilon''e' = \varepsilon e$, $\gamma''g' = \gamma g$, $\eta''h' = \eta h$, $\iota''i' = \iota i$. Werden schliesslich die Köpfe dieser Senkrechten der Reihenfolge nach verbunden, so entsteht das geschlossene und die Fehler möglichst gut ausgleichende Vieleck ab'c'd'e'f'g'h'i'a, welches gesucht wurde.

Sollte bei der Aufnahme des Polygons mit dem Messtische der Fall eintreten, dass ein Theil der Zeichnung über das Tischblatt hinausreicht, so kann man sich dadurch helfen, dass man den über den Rand des Blatts hinausfallenden Theil zunächst für sich aufnimmt und erst später mit dem übrigen Theile der aufgenommenen Figur verbindet. Denn gesetzt, es sei

PR in Fig. 79 der Rand des Tischblatts und nop der über denselben hinausfallende Theil der Zeichnung, so kann man auf der zuletzt aufgenommenen Richtung mn, welche auf dem Blatte so lange als möglich gezogen wird, statt der Seite mn die eben so lange Linie m'n' auftragen, wobei der Punkt n' so weit zurückgeschoben ist, dass kein Punkt der Figur m'n'o'p'q' über PR hinausfällt. In dem Punkte N des Vielecks wird der Messtisch nach n' centrirt und durch n'm' nach NM orientirt. Im Uebrigen verfährt man so, als ob n' das richtige Bild von N wäre. Hat man durch Fortsetzung der Aufnahme die Punkte o', p', q' erhalten und will man wieder auf den richtigen Punkt q, der aber erst zu construiren ist, übergehen, so braucht man nur durch q' eine Parallele zu m'n' zu ziehen und q'q = m'm zu machen, so ergibt sich q. Besser ist es aber, die Aufnahme, nachdem sie vom Anfangspunkte A an über B und C bis Q nach obigem Verfahren gemacht ist, von A aus über Z und W bis Q fortzusetzen und zu vollenden. Dadurch ergibt sich q von selbst. Zur Controle kann man auch noch die Richtung qp herstellen, welche, wenn richtig gearbeitet wurde, mit q'p' parallel sein muss.

Fig. 79.



§. 72. **Aufgabe. Ein Polygon ist aus dem Umfange aufgenommen worden, schliesst sich aber wegen eines groben Messungsfehlers nicht: man soll diesen Fehler aufsuchen.**

Der vorhandene Fehler kann entweder in einem Winkel oder in einer Seite liegen und entweder durch Zeichnung oder durch Rechnung zu bestimmen sein.

A. Es sei ein Winkel, und zwar nur ein einziger, falsch gemessen.

1) Der fehlerhafte Winkel ist durch Zeichnung zu finden. (Fig. 80.)

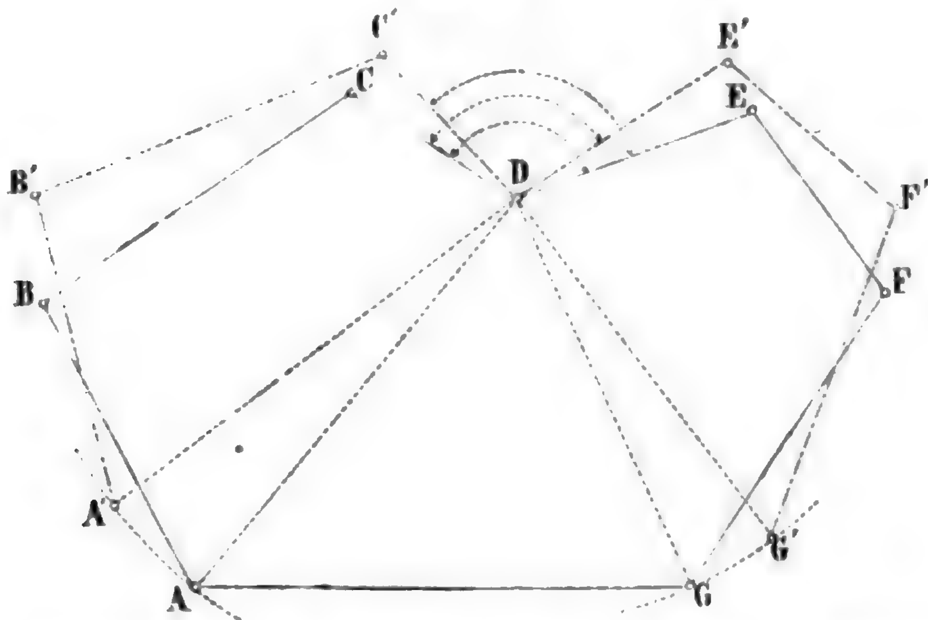
Nimmt man an, dass der Winkel CDE falsch aufgenommen worden sei, so wird, wenn man das Vieleck, von der Seite AG ausgehend, über B und C hin aufträgt, die sich nicht schliessende Figur GABCDE'F'G, entstehen, von welcher der Theil GABCD vollständig richtig, der übrige aber falsch ist, weil er den fehlerhaften Winkel bei D enthält. Trägt man die gemessenen Stücke nochmals von AG aus auf und zwar in einer der

vorigen entgegengesetzten Richtung, so entsteht die Figur A G F E D C′ B′ A′, welche von A bis D richtig, von D bis A′ aber falsch ist. Vergleicht man die aufgetragenen zwei Vielecke mit einander, so sieht man, dass sich dieselben nothwendig in dem Punkte D, welcher in beiden aus fehlerfreien Bestimmungsstücken erhalten wurde, schneiden müssen; umgekehrt also wird man den Scheitel (D) des fehlerhaften Winkels finden, wenn man die aufgenommenen Seiten und Winkel von einer und derselben Seite aus zweimal in entgegengesetzter Richtung aufträgt und zusieht, wo sich die beiden Figuren schneiden. Auch ist leicht einzusehen, dass durch die Verbindung der Schlusspunkte G, G′ oder A, A′ mit dem Scheitel D der Fehler des Winkels = G D G′ = A D A′ = E D E′ = C D C′ gefunden werde.

2) Der fehlerhafte Winkel ist durch Rechnung zu finden. (Fig. 80.)

Denkt man sich von allen Eckpunkten der Vielecke A B C D E′ F′ G′ und A G F E D C′ B′ A′ auf die als Hauptlinie angenommene Seite A G Perpendikel

Fig. 80.



gefällt, so ist klar, dass die beiden für jeden Punkt vorhandenen Senkrechten in ihrer Länge verschieden sind, mit Ausnahme derjenigen zwei, welche dem Punkte D angehören. Berechnet man demnach mit Hilfe der bekannten polygonometrischen Formeln aus den gegebenen Stücken alle Ordinaten doppelt, so erhält man einmal zwei gleiche Werthe, und der Punkt, dem sie angehören, ist der Scheitel des gesuchten Winkels. Die Grösse seines Fehlers lässt sich zwar aus den Dreiecken A D A′ oder G D G′ berechnen; es ist aber in jedem Falle, auch in dem vorigen, besser, den fehlerhaften Winkel an Ort und Stelle nochmals zu messen.

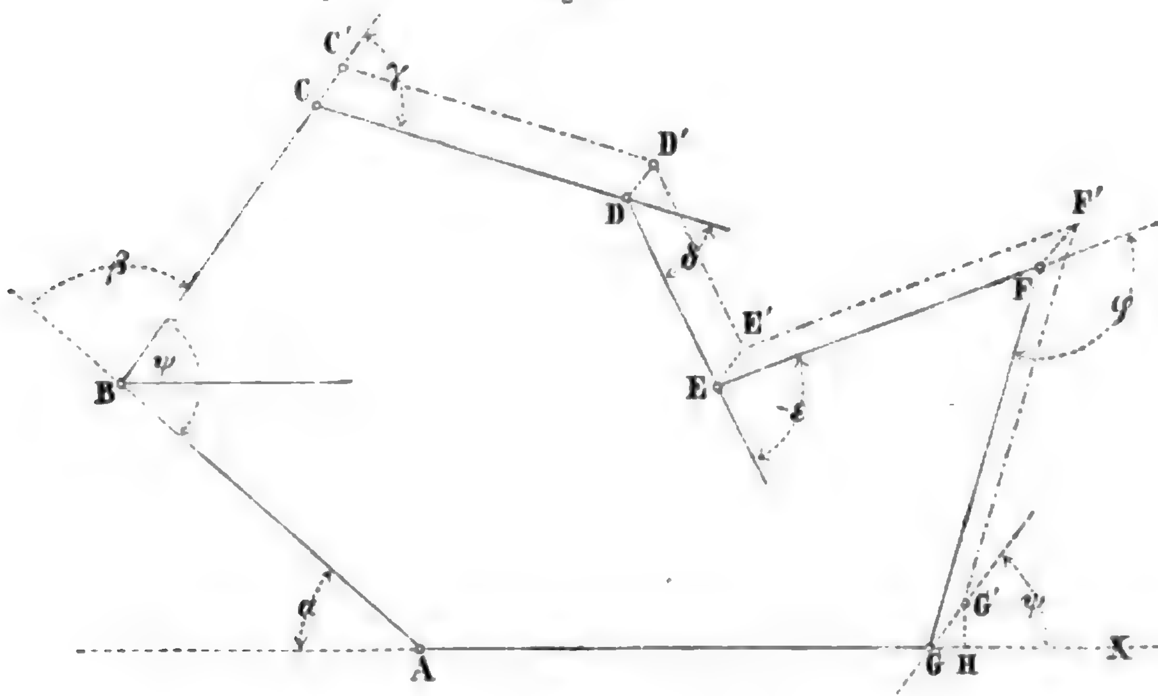
B. Es sei eine Seite, und zwar nur eine einzige, falsch gemessen.

1) Die fehlerhafte Seite ist durch Zeichnung zu finden. (Fig. 81.)

Stellt A B C D E F G ein geschlossenes Vieleck vor, so wird, wenn man die Seite BC um das Stück CC′ verlängert, alle übrigen Stücke des Vielecks aber unverändert beibehält, die offene Figur G A B C′ D′ E′ F′ G′ ent-

stehen. Verbindet man die Punkte D', E', F', G' mit den gleichnamigen Punkten D, E, F, G, so sind, wie leicht einzusehen, die Verbindungslinien DD', EE', FF', GG' alle mit CC' gleich und parallel. Aus dieser geometrischen Wahrheit fliesst für die Auffindung der fehlerhaften Seite (BC) eines Vielecks folgende Regel: Man verbinde die beiden Schlusspunkte (G, G') des aufgetragenen offenen Vielecks durch eine gerade Linie (GG') und sehe zu, welcher von den Polygonseiten diese Linie parallel ist: die parallele Seite ist die falsche und der Betrag des Fehlers ist durch den Abstand GG' der Schlusspunkte ausgedrückt. Kommen in dem Vielecke zwei parallele Seiten vor, so kann nur ein Nachmessen auf dem Felde entscheiden, welche von beiden falsch ist. Dieses Nachmessen ist aber auch in dem Falle, wo keine parallelen Polygonseiten vorkommen, nicht bloss zu empfehlen, sondern

Fig. 81.



sogar nöthig, da sonst alle unvermeidlichen Beobachtungsfehler an dieser Seite mit angebracht werden.

2) Die fehlerhafte Seite ist durch Rechnung zu finden. (Fig. 81.)

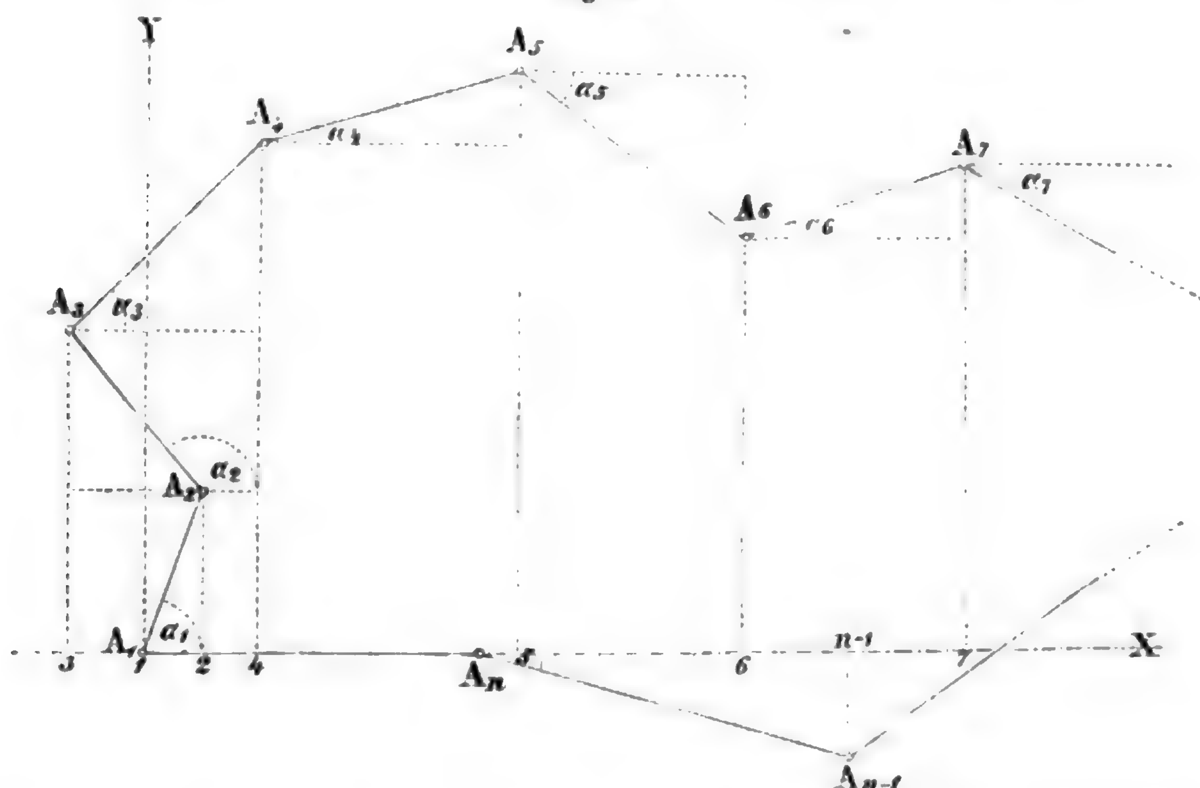
Wird die Seite GA als Abscissenaxe gewählt, so kann man nach den bekannten polygonometrischen Grundformeln, die unter Nr. 147 u. ff. zusammengestellt sind, sowohl die Abscissen als Ordinaten aller Eckpunkte A, B, C', D', E', F', G' aus den gegebenen Seiten und Winkeln berechnen. Hieraus kann man ferner die Neigung (φ) der Schlusslinie G'G gegen die Abscissenaxe und auch ihre Länge finden. Berechnet man endlich aus den gemessenen Grössen die Neigungen aller Polygonseiten gegen die Axe AG und vergleicht die Neigungswinkel mit dem von GG', so wird man eine Seite (BC) finden, welche sehr nahe denselben Neigungswinkel (φ) hat, und diese (oder eine ihr parallele) ist als die fehlerhafte zu bezeichnen. Der Fehler, den man auf dem Felde durch directes Nachmessen

erhält, wird dem berechneten Abstande GG' der Schlusspunkte ebenfalls sehr nahe gleich sein.

§. 73. **Aufgabe. Mit dem Theodolithen ist ein Vieleck aus dem Umfange aufgenommen worden: man soll dasselbe mittels Coordinaten so genau als möglich auftragen.**

Es ist immer eine missliche Sache, wenn man sich zum Auftragen von Winkeln des Gradbogens bedient, denn die Genauigkeit der Zeichnung bleibt in diesem Falle weit hinter der Genauigkeit der Winkelmessung zurück. Dieses Missverhältniss zwischen Aufnahme und Zeichnung bessert sich aber, wenn man die Winkel nach ihren Tangenten, die freilich vorher zu berechnen sind, aufträgt; und dasselbe ist der Fall, wenn man zur Zeichnung eines Vielecks dessen Coordinaten benützt, welche sich aus den gemessenen

Fig. 82.



Stücken des Umfangs leicht berechnen lassen. Da rechtwinklige Coordinaten am sichersten und schnellsten aufgetragen werden können, so wird man sich stets eines rechtwinkligen Axensystems bedienen, und da es die Formeln vereinfacht, so wählt man, wenn sonst nichts hindert, eine Ecke des Polygons als Ursprung und eine Seite als Abscissenaxe der Coordinaten.

A. Sind in dem **geschlossenen Polygon**, welches Fig. 82 vorstellt, die Seiten

$$A_1 A_2 = a_1,\ A_2 A_3 = a_2,\ A_3 A_4 = a_3 \text{ u. s. f. bis } A_n A_1 = a_n$$

und die inneren Polygonwinkel $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ gemessen, so hat man zunächst zu untersuchen, ob die Summe dieser Winkel

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n = (n-2)\,\pi \qquad (147)$$

ist. Ist sie grösser oder kleiner und liegt die Differenz innerhalb des Bereichs der unvermeidlichen Fehler, d. h. beträgt diese Differenz höchstens

$n\delta$ Secunden, wenn δ'' die Angabe des Nonius ist: so vertheilt man die Fehlersumme gleichheitlich auf alle Winkel.

Wir sehen nunmehr die Grössen A_1, A_2, A_3 .... A_n als die ausgeglichenen Winkelwerthe an und bestimmen hiermit die Neigungswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ der Polygonseiten $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ gegen die Abscissenaxe (die Richtungswinkel) nach der bekannten Formel:

$$\alpha_m = A_m + \alpha_{m-1} - 180^0. \tag{148}$$

Zu dieser Formel, welche aus der Figur sehr leicht abzuleiten ist, muss bemerkt werden, dass diejenigen Werthe α, welche vom Anfangspunkte der betreffenden Polygonseite aus nach rechts zur Abscissenaxe oder einer ihr parallelen Richtung laufen, positiv, und jene α, welche von dieser Richtung aus nach rechts zur Polygonseite gezählt werden, negativ sind.

Heissen die Coordinaten der aufeinanderfolgenden n Punkte

$$x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ x_3 y_3,\ x_4 y_4 \ldots\ldots x_n y_n$$

und setzt man deren Bestandtheile

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \Delta x_1,\ x_3 - x_2 = \Delta x_2 \ldots\ldots x_{\mu+1} - x_\mu = \Delta x_\mu \\ y_2 - y_1 &= \Delta y_1,\ y_3 - y_2 = \Delta y_2 \ldots\ldots y_{\mu+1} - y_\mu = \Delta y_\mu \end{aligned} \tag{149}$$

so ist offenbar nach der Figur:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= a_1 \cos \alpha_1,\ \Delta x_2 = a_2 \cos \alpha_2 \ldots\ldots \Delta x_\mu = a_\mu \cos \alpha_\mu \\ \Delta y_1 &= a_1 \sin \alpha_1,\ \Delta y_2 = a_2 \sin \alpha_2 \ldots\ldots \Delta y_\mu = a_\mu \sin \alpha_\mu \end{aligned} \tag{150}$$

und nach den Relationen (149):

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x_1 \\ x_3 &= x_2 + \Delta x_2 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ x_4 &= x_3 + \Delta x_3 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \text{ u. s. w. bis} \\ x_{\mu+1} &= x_\mu + \Delta x_\mu = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots\ldots + \Delta x_\mu \\ y_{\mu+1} &= y_\mu + \Delta y_\mu = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots\ldots + \Delta y_\mu. \end{aligned} \tag{151}$$

Setzt man hierin für die Coordinatentheile $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots \Delta y_1, \Delta y_2 \ldots$ ihre in den Formeln (150) angegebenen Werthe, so wird

$$\begin{aligned} x_{\mu+1} &= x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots\ldots + a_\mu \cos \alpha_\mu \\ y_{\mu+1} &= y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots\ldots + a_\mu \sin \alpha_\mu. \end{aligned} \tag{152}$$

Dafür kann man nach den aus §. 4, Seite 6 dieses Bands bekannten Bezeichnungen auch schreiben:

$$x_{\mu+1} = x_1 + [a_\nu \cos \alpha_\nu] \tag{153}$$

$$y_{\mu+1} = y_1 + [a_\nu \sin \alpha_\nu] \tag{154}$$

wobei das zweite Glied rechter Hand in (153) die Summe der Cosinusproducte $a_1 \cos \alpha_1$, $a_2 \cos \alpha_2$, $a_3 \cos \alpha_3$ bis $a_\mu \cos \alpha_\mu$ (d. i. vom Index $\nu = 1$ bis zu $\nu = \mu$) und dasselbe Glied rechter Hand in (154) die Summe der Sinusproducte $a_1 \sin \alpha_1$, $a_2 \sin \alpha_1$, $a_3 \sin \alpha_3$ bis $a_\mu \sin \alpha_\mu$ (d. i. vom Index $\nu = 1$ bis zu $\nu = \mu$) vorstellt.

Diese Ausdrücke gelten allgemein, wenn x_1 und y_1 bestimmte Werthe haben, also die Axenecke nicht in A_1 und die Abscissenaxe nicht in $A_1 A_n$ liegt, und wenn weiter das Polygon nicht geschlossen ist. Soll dasselbe geschlossen sein und das Axensystem von A_1 und $A_1 A_n$ ausgehen, so würden erstens die Coordinaten x_1 und y_1 null, zweitens wird $x_n = a_n$ und

$y_n = 0$, und drittens reicht in den allgemeinen Formeln der Index ν von 1 bis n — 1, so dass aus den letzteren hervorgeht:

$$x_n = a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + \ldots + a_{n-1} \cos\alpha_{n-1} = [a_\nu \cos\alpha_\nu] = a_n \quad (155)$$

$$y_n = a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + \ldots + a_{n-1} \sin\alpha_{n-1} = [a_\nu \sin\alpha_\nu] = 0. \quad (156)$$

Diese zwei Gleichungen gewähren ein Urtheil über die Güte der Polygonaufnahme und die Zuverlässigkeit der Rechnung: je näher nämlich der berechnete Werth von x_n dem gemessenen a_n und der berechnete Werth von y_n der Null kommt, desto besser werden die ausgeführten geodätischen und rechnerischen Arbeiten sein. Auffallende Differenzen wird man zunächst der Rechnung zur Last legen und diese daher sorgfältig wiederholen; zeigt sich der Verdacht unbegründet, so können jene Differenzen nur von der Messung herrühren, und es müsste diese neu gemacht werden, wenn eine Ausgleichung der Fehler nicht mehr gestattet wäre. Ein solcher Fall würde dann eintreten, wenn trotz der sorgfältig gemessenen und controlirten Winkel die berechnete Polygonseite x_n (die man zur Abscissenaxe desshalb gewählt hat, weil sie eine der längsten Seiten des Vielecks ist) von der gemessenen a_n um so viel abwiche, dass die Differenz $x_n - a_n = u$ grösser wäre, als $m \,.\, a_n$, wobei m die relative Genauigkeit des Längenmessapparats (bei der Kette etwa $\frac{1}{1000}$, bei hölzernen Latten etwa $\frac{1}{5000}$) vorstellt. Ist aber $u < m \,.\, a_n$, so gleicht man die zufälligen Messungsfehler dadurch aus, dass man jeden Abscissentheil Δx_1, $\Delta x_2 \ldots$ mit

$$\frac{x_n - a_n}{a_n} = m' \quad (157)$$

multiplicirt und um das erhaltene (positive oder negative) Product verbessert, so dass die neuen Abscissentheile $(1 + m')\,\Delta x_1$, $(1 + m')\,\Delta x_2 \ldots$ werden, aus deren Zusammensetzung sich jetzt $x_n = a_n$ ergibt. Die Ordinatentheile kann man mit dem Factor

$$\frac{y_n}{y_o} = m'', \quad (158)$$

der sich aus dem berechneten Werthe von y_n und der längsten Ordinate y_o des Polygons ergibt, multipliciren und dadurch verbessern, dass man jetzt $(1 + m'')\,\Delta y_1$; $(1 + m'')\,\Delta y_2 \ldots$ für Δy_1, $\Delta y_2 \ldots$ setzt. Dabei versteht es sich von selbst, dass, wenn der Werth von y_n nur sehr wenig von o oder der von x_n nur sehr wenig von a_n abweicht, die Verbesserung der Ordinaten und beziehungsweise der Abscissen auch unterlassen werden kann.

Ein anderes Verfahren der Ausgleichung der unvermeidlichen Messungsfehler besteht darin, dass man den Abscissenunterschied $x_n - a_n = u$ auf die Abscissen und den Ordinatenwerth y_n auf die Ordinaten der n — 1 Punkte A_2, A_3, $A_4 \ldots A_n$ gleichheitlich vertheilt, wodurch freilich auch die Polygonwinkel A_1, A_2, $A_3 \ldots$ und die Richtungswinkel α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$ kleine Aenderungen erleiden; in der Regel zieht man aber das erste Verfahren vor.

Fragt man, ob auf die Ausgleichung des vorliegenden Falls die Methode der kleinsten Quadrate nicht angewendet werden kann, und wenn ja, warum

sie nicht angewendet wird, so ist darauf zu antworten, dass es zwar nicht schwierig wäre, dieses strengere Ausgleichungsverfahren hier zur Geltung zu bringen, dass man aber auf dessen Anwendung wegen der grossen Mühe, die es verursacht, und der kleinen Vortheile, die es gewährt, verzichtet und Zeit und Mühe lieber auf die Längen- und Winkelmessung verwendet, um diese so genau als möglich zu machen.

B. In einem offenen Polygon (einem polygonalen Zuge) ist das Messungs- und Rechnungsverfahren von dem vorstehend beschriebenen nicht verschieden, nur die Controle für die Genauigkeit der Winkelmessung, welche in der theoretischen Winkelsumme des Polygons liegt, und in der Regel auch die der Längenmessung, welche sich in den Coordinaten der Endpunkte eines geschlossenen Polygons ausspricht, fällt hier weg, wenn nicht der offene Zug an zwei Punkte eines trigonometrischen Netzes anzuschliessen ist, deren Coordinaten gegeben sind. Denn in diesem Falle schliesst die bekannte oder doch leicht zu berechnende Verbindungslinie der trigonometrischen Punkte das offene Polygon, und weicht die dann vorliegende Aufgabe nur noch ganz unbedeutend von der eben gelösten ab. Einiges Nachdenken fordert nur die Berechnung der Richtungswinkel der ersten und letzten Seite des Polygons. Sei desshalb in der nachstehenden Fig. 83 die Gerade $A_1 X$ die Verbindungslinie der Endpunkte des offenen Zugs, welcher aus m Strecken bestehe. Die Winkel A_2, A_3, $A_4 \ldots A_{m-1}$ nebst den Seiten $A_1 A_2 = a_1$, $A_2 A_3 = a_2$, $A_3 A_4 = a_3 \ldots A_{m-1} A_m = a_{m-1}$ seien gemessen und $A_m A_1 = a_m$ aus den Coordinaten der Punkte A_1 und A_m bekannt. Wäre der Richtungswinkel α_1 bekannt, so erhielte man $\alpha_2 = A_2 + \alpha_1 - 180^0$, $\alpha_3 = A_3 + \alpha_2 - 180^0 = A_3 + A_2 + \alpha_1 - 2 \,.\, 180^0$ u. s. w. bis $\alpha_m = A_m + \alpha_{m-1} - 180^0$, und A_m fände sich aus der Gleichung, welche die theoretische Winkelsumme des m Ecks vorstellt und worin $A_1 = \alpha_1$ gesetzt ist, nämlich aus

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_m = 180^0 \,(m-2). \qquad (159)$$

Nun ist aber nach Gleichung (156) die Ordinate in A_m oder $y_m = 0$, daher

$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots\ldots + a_{m-1} \sin \alpha_{m-1} = 0 \qquad (160)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + A_2 - 180^0$$
$$\alpha_3 = \alpha_1 + A_2 + A_3 - 2 \,.\, 180^0$$
$$\alpha_4 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 3 \,.\, 180^0 \text{ u. s. f. bis}$$
$$\alpha_{m-1} = \alpha_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_{m-1} - (m-2)\, 180^0,$$

folglich lassen sich alle α auf die Form $\alpha_1 + c$ bringen, so dass $\alpha_2 = \alpha_1 + c_2$, $\alpha_3 = \alpha_1 + c_3, \ldots\ldots \alpha_{m-1} = \alpha_1 + c_{m-1}$ wird. Es geht daher die Gl. (160) in folgende über

$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin (\alpha_1 + c_2) + \ldots\ldots + a_{m-1} \sin (\alpha_1 + c_{m-1}) = 0 \quad (161)$$

und man erhält aus dieser durch Entwicklung der Sinusfactoren und Division mit $\cos \alpha_1$ die zur Berechnung von α_1 dienende Gleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-(a_2 \sin c_2 + a_3 \sin c_3 + \ldots\ldots + a_{m-1} \sin c_{m-1})}{a_1 + a_2 \cos c_2 + a_3 \cos c_3 + \ldots\ldots + a_{m-1} \cos c_{m-1}}. \quad (162)$$

Hat man hieraus α_1 gefunden, so kann man die Richtigkeit dieses

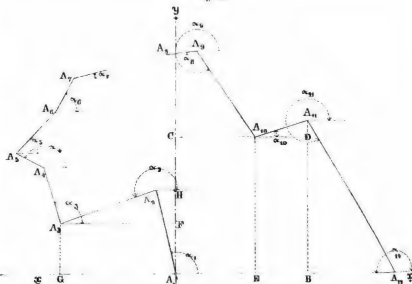
Werths noch dadurch prüfen, dass man zusieht, ob er die Gleichung (155), nämlich

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos (\alpha_1 + c_2) + \ldots\ldots + a_{m-1} \cos (\alpha_1 + c_{m-1}) = a_m \quad (163)$$

erfüllt. Es bedarf wohl keiner weiteren Erörterung, dass man auch diese Bedingung zur Bestimmung von α_1 verwenden kann, wenn man die Auflösung einer ziemlich umfangreichen quadratischen Gleichung nicht scheut, welche sich aus der Division der Gleichung mit $\cos \alpha_1$ ergibt, wodurch die rechte Seite $= a_m \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}$ wird. Hat man für α_1 aus den beiden Bedingungsgleichungen (162) und (163) zwei von einander etwas abweichende Werthe erhalten, so ist das arithmetische Mittel als derjenige Werth anzusehen, welcher der Wahrheit am nächsten kommt, und daher für die weitere Rechnung zu verwenden.

§. 74. Beispiel zu §. 73. Es sei ein Zwölfeck mit hölzernen Messlatten und einem kleinen Theodolithen aus dem Umfange aufgenommen worden, und diese Aufnahme habe die in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Polygon-Winkel und Seiten ergeben: man soll die zum Auftragen des Zwölfecks dienenden Coordinaten berechnen. (Fig. 83.)

Fig. 83.



Da die Summe aller Polygonwinkel $(n-2)\,\pi = 10 \, . \, 180 = 1800^0$ betragen soll, in Wirklichkeit aber $1800^0\,2'\,12''$ beträgt (Spalte 2), so ist der Ueberschuss von 132″ auf sämmtliche 12 Winkel gleichheitlich zu vertheilen, d. h. es sind von jedem 11″ abzuziehen. Thut man dieses, so erhält man die in Spalte 3 vorgetragenen verbesserten Polygonwinkel.

Mit diesen kann man nach der Formel $\alpha_m = A_m + \alpha_{m-1} - 180^0$ die Richtungswinkel der Polygonseiten gegen die als Abscissenaxe angenommene Seite $A_1 A_{12} = A_1 X$ berechnen. Für die Seite

$a_1 = A_1 A_2$ ist der Neigungswinkel $\alpha_1 = A_1 = 97^0\, 32'\, 2''$; für

$a_2 = A_2 A_3$ ist $m = 2$ und daher $\alpha_2 = 271^0\, 6'\, 34'' + 97^0\, 32'\, 2'' - 180^0 = 188^0\, 38'\, 36''$; für

$a_3 = A_3 A_4$ ist $m = 3$ und daher $\alpha_3 = 92^0\, 3'\, 13'' + 188^0\, 38'\, 36'' - 180^0 = 100^0\, 41'\, 49''$; für

$a_4 = A_4 A_5$ ist $m = 4$ und daher $\alpha_4 = 201^0\, 1'\, 53'' + 100^0\, 41'\, 49'' - 180^0 = 121^0\, 43'\, 42''$ u. s. w.

Sind auf diese Weise alle Neigungswinkel von α_1 bis α_{12}, wobei immer von der betreffenden Seite aus nach rechts bis zur Richtung der Abscissenaxe zu zählen ist, festgesellt, so kann man mit Hilfe derselben und der in Spalte 6 enthaltenen Seitenlängen zuerst die Bestandtheile der Ordinaten und Abscissen nach den Formeln (150) und hierauf die vollständigen Coordinaten nach den Formeln (151) berechnen. Es ist nämlich für den Punkt

A_2 der Abscissentheil $\Delta x_1 = a_1 \cos \alpha_1 = 26,^m8 \,.\, \cos 97^0\, 32'\, 2'' = - 3,^m514$, und

der Ordinatentheil $\Delta y_1 = a_1 \sin \alpha_1 = 26,^m8 \,.\, \sin 97^0\, 32'\, 2'' = + 26,^m569$; für

A_3 der Abscissentheil $\Delta x_2 = a_2 \cos \alpha_2 = 118,^m27 \,.\, \cos 188^0\, 38'\, 36'' = - 116,^m927$, und

der Ordinatentheil $\Delta y_2 = a_2 \sin \alpha_2 = 118,^m27 \,.\, \sin 188^0\, 38'\, 36'' = - 17,^m774$; für

A_4 der Abscissentheil $\Delta x_3 = a_3 \cos \alpha_3 = 18,^m56 \,.\, \cos 100^0\, 41'\, 49'' = - 3,^m445$, und

der Ordinatentheil $\Delta y_3 = a_3 \sin \alpha_3 = 18,^m56 \,.\, \sin 100^0\, 41'\, 49'' = + 18,^m237$, u. s. w.

Setzt man diese Theile durch Addition zusammen, wie es die Formeln (155) und (156) verlangen, so findet man für den Punkt

A_1, der die Axenecke vorstellt, selbstverständlich $y_1 = 0$ und $x_1 = 0$; für

A_2 die Abscisse $x_2 = a_1 \cos \alpha_1 = - 3,^m514$ und die Ordinate $y_2 = a_1 \sin \alpha_1 = + 26,^m569$; für

A_3 die Abscisse $x_3 = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 = - 3,^m514 - 116,^m927 = - 120,^m441$ und

die Ordinate $y_3 = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 = + 26,^m569 - 17^m774 = + 8,^m795$; für

A_4 die Abscisse $x_4 = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 = - 120,^m441 - 3,^m445 = - 123,^m886$ und

die Ordinate $y_4 = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 = + 8,^m795 + 18,^m237 = + 27,^m032$ u. s. w.

Rechnet man in dieser Weise fort, so erhält man schliesslich für den Punkt

A_{12} die Abscisse $x_{12} = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_{11} \cos \alpha_{11} = + 251{,}^{m}613$ und

die Ordinate $y_{12} = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_{11} \sin \alpha_{11} = + 0{,}^{m}257$,

während für diesen Punkt die Ordinate $y_{12} = 0$ und die Abscisse $x_{12} = 251{,}^{m}620$ sein sollte: der Schlussfehler beträgt also für die Ordinate $0{,}^{m}257$ und für die Abscisse $-0{,}^{m}007$. Den letzteren Fehler kann man übersehen, der erstere ist aber auf alle Ordinaten zu vertheilen, was in folgender Weise geschehen kann. Die zu A_{11} gehörige Ordinate ergab sich aus der Berechnung zu $+171{,}^{m}555$, also ist der in Formel (158) mit m″ bezeichnete Factor

$$m'' = \frac{0{,}257}{171{,}555} = 0{,}0015.$$

Da nun der positive Werth der letzten Ordinate $0{,}^{m}257$ auf Null gebracht werden muss, so sind die an den einzelnen Ordinatenstücken anzubringenden Verbesserungen v_1 ihrer absoluten Grösse nach allerdings $m''.\Delta y$, dem Vorzeichen nach aber sind sie negativ, und daher ist hier $1 + m'' = 1 - 0{,}0015 = 0{,}9985$. Multiplicirt man alle Ordinatenstücke in Spalte 7 mit dieser Zahl, so erhält man deren Verbesserungen in Spalte 11, und aus diesen die ausgeglichenen Ordinaten in Spalte 12, während die keiner Ausgleichung bedürfenden Abscissen in Spalte 10 enthalten sind. (Die Tabelle, auf welche sich der vorstehende Text bezieht, ist der besseren Uebersicht wegen in zwei Theile zerlegt, deren Spalten fortlaufend numerirt sind. Die darin vorkommenden Zahlen wurden dem Lehrbuche der practischen Geometrie von Hunäus (2. Auflage, S. 314) entlehnt).

Erste Hälfte der Tabelle zu §. 74.

Eckpunkte.	Gemessene Polygonwinkel.	Verbesserte Polygonwinkel.	Richtungswinkel.	Polygonseiten.	Coordinatentheile: Abscissen.	Coordinatentheile: Ordinaten.
	A	A − v	α	a	Δx	Δy
A_1	97° 32′ 13″	97° 32′ 2″	97° 32′ 2″	26m,80	0m	0m
A_2	271 6 45	271 6 34	188 38 36	118,27	− 3,514	+ 26,569
A_3	92 3 24	92 3 13	100 41 49	18,56	− 116,927	− 17,774
A_4	201 2 4	201 1 53	121 43 42	6,45	− 3,445	+ 18,237
A_5	96 51 34	96 51 23	38 35 5	25,70	− 3,392	+ 5,486
A_6	196 20 47	196 20 36	54 55 41	78,73	+ 20,089	+ 16,029
A_7	135 35 29	135 35 18	10 30 59	49,96	+ 45,238	+ 64,435
A_8	170 1 14	170 1 3	0 32 2	21,20	+ 49,121	+ 9,118
A_9	138 5 19	138 5 8	318 37 10	67,10	+ 21,199	+ 0,197
A_{10}	271 2 17	271 2 6	49 39 16	122,83	+ 50,347	− 44,357
A_{11}	73 50 53	73 50 42	303 29 58	205,42	+ 79,520	+ 93,615
A_{12}	56 30 13	56 30 2	180 0 0	251,62	+ 113,377	− 171,298
A_1	1800 2 12	1800 0 0			− 251,620	0

Zweite Hälfte der Tabelle zu §. 74.

Eckpunkte.	Coordinaten: Abscissen.	Ordinaten.	Verbesserte Theile der Abscissen.	Ordinaten.	Verbesserte Abscissen.	Ordinaten.
	x	y	$(1+m')\Delta x$	$(1+m'')\Delta y$	x	y
A_1	0m	0m	0m	0m	0m	0m
A_2	− 3,514	+ 26,569	− 3,514	+ 26,529	− 3,514	+ 26,529
A_3	− 120,441	+ 8,795	− 116,927	− 17,747	− 120,441	+ 8,782
A_4	− 123,886	+ 27,032	− 3,445	+ 18,210	− 123,886	+ 26,992
A_5	− 127,278	+ 32,518	− 3,392	+ 5,478	− 127,278	+ 32,470
A_6	− 107,189	+ 48,547	+ 20,089	+ 16,005	− 107,189	+ 48,475
A_7	− 61,951	+ 112,982	+ 45,238	+ 64,338	− 61,951	+ 112,813
A_8	− 12,830	+ 122,100	+ 49,121	+ 9,104	− 12,830	+ 121,917
A_9	+ 8,369	+ 122,297	+ 21,199	+ 0,197	+ 8,369	+ 122,114
A_{10}	+ 58,716	+ 77,940	+ 50,347	− 44,291	+ 58,716	+ 77,823
A_{11}	+ 138,236	+ 171,555	+ 79,520	+ 93,475	+ 138,236	+ 171,298
A_{12}	+ 251,613	+ 0,257	+ 113,377	− 171,298	+ 251,613	0
A_1	− 0,007	+ 0,257	− 251,620	0	− 0,007	0

Um auch ein Rechnungsbeispiel für den Fall B zu geben, sei der Polygonalzug $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{12}$ an die gegebene Seite $A_1 A_{12} = 251,^{m}62$ angeschlossen. Hier ist vor allen Dingen der Richtungswinkel α_1 zu suchen, und dazu dient die Gleichung (162). Da die in derselben vorkommenden Seiten $a_2, a_3, a_4, \ldots a_{m-1}$ bekannt sind, so brauchen nur die Winkel c_2, c_3, c_4, $\ldots c_{m-1}$ ausgedrückt zu werden. Nun ist aber

$$c_2 = A_2 - 180^0 = 271^0\, 6'\, 34'' - 180^0 = 91^0\, 6'\, 34''$$

$$c_3 = A_2 + A_3 - 2 \,.\, 180^0 = c_2 + (A_3 - 180^0) = 3^0\, 9'\, 47''$$

$$c_4 = A_2 + A_3 + A_4 - 3 \,.\, 180^0 = c_3 + (A_4 - 180^0) = 24^0\, 11'\, 37'' \text{ u. s. w.}$$

daher, wenn man in Gleichung (162) die betreffenden Werthe einsetzt:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-\,(118,27 \,.\, \sin 91^0\, 6'\, 34'' + 18,56 \,.\, \sin 3^0\, 9'\, 47'' + \ldots + 205,42 \sin 154^0\, 2'\, 4'')}{26,80 + 118,27 \,.\, \cos 91^0\, 6'\, 34'' + 18,56 \cos 3^0\, 9'\, 47'' + \ldots + 205,42 \cos 154^0\, 2'\, 24''}$$

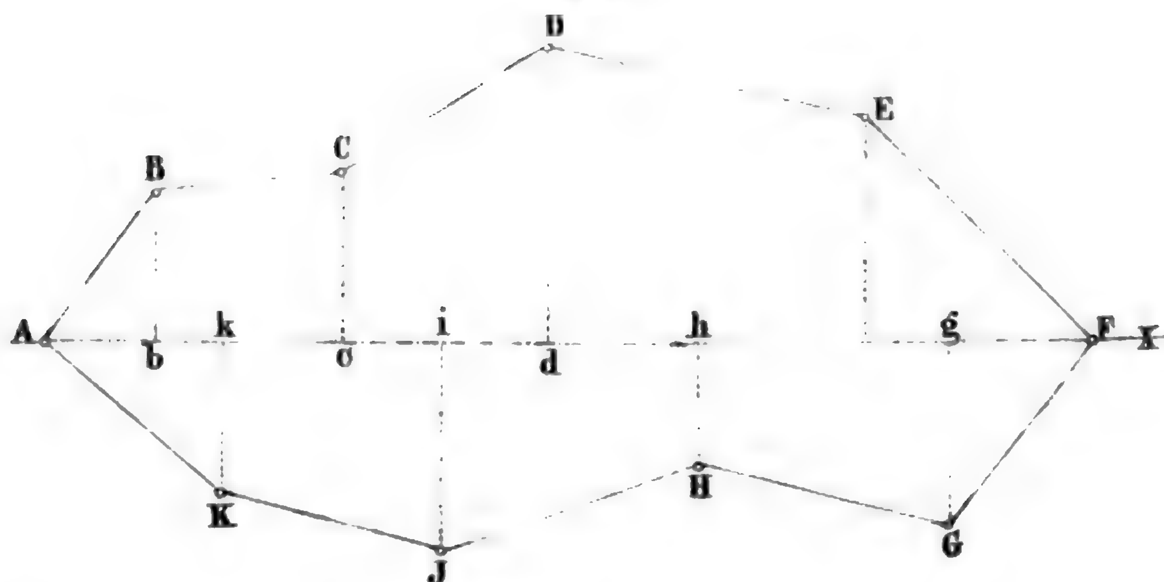
Hieraus folgt $\alpha_1 = A_1 = 97^0\, 32'\, 2''$ und damit nach Gleichung (159) $A_{12} = 10 \,.\, 180^0 - (A_1 + A_2 + \ldots + A_{11}) = 56^0\, 30'\, 2''$.

Mit diesen Werthen ist die übrige Rechnung auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt.

§. 75. Aufgabe. Ein auf dem Felde abgestecktes Vieleck oder eine Reihe von Punkten nach der Coordinatenmethode aufzunehmen.

Am zweckmässigsten ist es, rechtwinklige Coordinaten anzunehmen, da sich die Richtungen der Ordinaten mit dem Prismenkreuze oder Winkelspiegel, und noch besser mit dem fünfseitigen Winkelprisma leicht abstecken lassen. Als Abscissenaxe wählt man eine der längsten Diagonalen, auf der sich Abscissen gut messen und wo möglich alle Punkte des Vielecks sehen lassen. Stellt ABC ... K (Fig. 84) das aufzunehmende Polygon

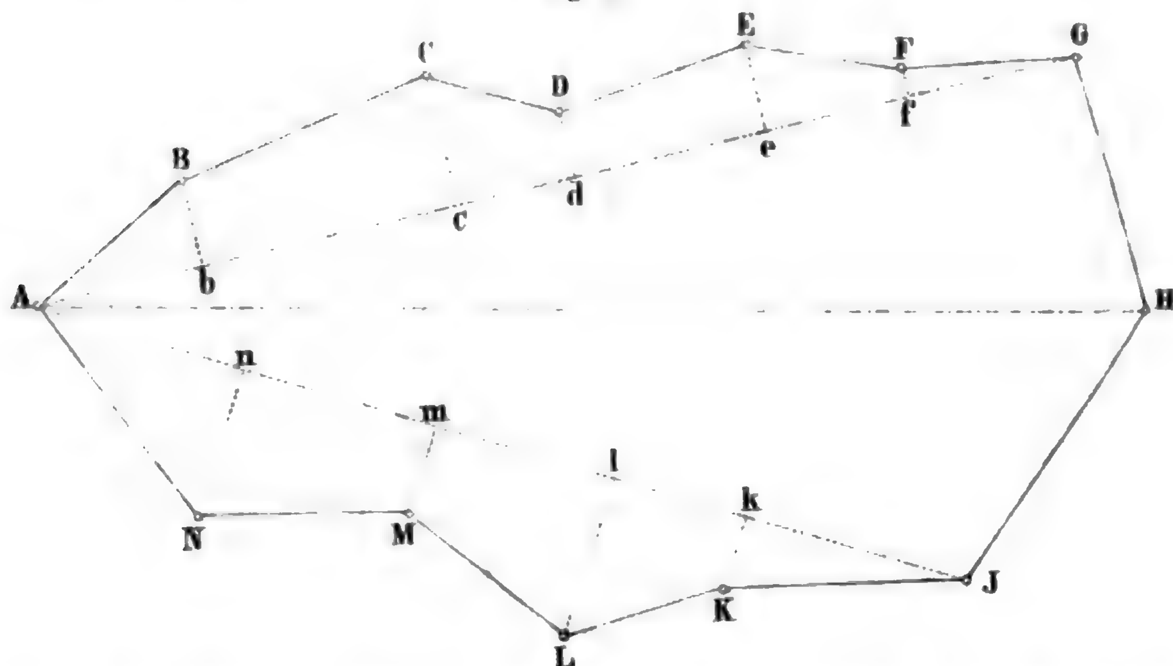
Fig. 84.



vor, so mache man A zum Anfange der Coordinaten und AF zur Abscissenaxe, fälle von allen Eckpunkten Senkrechte auf AF, messe die horizontalen Entfernungen Ab, Ak, Ac .... AF genau ab und verzeichne sie in einer Skizze, die man sich von dem Vielecke macht. Hierauf messe man auch noch die Ordinaten Bb, Cc, Dd ... Kk und schreibe deren Längen ebenfalls genau auf.

Werden die auf eine Abscissenaxe bezogenen Ordinaten sehr lang, wie dieses bei Fig. 85 der Fall wäre, wenn AH zur Abscissenaxe gewählt

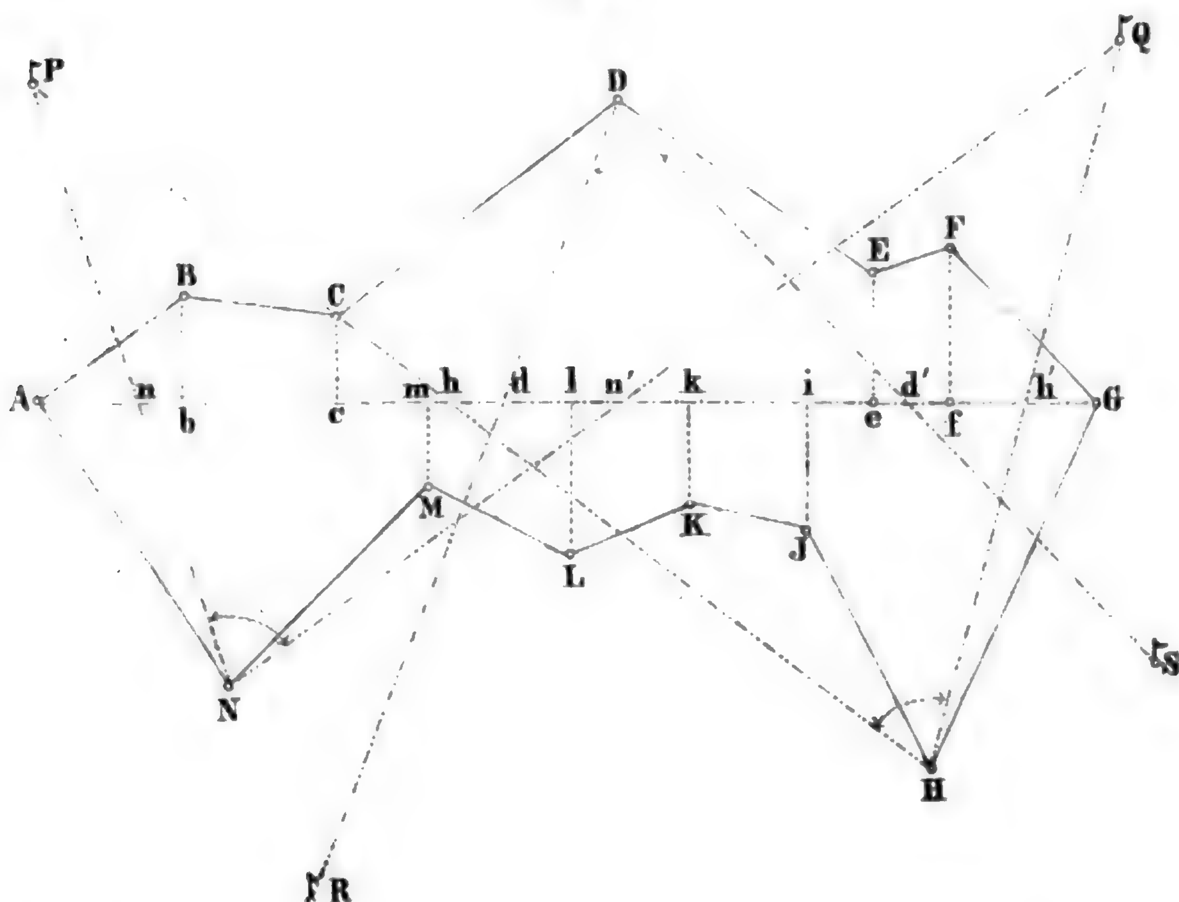
Fig. 85.



würde, so nimmt man besser zwei Abscissenaxen (hier AG und AJ) an, misst deren Neigungswinkel $GAJ = \psi$ und bestimmt in Bezug auf diese alle Eckpunkte wie vorhin, mit Ausnahme des Punkts H, welcher sich ergibt, indem man die Seiten GH, JH und nöthigenfalls den Winkel GHJ misst.

Hat man in der Umgebung des aufzunehmenden Vielecks mehrere feste Punkte, deren gegenseitige Lage schon bekannt ist, wie z. B. P, Q, R, S in Fig. 86, so kann man die entfernter liegenden Vieleckspunkte D, H, N dadurch aufnehmen, dass man von ihnen aus nach zweien der gegebenen Fixpunkte gerade, die Abscissenaxe schneidende Linien zieht, und deren Schnittpunkte auf dieser Axe einmisst. Hiernach wird der Punkt D aus den Abscissen Ad und Ad' der Geraden DR und DS, der Punkt H aus den Abscissen Ah und Ah' der Linien HP und HQ, endlich der Punkt N aus den Abscissen An und An' der Richtungen NP und NQ gefunden, weil mit d und d' auch dR und d'S, mit h und h' auch hP und h'Q, und mit n und n' auch nP und n'Q bekannt sind, aus denen sich nach-

Fig. 86.



einander die Punkte D, H, N als Durchschnitte verlängerter Richtungen ergeben. Man wird ohne weitere Auseinandersetzung einsehen, dass dieses Verfahren in gebirgigem Terrain, wo lange Linien schwer zu messen sind, von Vortheil ist und sowohl bei der Aufnahme mit dem Messtische als mit dem Theodolithen angewendet werden kann. Zugleich liefert dieses Verfahren einen neuen Beweis von der vielfachen Anwendbarkeit des Prismenkreuzes und des fünfseitigen Winkelprismas; denn die Schnittpunkte d, d', h, h', n, n' etc. werden auf die schnellste Art damit gefunden. Schliesslich bedarf es wohl kaum der Erinnerung, dass die Hilfslinien DR, DS etc. so gewählt werden müssen, dass die Winkel RDS, PHQ, PNQ weder zu

spitz noch zu stumpf werden, mit anderen Worten: dass die Punkte D, H, N aus „guten Schnitten" hervorgehen.

§. 76. Aufgabe. Mit Hilfe des Messtisches aus der bekannten Lage dreier unzugänglichen Punkte die unbekannte Lage eines vierten auf dem Felde gegebenen Punkts durch blosse Winkelmessung zu bestimmen.

Dieses auch unter dem Namen „Pothenot'sche Aufgabe" oder „Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte" bekannte Problem führt die erste Bezeichnung mit Unrecht; denn nicht Pothenot, der französische Akademiker, welcher im Jahre 1692 ein Mémoire über dieses Problem schrieb, ist sein Erfinder, sondern Willebrord Snellius, der niederländische Mathematiker, welcher es bereits im Jahre 1614 aufstellte, löste und veröffentlichte. Gleichwohl behalten wir den einmal üblichen Namen für die Aufgabe bei, welche der practische Geometer bei der Aufnahme von Flurmarkungen häufig zu lösen hat. Er kann sich dazu der Rechnung oder der geometrischen und mechanischen Construction bedienen. Von der Lösung durch Rechnung ist später die Rede, hier werden bloss die Zeichnung und ein besonderer kleiner Apparat als Hilfsmittel gebraucht.

Die drei bekannten Punkte sollen auf dem Felde mit A, B, C und auf dem Messtische mit a, b, c bezeichnet sein: das Bilddreieck a b c ist selbstverständlich dem Felddreiecke ABC ähnlich, und beide hat man sich auf eine horizontale Ebene, wofür man die des richtig gestellten Messtischblatts ansehen kann, projicirt zu denken. Der vierte auf dem Felde gegebene Punkt heisse D und sein auf dem Messtische gesuchtes Bild d. Unsere Aufgabe verlangt nun: dass von D aus durch blosse Winkelmessung und Zeichnung der Punkt d so bestimmt werde, dass das Viereck abcd dem Vierecke ABCD völlig ähnlich sei.

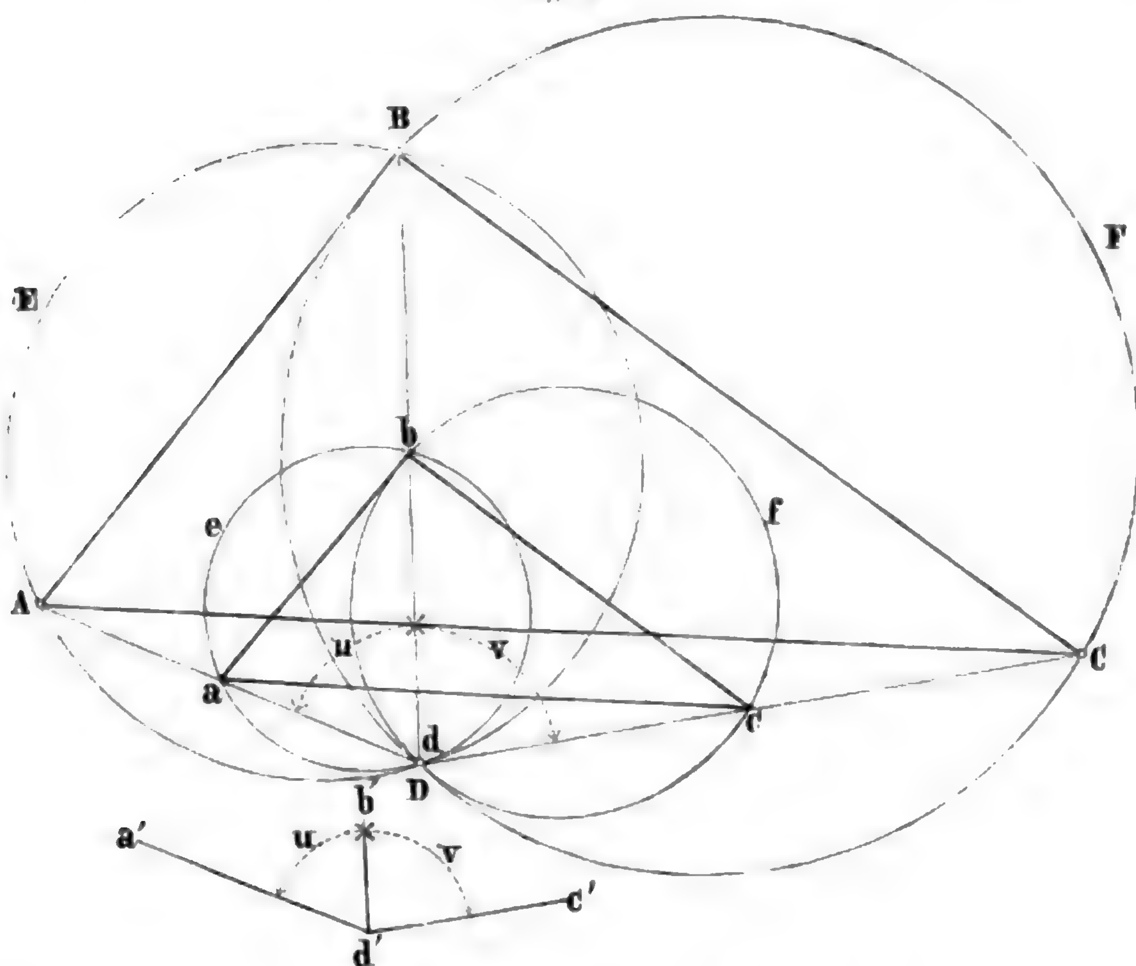
Es gibt verschiedene graphische Auflösungen dieser Aufgabe: die einen geben den gesuchten Punkt d direct durch Construction, die anderen indirect durch Probiren. Das indirecte Verfahren führt hier in der Regel schneller zum Ziele als das directe, wesshalb es auch meist angewendet wird. Wir werden beide Verfahrungsweisen erörtern und denselben eine mechanische Lösung beifügen.

A. Directe Auflösungen der Pothenot'schen Aufgabe.

1) Denkt man sich von dem Punkte D aus die Horizontalwinkel u und v, unter welchen die Dreieckseiten AB und CB gesehen werden, bestimmt und über AB einen Kreis AEB beschrieben, welcher in der Richtung nach D auf dem Bogen AEB den Peripheriewinkel u fasst, so muss dieser Kreis offenbar durch D gehen, weil der Winkel ADB = u ist. Denkt man sich ebenso über BC einen Kreis beschrieben, der auf dieser Sehne und gegen D hin einen Peripheriewinkel v fasst, so muss dieser Kreis ebenfalls durch D gehen, weil der Winkel BDC = v ist. Was nun von dem Vierecke ABCD gilt, muss offenbar auch für das Viereck abcd gelten, weil dieses jenem ähnlich ist: d. h. der Punkt d liegt gleichzeitig auf dem

Kreise aeb, welcher rechts der Sehne ab und auf ihr den Peripheriewinkel u fasst, und auf dem Kreise bfc, welcher über der Sehne bc so beschrieben ist, dass er links von ihr und auf ihr den Peripheriewinkel v liefert; der Punkt d kann folglich nur in dem Schnittpunkte der beiden Kreise liegen. Dieses directe Verfahren erfordert also Nichts als die Messung der Winkel u, v und die Construction der eben beschriebenen zwei Kreise aeb, bfc, welche die Fig. 87 darstellt. Diese zwei Kreise fallen aber, wie man sich leicht überzeugt, in einen zusammen, wenn der Punkt D entweder auf dem Kreise ABC liegt, oder wenn die drei Punkte A, B, C eine Gerade bilden, welche durch D geht. In dem

Fig. 87.

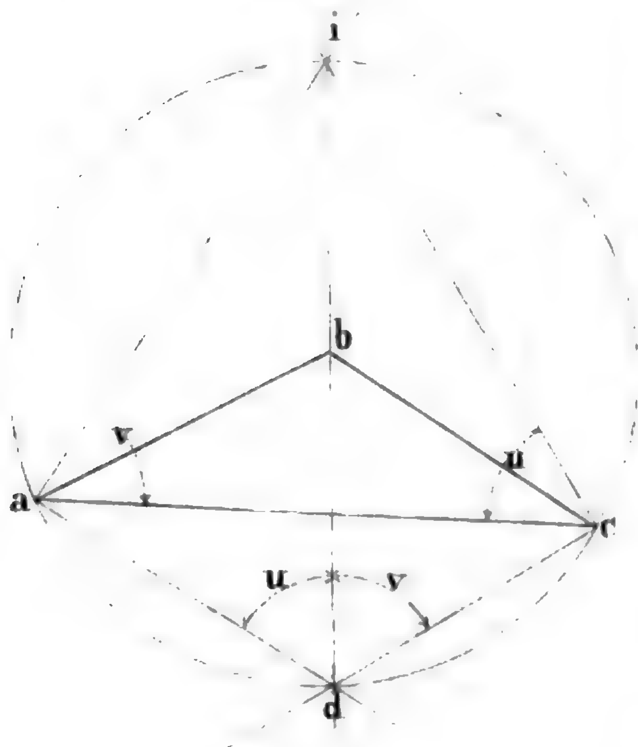


ersteren Falle liefert jeder Punkt des Kreises ABCD die Peripheriewinkel u und v, wodurch D unbestimmt bleibt; und in dem letzteren Falle hätte man es eigentlich mit einem Kreise von unendlichem Halbmesser und mit Winkeln u und v, welche beziehungsweise = 0 und 180° wären, zu thun; D bleibt also auch hier unbestimmt. Diese zwei Fälle (welche im Grunde nur einen bilden) ausgenommen, erhält man durch die Messung der Winkel u, v und die Construction der Kreise aeb, bfc stets den gesuchten Punkt d. Bei den folgenden Betrachtungen sind diese Fälle stillschweigend ausgeschlossen.

2) Eine zweite directe Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe besteht darin, die Winkel u und v zu messen und wie Fig. 88 zeigt, u an die

Linie ac und die Ecke c = aci, v aber an dieselbe Linie ac und die Ecke a = cai anzutragen, den Schnittpunkt i der Schenkel ci, ai zu suchen, über a, i, c einen Kreis zu beschreiben, ib zu ziehen und den Schnittpunkt d dieser Geraden mit dem Kreise als den gesuchten Punkt zu nehmen. Der Punkt d entspricht offenbar den gestellten Bedingungen: denn es ist der Winkel adb = aci = u, weil beide Winkel auf der Sehne ai des Kreises aic stehen; und es ist ferner der Winkel cdb = cai = v, weil cdb und cai zu der Sehne ic des Kreises aic gehören. Man sieht leicht ein, dass diese directe Lösung um so unsicherer wird, je kleiner der Abstand der Punkte i und b ist, weil mit der Abnahme der Länge ib die Unsicherheit der Richtung ibd, in welcher d liegt, wächst. Dieser Umstand und die Schwierigkeit, auf dem Messtische Kreise zu construiren, welche durch drei gegebene Punkte gehen, bewirken, dass diese zweite directe Lösung fast so wenig als die erste angewendet wird.

Fig. 88.

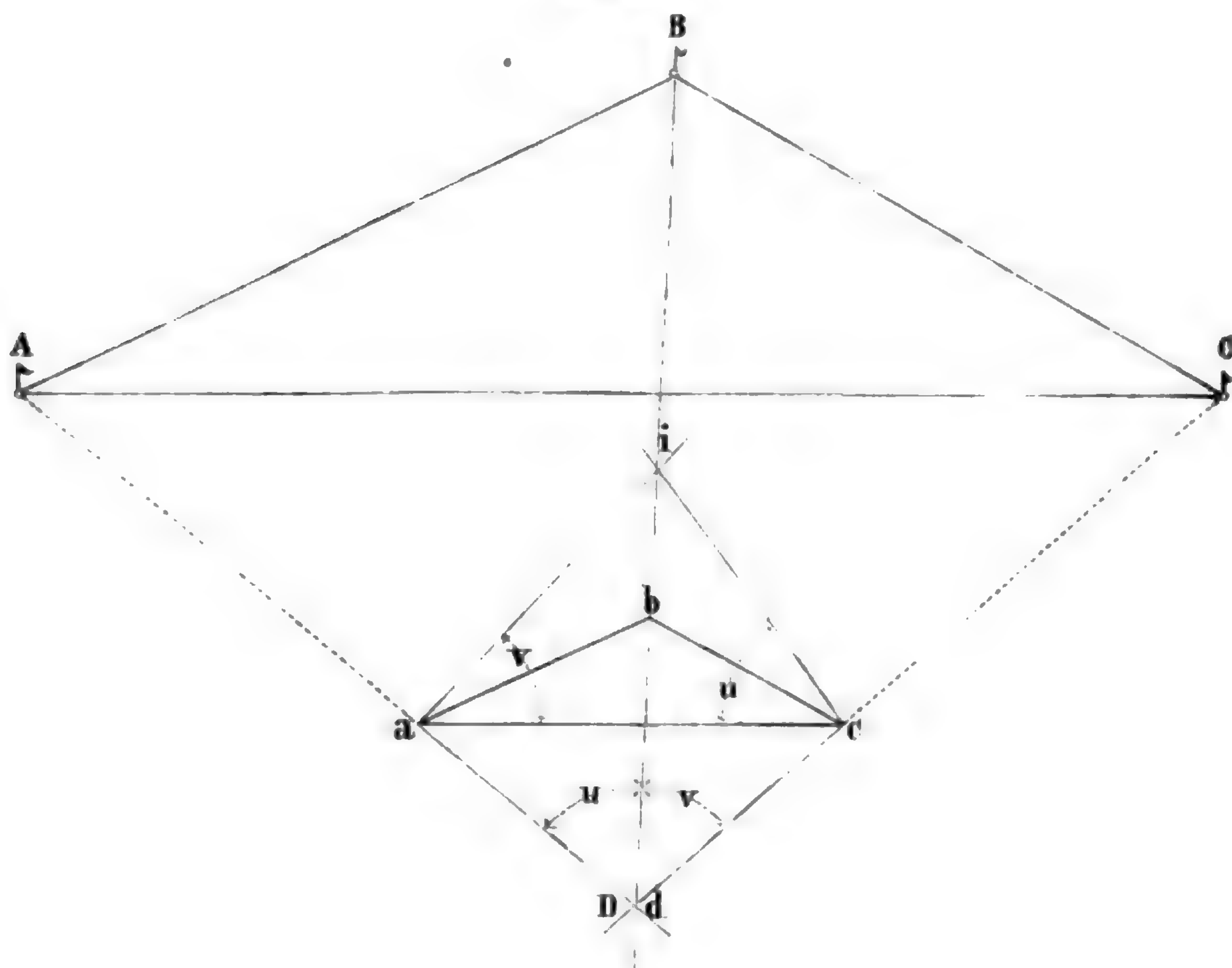


3) Das von Bohnenberger angegebene Verfahren, einen Punkt auf drei andere rückwärts einzuschneiden, unterscheidet sich von dem zweiten nur dadurch, dass man die Winkel u und v sofort bei der Aufnahme an die Seite ac legt und die Construction des Kreises aic erspart. Denkt man sich nämlich den Punkt a über D gestellt und ac nach DC gerichtet, so wird die Kippregel, wenn sie an a liegt und auf B eingestellt ist, den Winkel cai = v geben; denkt man sich dann ferner den Punkt c über D und die Seite ca in die Richtung DA gebracht, so liefert die an c liegende und auf B gerichtete Kippregel den Winkel aci = u, und den Schnittpunkt i, welcher nach der vorigen Figur mit dem Punkte b in der Richtung BD liegen muss; denkt man sich endlich den Messtisch so gestellt, dass die auf ihm gezogene Linie bi durch B geht und der zu erwartende Punkt d nahezu in das Loth von D fällt, so braucht man schliesslich nur noch die Kippregel an a oder c zu legen und auf A oder C einzustellen, um den Schnitt d mit bi zu finden. Stellt man nach einander auf beide Punkte A und C ein, so sollen sich die drei Visirlinien aA, cC, bB in einem und demselben Punkte d schneiden; geschieht es nicht, so ist die Arbeit mehrmals zu wiederholen und zu verbessern, bis jene Forderung erfüllt ist. Es würde zu mühsam sein, wenn man den Messtisch dreimal so stellen wollte, dass a, c und der muthmassliche Punkt d genau über D kommen; es ist

aber auch diese dreimalige Aufstellung nicht nöthig, wenn man überlegt, dass die Winkel u und v auch dann genau genug erhalten werden, wenn man bloss den vorläufig angenommenen Punkt d über D bringt und hierauf den Messtisch so dreht, dass die Seite a c einmal durch C und das anderemal durch A geht. Der Fehler δ, welcher hierdurch in den Winkel v kommt, ist ausgedrückt durch

$$\sin \delta = \frac{e}{l}$$

Fig. 89.



wobei e die Excentricität des Punkts a, d. i. den horizontalen Abstand dieses Punkts von dem Lothe in D, und l die Entfernung D C bezeichnet. Da aber δ klein ist, so kann man

$$\delta = 206265'' \cdot \frac{e}{l}$$

setzen. Dieser Ausdruck gilt selbstverständlich auch für den Winkel u, wenn man für e und l die entsprechenden Werthe setzt. Ist z. B. $e = 0',2$ und $l = 1000'$, so wird der Winkelfehler $\delta = 41,3$ Secunden, also so klein, dass man ihn durch die Zeichnung auf dem Messtische nicht mehr ausdrücken kann.

Durch verschiedene Annahmen über die Lage des Punkts D gegen A, B, C kann man leicht die Fälle auffinden, in welchen diese dritte directe

Lösung der vorliegenden Aufgabe mehr oder weniger Genauigkeit gibt: sie ist nämlich um so ungenauer, je kürzer die Orientirungslinie bi ist; wie sich aber diese darstellt, mag man an den nachstehenden drei Figuren ersehen, in welchen der Punkt D zweimal ausserhalb und einmal innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

Fig. 90.

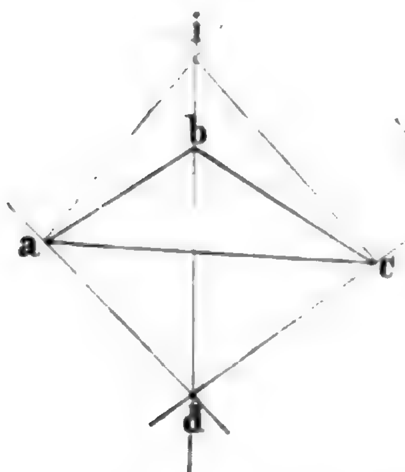


Fig. 91.

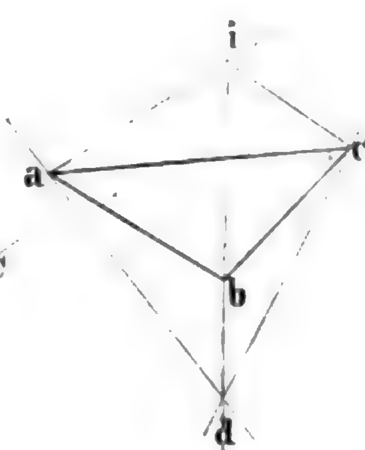
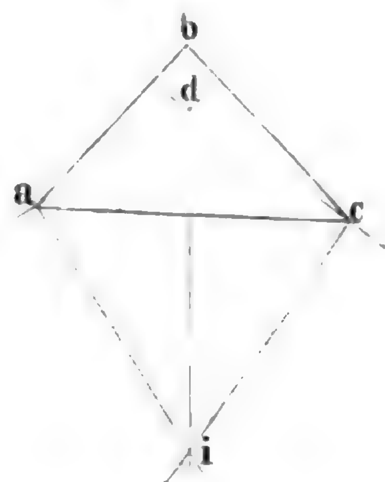


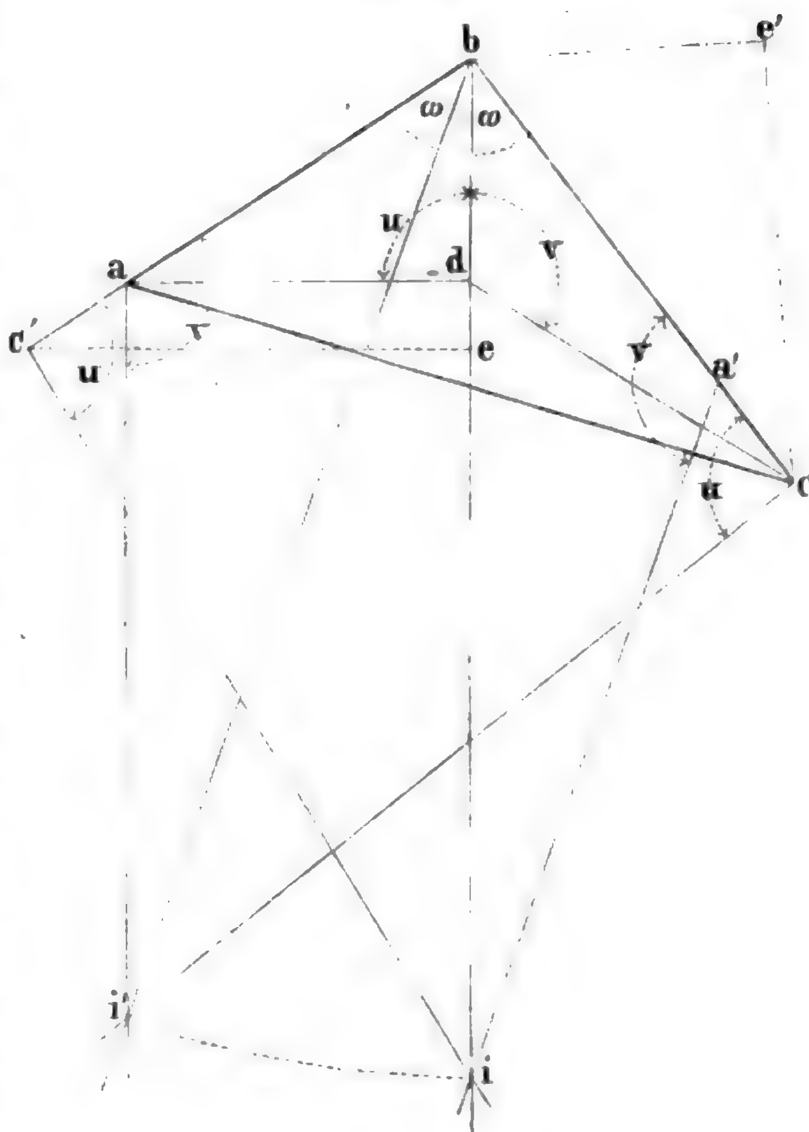
Fig. 92.



4) In Schumacher's astronomischen Nachrichten Bd. 3, S. 194 hat Bessel eine directe Lösung der Pothenot'schen Aufgabe mitgetheilt, welche theilweise mit dem Bohnenberger'schen Verfahren übereinstimmt und auf der nachfolgenden Betrachtung beruht. Gelten nämlich die bisherigen Bezeichnungen noch ferner und denkt man sich den Punkt d bereits gefunden, so werden u und v die Winkel sein, unter denen in D die Seiten AB und BC erscheinen. Macht man in der Fig. 93 die Linie bc' = bc und zieht c'e parallel zu ad, bis sie von der verlängerten bd geschnitten wird; legt man hierauf das Dreieck bec' so an bc, dass c' auf c und e nach e' kommt; und trägt man endlich den Winkel v in a an die Seite ab und u in c an die Seite bc, so entstehen zwei Vierecke bdce' und bai'c, welche einander ähnlich sind, weil sie gleiche Winkel haben und bd : be' = ba : bc ist. Zieht man in dem Vierecke bai'c die Diagonale bi', so ist der Winkel dbc = abi' = ω; man kann also durch die Diagonale bi', welche lediglich aus den Winkeln u und v hervorgeht, den Winkel ω bestimmen, der seinerseits, wenn er an bc getragen wird, die Richtung be angibt, in welcher der gesuchte Punkt d liegen muss und die zugleich zur Orientirung des Dreiecks abc dient; denn legt man die Kippregel an be an und dreht die Tischplatte bis das Fernrohr auf B einsteht, so sind die Seiten des Dreiecks abc den Seiten des Dreiecks ABC parallel, und zieht man dann noch die Visirlinien aA und cC, so ergibt sich der Punkt d, welcher einem Standpunkte D entspricht, der sich lothrecht unter ihm befindet. Will man sich die Mühe ersparen, den Winkel ω von ab nach bc überzutragen, so kann man dem Vierecke bai'c sofort die Lage bc'ia' geben, in welcher dessen Diagonale bi mit der Orientirungslinie bde zusammenfällt; man braucht

zu dem Ende nur b a' = b a, b c' i = u und b a' i = v zu machen. Es versteht sich von selbst, dass man die Winkel u und v unmittelbar bei ihrer Aufnahme an die Punkte c' und a' der Seiten c' b und a' b anträgt, indem man zuerst die Seite b a in die Richtung D A bringt und von c' nach B visirt, und hierauf b c in die Richtung D C dreht und von a' aus wieder auf B einstellt. Hinsichtlich der Genauigkeit der Bestimmung des Punkts d und der Orientirung des Messtisches gelten dieselben Bemerkungen, welche auf S. 156 über das Bohnenberger'sche Verfahren gemacht wurden.

Fig. 93



B. Indirecte Auflösungen der Pothenot'schen Aufgabe.

1) Die vorausgehenden Betrachtungen über die Lage des Standpunkts D, d, gegen die Dreieckspunkte A, a, B, b, C, c haben die nachstehend weiter entwickelten Sätze bereits vorbereitet; nämlich:

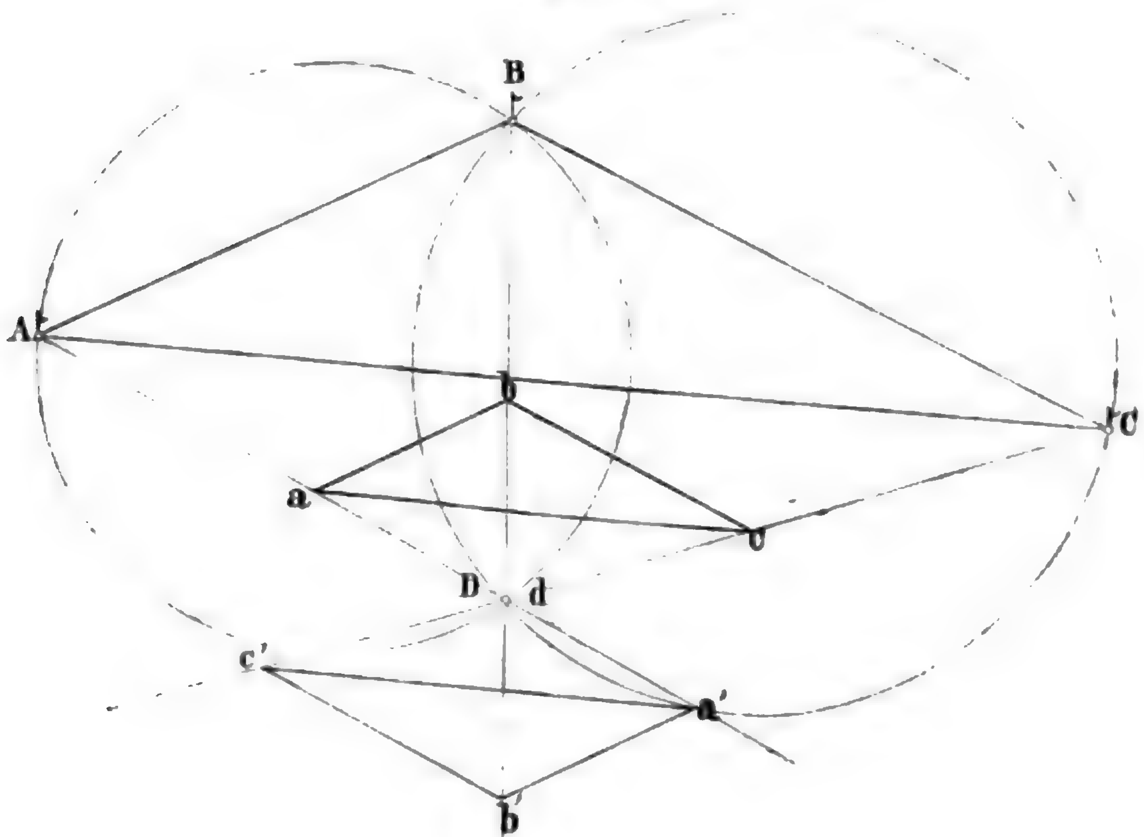
a) wenn der Messtisch für das Dreieck a b c orientirt oder so gerichtet ist, dass a b mit A B, a c mit A C und b c mit B C parallel läuft, so schneiden sich die rückwärts gezogenen Visirlinien A a, B b, C c in einem einzigen Punkte d; und

b) wenn der Messtisch nicht orientirt oder das Dreieck a b c gegen A B C so gestellt ist, dass die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke nicht parallel laufen, und wenn auch der Punkt D nicht auf dem Kreise A B C liegt: so schneiden sich die Visirlinien A a, B b, C c in drei Punkten und bilden hierdurch das „fehlerzeigende Dreieck."

Zu a. Legt man die nach Nr. 1 S. 153 construirte Figur a b c d auf die ihr ähnliche A B C D so, dass der Punkt d auf D, der Winkel a d b = u auf A D B und Winkel b d c = v auf B D C fällt: so ist offenbar a b parallel A B, a c parallel A C, b c parallel B C, weil der Construction gemäss Δ a b d $\backsim$ Δ A B D, Δ a c d $\backsim$ Δ A C D, Δ b d c $\backsim$ Δ B D C. Umgekehrt

werden sich also die Linien Aa, Bb, Cc in einem Punkte d schneiden, wenn der Parallelismus der gleichnamigen Dreieckseiten vorausgesetzt wird; und dieses ist auch dann noch der Fall, wenn das Dreieck abc die Lage a′b′c′ hat, also um 180° falsch orientirt ist. Aus dem gemeinsamen Schnitte der drei Linien Aa, Bb, Cc würde demnach noch nicht mit Sicherheit die richtige Lage des Dreiecks abc folgen, wenn die zweite um 180° fehlerhafte Stellung auf dem Felde nicht sofort zu erkennen und zu beseitigen wäre. Eine Unsicherheit kann somit nur in dem Falle eintreten, wo D auf dem Kreise ABC, also d auf dem Kreise abc liegt. Ob aber dieser Fall gegeben ist, erkennt man leicht aus der ersten Bestimmung von d: denn legt man durch a, b, c einen Kreis und er geht durch d, so liegt

Fig. 94.



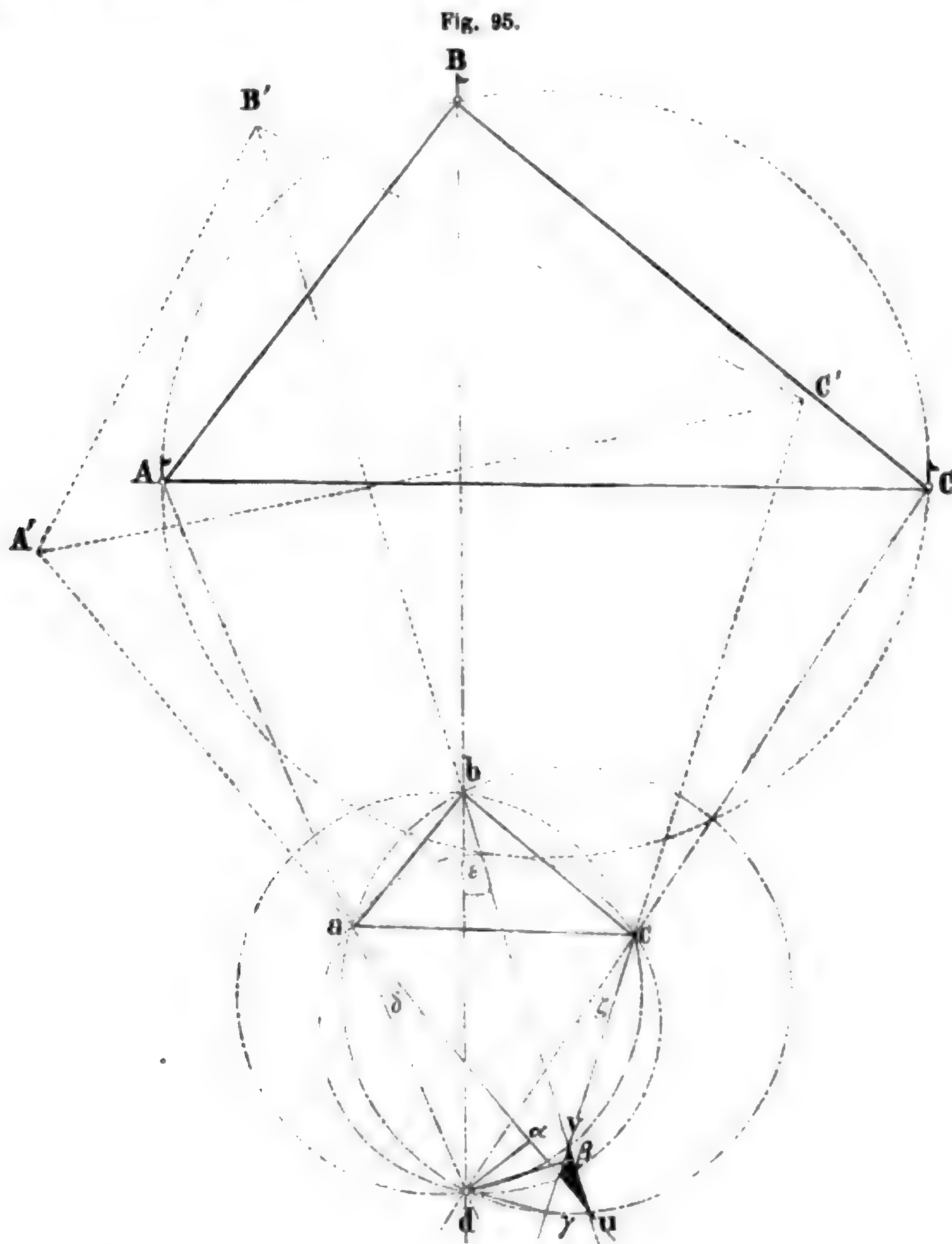
auch D auf dem Kreise ABC, und es ist unter diesen Umständen die indirecte Lösung der Aufgabe durch Rückwärtseinschneiden ebenso unmöglich als die directe. Selbst wenn d nur nahezu auf dem Kreise abc liegt, ist es gut, sich eine Controle über die Bestimmung von d dadurch zu verschaffen, dass man das Bild d′ eines anderen Standorts D′, welcher sicher vom Kreise ABC entfernt liegt, aufsucht und dessen Lage gegen d mit der von D′ gegen D vergleicht.

Zu b. Der zweite Satz ist eigentlich eine Folge des ersten; denn wenn sich die Visirlinien — den unbestimmbaren Fall, wo D auf dem Kreise ABC liegt, ausgenommen — nur dann in einem Punkte schneiden können, wenn die gleichnamigen Seiten der Dreiecke abc und ABC einander parallel laufen, so müssen sie sich in jedem anderen Falle in drei Punkten schneiden

und dadurch ein Dreieck bilden, welches die unrichtige Lage des Dreiecks a b c zu erkennen gibt.

Um das fehlerzeigende Dreieck nach den Regeln von Lehmann zur richtigen Aufstellung des Messtisches über einem gegebenen Standpunkte benützen zu können, ist es nöthig, sich vorher den nachfolgenden Satz angeeignet zu haben:

Fig. 95.



c) Die senkrechten Abstände des Standpunktbilds von den verlängerten Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks verhalten sich wie die Entfernungen des wirklichen Standpunkts von den drei Ecken des Felddreiecks.

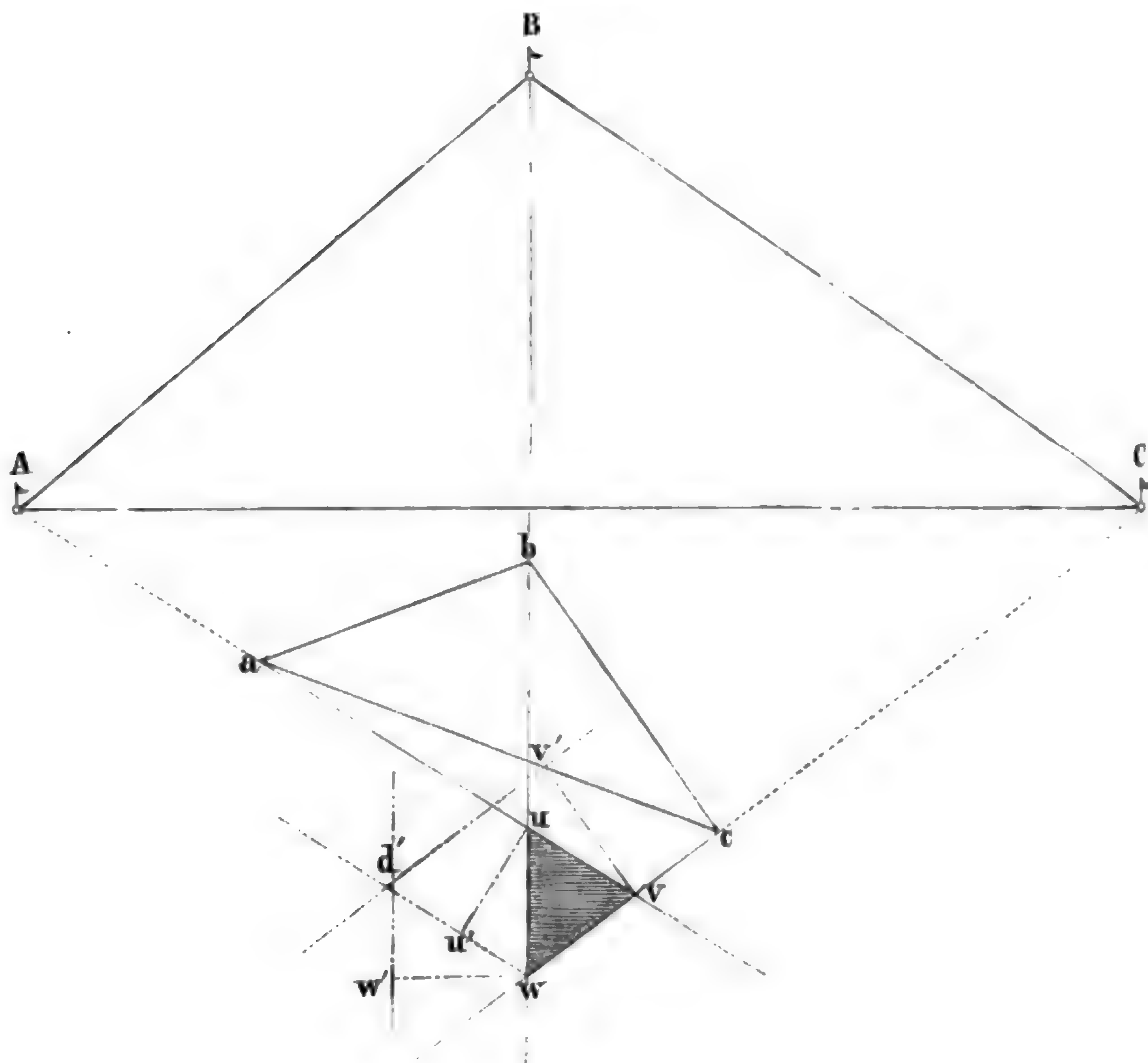
Mit Bezug auf Fig. 95 heisst dieser Satz:

Die von dem Punkte d auf die durch a, b, c gehenden Seiten des

fehlerzeigenden Dreiecks gefällten Senkrechten dα, dβ, dγ verhalten sich zu einander wie die Abstände DA, DB, DC.

Sind nämlich die drei Kreise adb, bdc, adc so über den Seiten ab, bc, ac des Dreiecks abc construirt, dass sie nach einander in den gegen d hin gelegenen Abschnitten die Peripheriewinkel u, v, u + v = w fassen: so ist klar, dass sich die durch a und b gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks auf dem Kreise adb, die zu b und c gehörigen Seiten auf dem Kreise bdc, und die durch a und c gelegten auf dem Kreise adc schnei-

Fig 96.



den und somit die Eckpunkte uvw des fehlerzeigenden Dreiecks auf diesen drei Kreisen liegen müssen. Auf dem Bogen du des Kreises adb stehen die Peripheriewinkel δ und ε: sie sind folglich einander gleich; ε steht aber auch mit ζ auf dem Bogen dv des Kreises bdc: folglich ist auch $\varepsilon = \zeta = \delta$. Nun ist

$$\sin \delta = \frac{d\alpha}{da}, \sin \varepsilon = \frac{d\beta}{db}, \sin \zeta = \frac{d\gamma}{dc},$$

folglich auch $d\alpha : d\beta : d\gamma = da : db : dc$, und da wegen der Aehnlichkeit

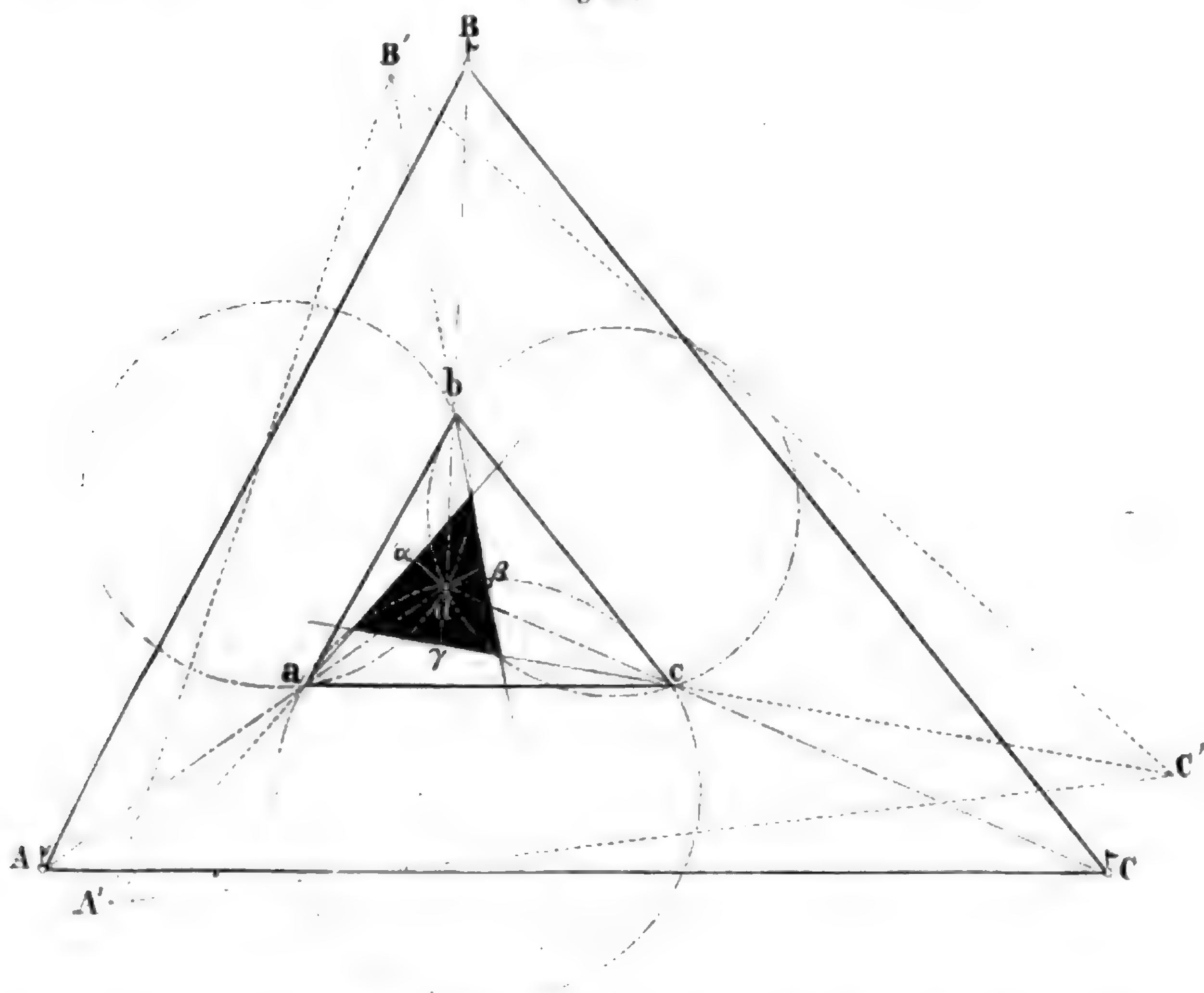
der Vierecke dabc und DABC die Proportion stattfindet: da : db : dc = DA : DB : DC, schliesslich:

$$d\alpha : d\beta : d\gamma = DA : DB : DC, \qquad (164)$$

was zu beweisen war.

Kennt man nun das Verhältniss der Abstände des Standpunkts D von den Eckpunkten des Dreiecks ABC durch Schätzung nach dem Augenmasse, so kann man auch die beiläufige Lage des Punkts d finden, indem man nach Fig. 96 auf den Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks Senkrechte errichtet, deren Längen uu', ww', vv' sich wie DA : DB : DC verhalten, und indem man weiter durch deren Köpfe u' v' w' Parallele zu den durch

Fig. 97.



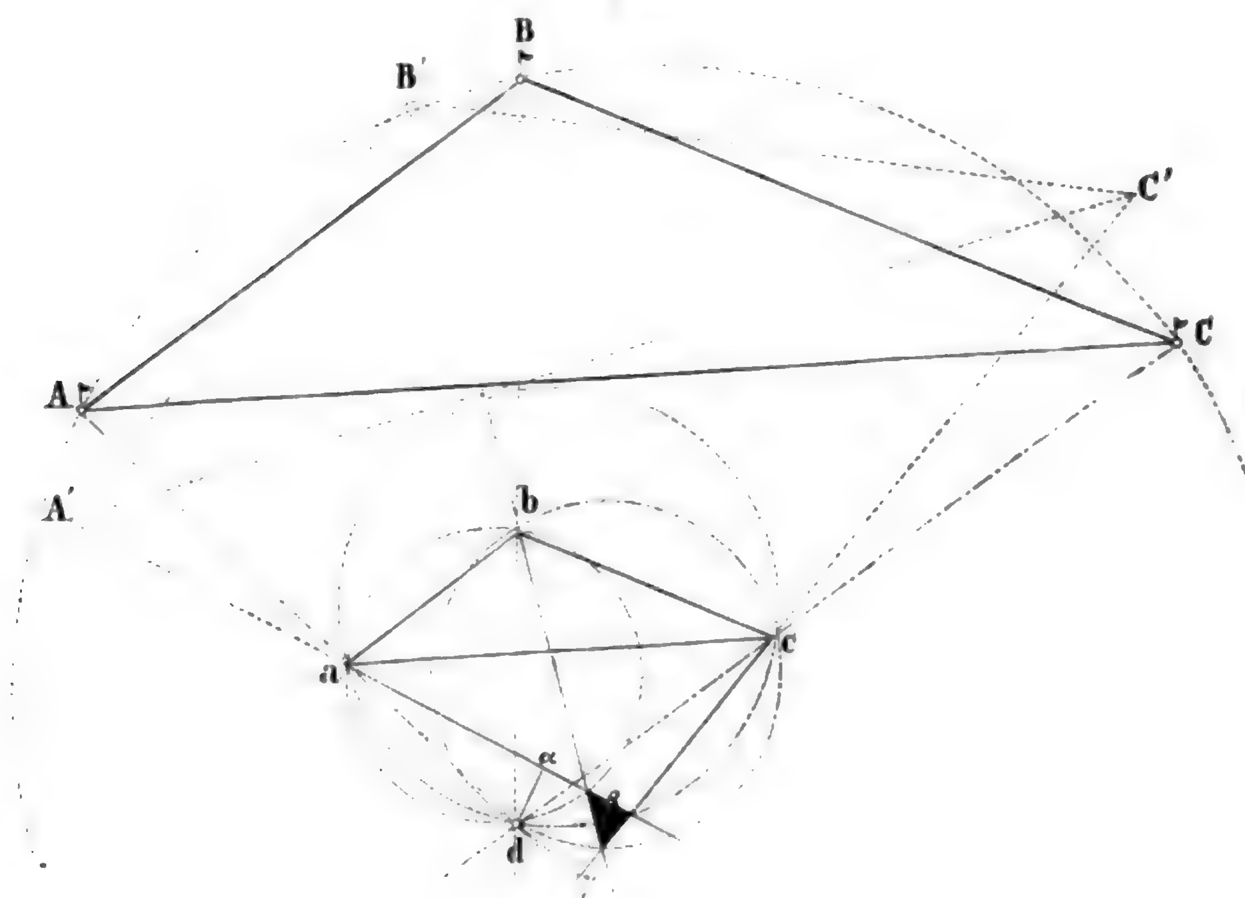
a, b, c gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks zieht, bis sie sich bei d' schneiden. Dieser Schnitt ist entweder ein Punkt, oder wie in der Figur, ein sehr kleines Dreieckchen, das man selbst als einen Punkt ansehen kann. Mit Hilfe dieses Punkts d' orientirt man den Messtisch auf's Neue, indem man die Kippregel an eine der Geraden d'a, d'b oder d'c anlegt und die Tischplatte horizontal so weit dreht, bis beziehungsweise A, B oder C vom Fadenkreuze des Fernrohrs gedeckt wird. Findet diese Deckung in Bezug auf den Punkt A statt, so lege man weiter noch die Kippregel an b und c und visire nach B und C: schneiden sich die rückwärts ver-

längerten Visirlinien wieder nicht in einem einzigen Punkte, so wird das zweite fehlerzeigende Dreieck, welches nun entsteht, viel kleiner als das vorige sein, und eine Wiederholung des eben beschriebenen Verfahrens wird den gesuchten Punkt d liefern.

Auf welcher Seite des fehlerzeigenden Dreiecks der Punkt d zu suchen ist, kann man beurtheilen, wenn man in Gedanken die Stelle aufsucht, in welcher sich die zu a b, b c, a c gehörigen Bestimmungskreise schneiden würden, wenn man sie zöge; Lehmann hat aber auch besondere Sätze aufgestellt, welche die Auffindung des Punkts d erleichtern. Der erste dieser Sätze heisst:

d) Je nachdem der Standpunkt ausser- oder innerhalb des gegebenen

Fig. 98.



Felddreiecks liegt, befindet sich auch das Bild des Standpunkts ausser- oder innerhalb des fehlerzeigenden Dreiecks.

Der zweite Satz erfordert, um sich kurz aussprechen zu lassen, vorher noch einige Erklärungen. Denkt man sich nämlich den Grundkreis A B C gezogen, so kann der Standpunkt D folgende Lagen haben:

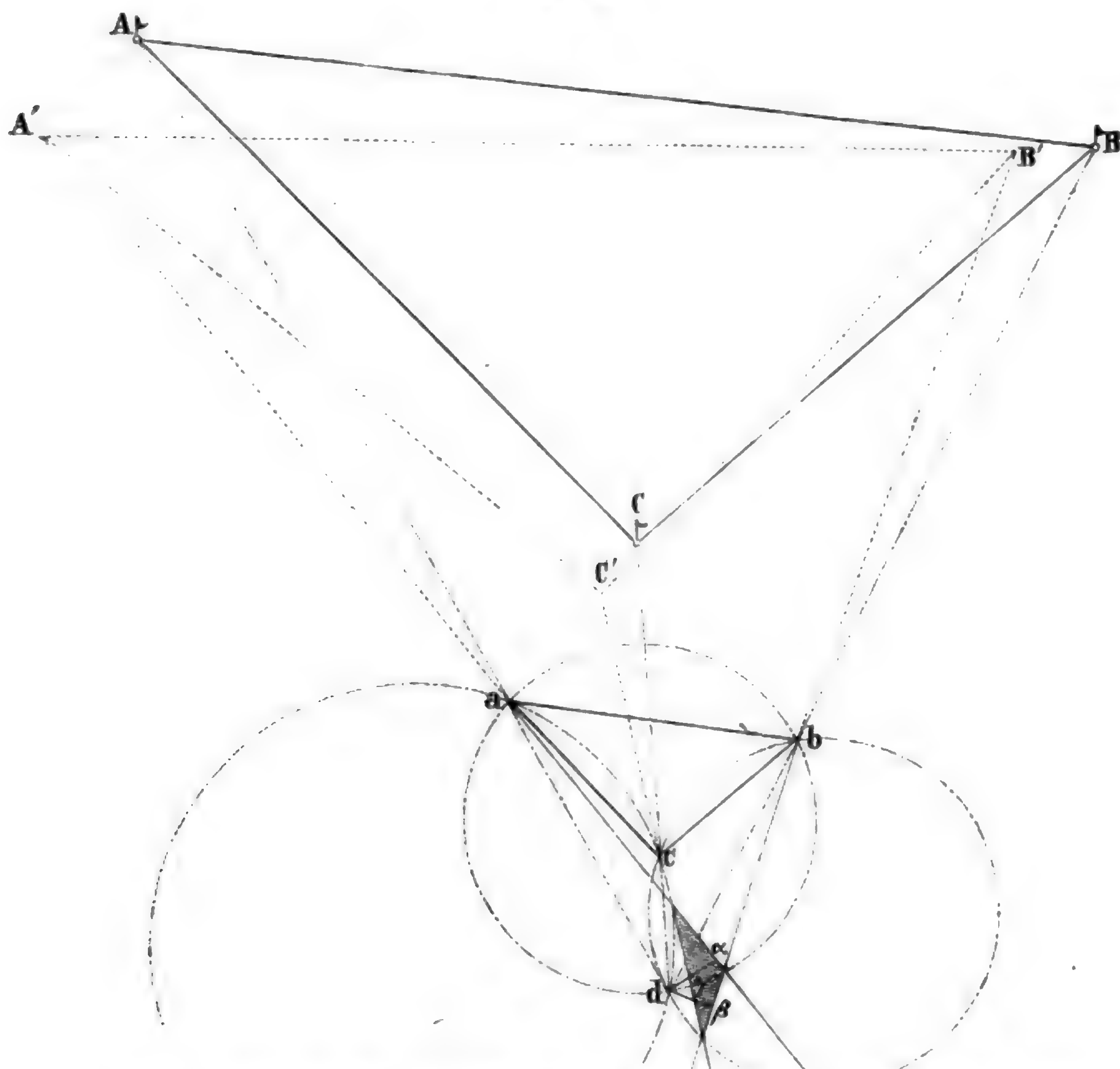
Nr. 1: innerhalb des Dreiecks A B C und des Grundkreises;
Nr. 2: ausserhalb A B C, aber innerhalb des Grundkreises;
Nr. 3: ausser dem Kreise in einem Scheitelwinkel von A B C;
Nr. 4: ausser dem Kreise, einer Dreieckseite gegenüber;
Nr. 5: auf einer Dreieckseite oder auf dem Grundkreise selbst.

Die mit Nr. 5 bezeichneten Lagen kommen jedoch hier nicht in

Betracht, weil die eine kein fehlerzeigendes Dreieck und die andere gar keine Lösung gibt.

Versteht man unter der mittleren Visirlinie diejenige verlängerte Seite des fehlerzeigenden Dreiecks, welche vom Standpunkte des Beobachters aus zwischen den äusseren Punkten des Bilddreiecks liegt, so kann man den zweiten Satz über die Lage des Standpunkts gegen das Fehlerdreieck so fassen:

Fig. 99.

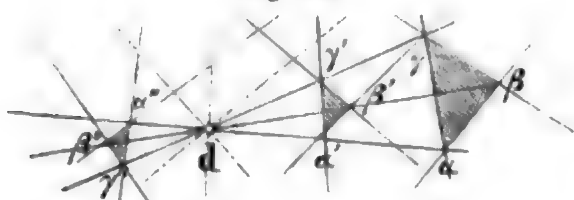


e) Das Bild des Standpunkts und das fehlerzeigende Dreieck werden durch die mittlere Visirlinie getrennt, wenn der wirkliche Standpunkt die Lagen Nr. 2 oder Nr. 3 hat; dagegen befinden sich Bild und Fehlerdreieck auf einer und derselben Seite der mittleren Visirlinie, wenn der Standpunkt wie in Nr. 4 liegt.

Wegen der untergeordneten Wichtigkeit der Sätze d und e übergehen wir ihre ziemlich umfangreichen Beweise, fügen aber zur Erläuterung der-

selben bei, dass in Fig. 97 der Standpunkt die Lage Nr. 1, in Fig. 98 die Lage Nr. 2, in Fig. 95 die Lage Nr. 4 und in Fig. 99 die Lage Nr. 3 hat, während in den drei ersten Figuren bβ und in Fig. 99 C' c die mittlere Visirlinie vorstellt.

Fig. 100.



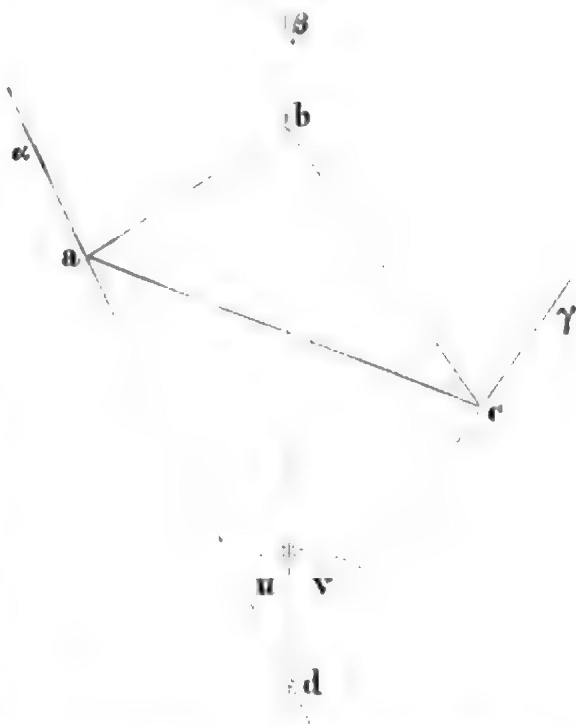
2) Ein von **Bohnenberger** herrührendes Verfahren, das Bild d aus zwei fehlerzeigenden Dreiecken zu finden, besteht darin, dass man, nachdem ein solches Dreieck ($\alpha\beta\gamma$, Fig. 100) vorhanden ist, den Tisch durch eine kleine Drehung etwas besser orientirt als vorher, und ein zweites Fehlerdreieck ($\alpha'\beta'\gamma'$) bestimmt, welches eine ähnliche Lage hat wie das erste und durch Verbindung der auf gleichen Be-

Fig. 101.

stimmungskreisen liegenden Punkte α, α', β, β', $\gamma\gamma'$ einen Schnittpunkt gibt, der den gesuchten Punkt so genau finden lässt, dass eine weitere Verbesserung desselben nicht mehr nöthig ist. Der Schnittpunkt wird nämlich

um so weniger von dem gesuchten Bildpunkte d abweichen, je näher die Hilfslinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ mit den Bestimmungskreisen des Standpunktbilds zusammenfallen, und dieses ist um so mehr der Fall, je kleiner die fehlerzeigenden Dreiecke sind. Sollte das zweite fehlerzeigende Dreieck die entgegengesetzte Lage ($\alpha''\beta''\gamma''$) des ersten ($\alpha\beta\gamma$) erhalten, so wäre dieses ein Zeichen, dass man bei der Verbesserung der Orientirung das Messtischblatt zu weit gedreht hat; gleichwohl können aber auch diese zwei Dreiecke zur annähernden Bestimmung von d führen, indem man α mit α'' und γ mit γ'' verbindet und die Linien $\alpha\alpha''$, $\gamma\gamma''$ so weit verlängert, bis sie sich in d schneiden.

3) Eine von Netto herrührende Lösung der Pothenot'schen Aufgabe hat grosse Aehnlichkeit mit der von Bohnenberger, insofern sie auch auf der Benützung zweier fehlerzeigenden Dreiecke beruht. Hat man nämlich aus zwei Orientirungen des Messtisches zwei solche Dreiecke erhalten, welche eine entgegengesetzte Lage haben, also auf zwei verschiedenen Seiten der mittleren Visirlinie liegen, wie in Fig. 101, so verbinde man die mittleren Eckpunkte γ, γ'' der Fehlerdreiecke und suche auf der Verbindungslinie $\gamma\gamma''$ den Punkt δ, welcher diese Linie nach dem Verhältniss $\gamma\varepsilon : \gamma''\varepsilon''$ in zwei Theile $\gamma\delta$ und $\gamma''\delta$ theilt; hierauf lege man die Kippregel an δ und b, orientire den Tisch nach B und ziehe die Visirlinien a A und c C, welche den auf der mittleren Visirlinie δb liegenden gesuchten Punkt d geben. Eine Visirlinie a A oder c C würde zwar auch hinreichen, d zu erhalten; man zieht aber der Controle wegen alle beide. Den Beweis für dieses Verfahren mag der Leser selbst führen.



4) Bei den Messungsübungen der Studirenden der Münchener polytechnischen Schule wird ausser den drei vorhergehenden Verfahren auch das folgende, welches sich durch seine Unmittelbarkeit empfiehlt, angewendet.

Man stellt nämlich den Messtisch über dem Punkte D horizontal auf, breitet über die Tischplatte ein hinreichend grosses Stück Bauspapier aus, misst und zeichnet darauf die Winkel u, v (Fig. 102), unter welchen man die Dreieckseiten A B, B C von d aus erblickt, zieht die Winkelschenkel dα, dβ, dγ so lang und so fein als möglich, und schiebt hierauf das Bauspapier so lange auf dem Messtischblatte hin und her, bis gleichzeitig die Winkelschenkel dα, dβ durch die Endpunkte a, b der Seite a b und die Schenkel dβ, dγ durch die Endpunkte b, c der Seite b c des Bilddreiecks a b c gehen: der Scheitel d der beiden Winkel u, v gibt

alsdann die Lage des Punkts d gegen a b c an und es ist folglich der erste Theil der Aufgabe gelöst. Will man weiter noch das Messtischblatt orientiren, so braucht man nur die Kippregel an eine der drei Seiten d a, d b, d c zu legen und beziehungsweise auf A, B, C durch Drehung des Messtischblatts einzustellen, womit auch diese zweite Forderung erfüllt ist. Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens fällt mit dem für das directe Verfahren Nr. 1 zusammen; die Einfachheit desselben leuchtet von selbst ein, und seine Genauigkeit lässt wenig zu wünschen übrig.

C. Mechanische Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe.

Das directe Verfahren die vorliegende Aufgabe zu lösen, welches unter Abth. A. Nr. 1 dieses Paragraphen beschrieben wurde, wenden die practischen Geometer in der Regel nicht an, weil sie auf dem Felde keine umständlichen Constructionen ausführen wollen und auch der Fall eintreten kann, dass der Mittelpunkt eines zu beschreibenden Kreises über das Messtischblatt hinausfällt, wodurch das Ziehen dieses Kreises unmöglich wird. Der Verfasser hat es versucht [1], dieser wohlbegründeten Abneigung zu begegnen, indem er einen einfachen Apparat erfand, welcher ohne jede Construction Kreise zu ziehen gestattet, die entweder durch drei gegebene Punkte gehen oder über einer gegebenen Sehne einen bestimmten Peripheriewinkel fassen.

1. Der Einschneidezirkel.

Die Erfindung dieses Apparats beruht auf der Umkehrung des geometrischen Satzes, dass in einem Kreise alle auf dem nämlichen Bogen stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind. Es wird demnach auch der Scheitel eines festen Winkels, dessen Schenkel an den Endpunkten einer Sehne hingleiten, einen Kreis beschreiben, und da, wenn drei Punkte gegeben sind, immer einer als Scheitel dieses Winkels angesehen werden kann, während die Verbindung der beiden anderen als Sehne erscheint, so folgt von selbst, dass die Lösung der Aufgabe: durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, leicht darauf zurückgeführt werden kann: über einer gegebenen Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher einen bestimmten Peripheriewinkel fasst.

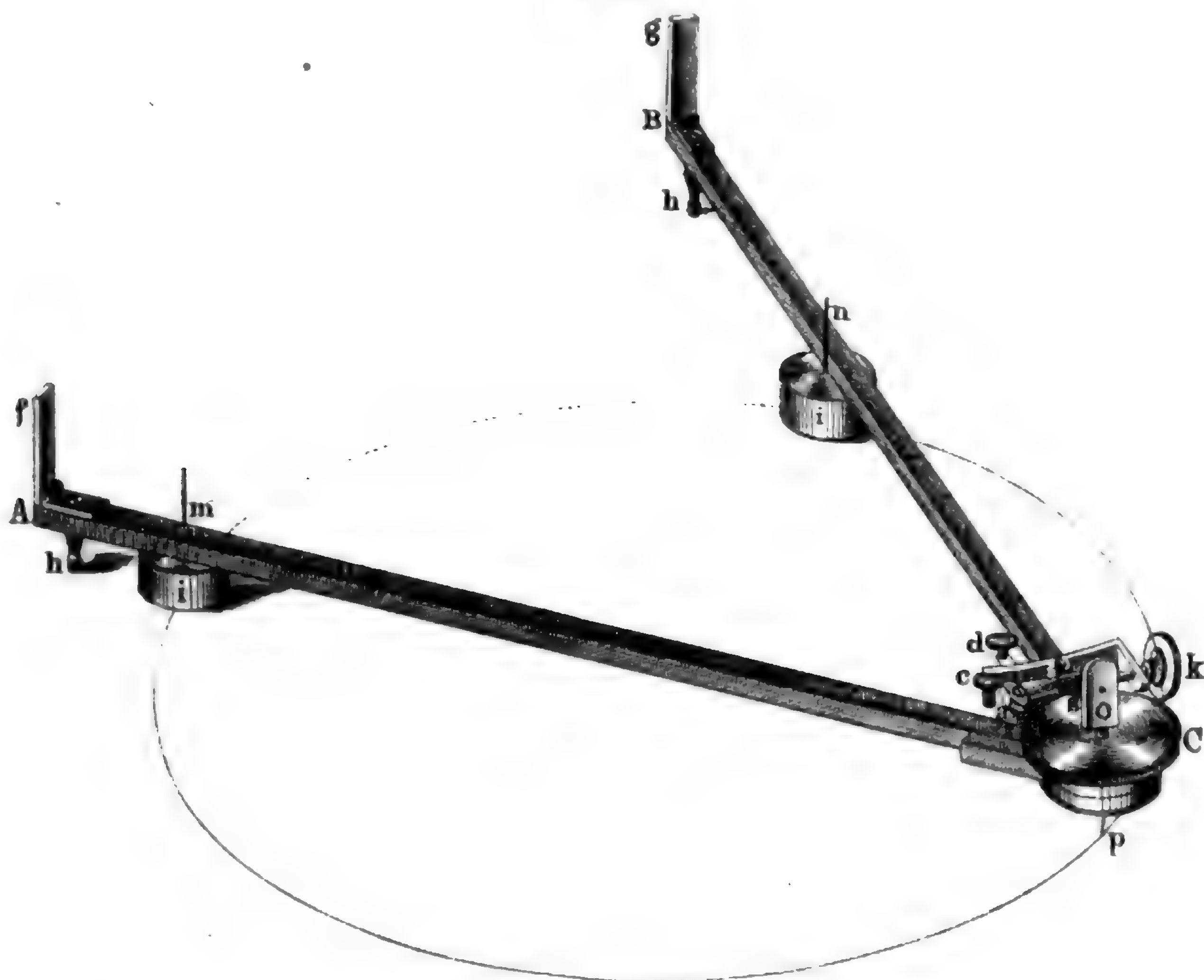
Aus dieser Idee der Erfindung ergibt sich, dass der in Rede stehende Apparat im Allgemeinen die Gestalt eines Zirkels haben muss, dessen Schenkel sich auf jeden Winkel einstellen lassen und der nicht, wie der gewöhnliche Zirkel, in verticaler Stellung, sondern in horizontaler Lage gebraucht wird. Und da dieser Zirkel zunächst für die Lösung der Pothenot'schen Aufgabe oder des „Rückwärtseinschneidens auf drei Punkte“

[1] Vergl. dessen Abhandlung: »Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben« in den Denkschriften der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1871, und in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik von demselben Jahre.

erfunden wurde und zur Lösung aller geodätischen Aufgaben dient, welche unter den Begriff des Einschneidens fallen, so kann man ihn füglich „Einschneidezirkel“ nennen, wie hier geschieht.

Dieser Zirkel ist nach dem für die geodätische Sammlung der Münchener Polytechnischen Schule aus Stahl hergestellten Exemplare in Fig. 103 perspectivisch abgebildet. Die beiden Schenkel A und B bewegen sich in dem Gewinde C wie die Schenkel eines gewöhnlichen Zirkels und können nach Auslösung der unendlichen Schraube s durch grobe Drehung in alle möglichen Lagen zwischen 0 und 250° gebracht werden. Ist durch diese

Fig. 103.



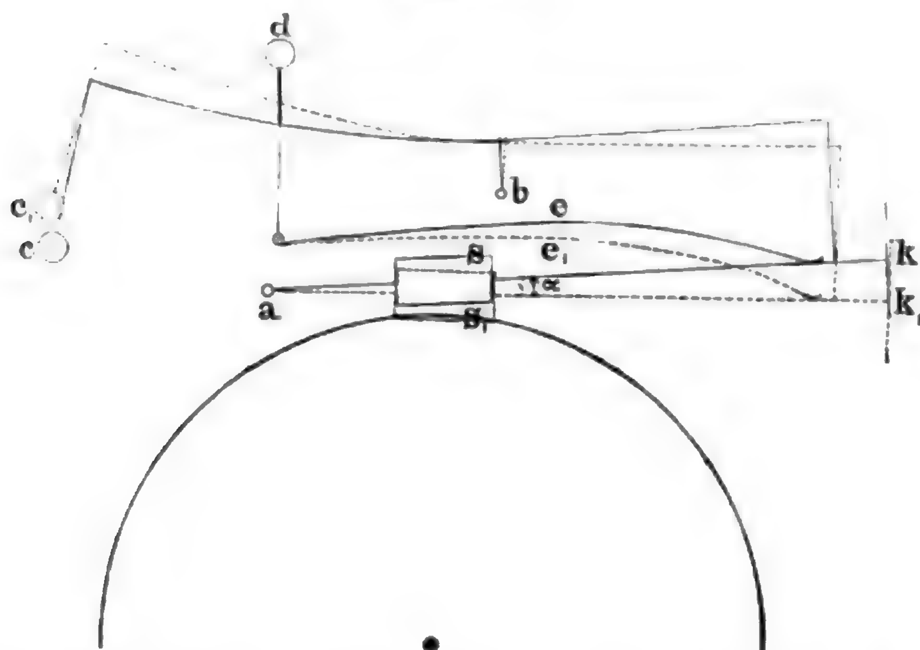
Drehung die erforderliche gegenseitige Neigung der Winkelschenkel nahezu erreicht, so kann man mit der nunmehr wieder eingreifenden Schraube s den Schenkel B gegen A fein bewegen und so den Zirkel auf einen gegebenen Winkel genau einstellen.

Die erwähnte Auslösungsvorrichtung ist sehr einfach. Auf der mit dem Schenkel B fest verbundenen Platte ae (Fig. 103) befinden sich nämlich zwei Drehpunkte: einer (a) für die Schraube, ein anderer (b) für den Hebel c, und ausserdem zwei Federn: eine (d) um den Hebel in der Auslösungsstellung mittels einer Nase zurückzuhalten und eine andere (e) zum Andrücken der Schraube gegen den mit einem entsprechenden Gewinde

versehenen Rand des Zirkelkopfes bei der Einlösungsstellung. Die Wirkungsweise dieser Vorrichtung wird noch anschaulicher durch die schematische Figur 104. In derselben stellen die ausgezogenen Linien die durch Anziehen des Hebels c gegen den Zirkelkopf bewirkte Auslösung und die punktirten Linien die durch Niederdrücken der Feder d hervorgerufene Einrückung der Schraube s vor: bei der Auslösung bewegt sich die Schraube um den Winkel k a k' = α vom Kopfrande weg, und bei der Einrückung kommt sie diesem Rande um gleichviel wieder näher, um in dessen Gewind einzugreifen.

Damit man auf dem Felde den Zirkel sofort auf einen durch Signale bezeichneten Winkel genau einstellen kann, befindet sich auf jedem Schenkel ein Diopter. Diese Absehen haben das Ocular o, welches entweder ein kleines Loch oder eine scharfe Kante ist, gemeinsam. Die Kante o, welche nur bei stark geneigtem Boden zum Visiren benützt wird, und ebenso der

Fig. 104.



Mittelpunkt des kreisrunden Oculars fallen selbstverständlich mit der Zirkelaxe zusammen, und das letztere Ocular muss jedesmal in die Richtung gedreht werden, nach der visirt werden soll; zuerst also in die Richtung des Schenkels A mit dem Diopterflügel f, und dann in die des Schenkels B mit dem Diopterflügel g. Die Visirebenen of und og schneiden sich beide in der Axe des unten in eine feine Spitze p ausgehenden Zirkelgewinds, und jede läuft in dem Abstande einer halben Nadeldicke der anliegenden inneren genau abgeschliffenen Seitenfläche eines der Schenkel A und B parallel. (Nach gemachtem Gebrauche werden die Diopterflügel auf diese Schenkel niedergeklappt.)

Eine für den Einschneidezirkel unentbehrliche Hilfsvorrichtung sind die Anschlagnadeln (m, n) welche in den Endpunkten der Sehne, worüber ein Kreis mit gegebenem Peripheriewinkel (m p n) zu beschreiben ist, senkrecht auf das Zeichnungsbrett gestellt werden müssen, damit an ihnen die Zirkel-

schenkel hingleiten und sich drehen können. Diese Nadeln (feinste englische Nähnadeln) stecken in kleinen senkrechten Messingcylindern (i, i) und ragen unten etwa 3, oben 10 Millimeter über deren Grundflächen hervor. Auf den oberen Grundflächen ruhen die Zirkelschenkel, wenn ein Kreis beschrieben wird. Aus der Bedingung, dass diese Schenkel sowohl bei diesem Geschäfte als bei der Winkelaufnahme der Zeichnungstafel parallel sein müssen, ergibt sich die Forderung gleicher Höhe der Cylinder i, der elfenbeinernen Füsse h und des den Kreis beschreibenden Stiftes p. [1]

(Behufs der im §. 124 beschriebenen systematischen Aufstellung des Messtisches über einem gegebenen Punkte und nach einer gegebenen Richtung sind die Zirkelschenkel von ihrer Drehaxe aus in halbe Centimeter eingetheilt; die Eintheilung hängt also mit dem vorliegenden Zwecke in keiner Weise zusammen).

Der Einschneidezirkel ist in ein Gehäus eingeschlossen, das dem eines gewöhnlichen Zirkels gleicht: für den hier beschriebenen Apparat ist es 26 cm lang, 5 cm breit und 3 cm dick; es lässt sich also leicht verpacken und transportiren. Die Kosten eines stählernen Einschneidezirkels mit Etui berechnet der früher am Münchener geodätischen Institute angestellte und nunmehr als Verificator nach Dinkelsbühl versetzte Mechaniker Heinrich Mayer mit 12 Thlr.

Die Prüfung des Einschneidezirkels hat sich über folgende Punkte zu erstrecken:

1) ob die inneren Wände der Winkelschenkel genau eben und senkrecht zu den oberen Wänden sind;
2) ob die durch die oberen Schenkelflächen gebildete Instrumentenebene der durch die Füsse und den Zeichenstift bestimmten Unterlagsebene parallel ist;
3) ob die Visirebenen zur Instrumentenebene senkrecht stehen und den anliegenden inneren Zirkelwänden parallel laufen;
4) ob das Ocular des Diopters in der Axe des Zirkelgewinds liegt;
5) ob die Anschlagnadeln auf ihren Cylindern senkrecht stehen und diese die richtige Höhe haben.

Was die erste dieser fünf Untersuchungen betrifft, so kann sie mit bekannten mechanischen Hilfsmitteln leicht ausgeführt werden; es wird sich aber kaum jemals ein erheblicher Fehler in dieser Beziehung ergeben, da

[1] Der Verfasser hat in neuester Zeit eine Abänderung in der Unterstützung der Winkelschenkel ausführen lassen, welche darin besteht, dass diese Schenkel auf den unteren Seiten durchweg mit Elfenbein belegt sind und die kleinen Messingcylinder i, i nur dazu benützt werden, die Anschlagnadeln m, n senkrecht auf das Messtischblatt zu stellen. Zu dem Ende steckt man die hinreichend weit gebohrten Cylinder über die genannten Nadeln, um diese in der vorgeschriebenen Richtung einschlagen zu können. Wer den Nadeln die senkrechte Stellung aus freier Hand zu geben vermag, bedarf der Cylinder i, i gar nicht. Diese Abänderung hat den Vorzug, dass die Stetigkeit in der Bewegung des Zirkels nicht unterbrochen wird, wenn die Füsse h, h über das Messtischblatt hinausgeschoben werden.

die Herstellung von parallelepipedischen Stäben zu den elementarsten und am meisten geübten Arbeiten des Mechanikers gehört.

Die zweite Untersuchung führt man in derselben Weise mit Hilfe von Dioptern auf einem Messtischblatte aus, wie die Prüfung des Spiegelsextanten in Bezug auf die Forderung, dass die Visirlinie des Fernrohrs der Sextantenebene parallel sein soll. Ein allenfallsiger Fehler würde sich durch Abschleifen der Stützen des untersuchten Instruments beseitigen lassen.

Die dritte Untersuchung zerfällt in zwei Theile, von denen der erste (ob die Visirebenen senkrecht zur Instrumentenebene stehen) von der gleichnamigen Prüfung eines Diopters sich nicht unterscheidet, während der zweite Theil (ob die Visirebenen den anliegenden inneren Schenkelflächen parallel laufen) sich in genügender Weise dadurch erledigen lässt, dass man die Schenkel des Zirkels, soweit es die Diopterflügel gestatten, aneinander legt und zusieht, ob erstens die inneren Schenkelflächen überall gleichweit (um die Nadeldicke) von einander abstehen, und ob zweitens die vereinigten Visirebenen der Diopter den Schlitz zwischen den Zirkelschenkeln halbiren. Ein durch diese Untersuchungen festgestellter Fehler wird an den Diopterflügeln verbessert.

Fig. 105.

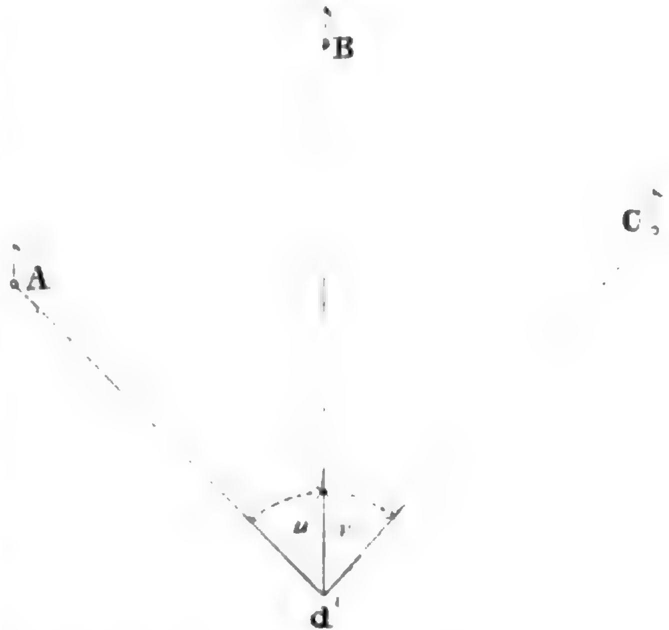
Ob viertens das Diopter-Ocular in der Axe des Zirkelgewinds liegt, d. h. ob keine Excentricität der Visirlinie stattfindet, kann man wie folgt untersuchen. Es sei F in Fig. 105 das Objectiv eines Diopters, O dessen Ocular, A die Axe des Zirkelgewinds und OFG die Visirlinie nach einem Gegenstande G. Die Spitze A werde in das Papier des Messtisches gedrückt. Dreht man das Ocular O in der Axe A um 180°, so kommt es zunächst nach O'; stellt man aber damit auf G ein, so muss es um den Winkel $O'FO = 2\delta$ gedreht werden, wodurch die Spitze A nach A' kommt. Wird dieser Punkt wieder markirt, so zeigt der Abstand AA' die doppelte Excentricität $e = AO$ an. Eine solche Excentricität lässt sich nur durch ein neues Ocular verbessern, ihr Einfluss aber sofort aus dem Dreiecke AOF berechnen, worin die eine Seite AO die Excentricität e des Oculars und die andere AF die Länge l des Diopters ist. Für $e = \frac{1}{4}^{mm}$ und $l = 25^{cm} = 250^{mm}$ wäre $\delta = 206'' = 3' 26''$; ein solcher grober Fehler wird aber wohl von keinem Mechaniker begangen werden.

Die fünfte Anforderung kann in der Praxis ebenfalls sehr leicht erfüllt werden; ob es geschehen wird theils nach Nr. 2, theils dadurch untersucht, dass man zusieht, ob die Nadel mit ihrem durch die obere Cylinder-Endfläche erzeugten Spiegelbilde in einer Geraden liegt oder nicht. Ein geneigtes Spiegelbild würde auf eine schiefe Stellung der Nadel deuten und deren erneute verbesserte Einsetzung in den Metallcylinder fordern.

2. Lösung der Aufgabe mit dem Einschneidezirkel.

Es sei der Messtisch, welcher das dem Dreiecke ABC (Fig. 106) ähnliche Bilddreieck abc enthält, über dem Punkte D horizontal aufgestellt und auf ihn dieser Punkt mit der Lothgabel nach d' projicirt. Auf diesen Punkt d' stelle man die Zirkelspitze p, öffne den Zirkel mittels der groben Drehung nahezu um den Winkel ADB und stelle mit der Schraube die Diopter genau auf A und B ein. Damit ist also der Winkel μ gemessen. Befestigt man nun in a und b die Anschlagnadeln, so kann man mit dem Zirkel, indem man die Schenkel sanft an a und b andrückt, den Kreis adb beschreiben. Misst man hierauf in gleicher Weise den Winkel $\nu = BDC$ und beschreibt über bc den Kreis bdc, so gibt der Schnitt dieses Kreises mit adb den gesuchten Punkt d und damit das Viereck abcd, welches dem ABCD ähnlich ist.

Fig. 106.



Will man nun auch den Messtisch in Bezug auf D centriren und nach ABC orientiren, so braucht man nur den eben gefundenen Punkt d in das Loth von D und rgend eine der Richtungen da, db, dc in die entsprechende Verticalebene DA, DB, DC zu bringen, was auf die weiter unten anzugebende Weise systematisch und leicht geschehen kann.

Wäre der Punkt D auf dem Felde nur annähernd gegeben und seine endgültige Festsetzung dem Geometer überlassen, so würde dieser nach der Bestimmung von d die Kippregel an da legen, den Messtisch drehen, bis da mit DA zusammenfällt, und schliesslich den Punkt d auf das Feld hinablothen und dort mit einem Pfahle bezeichnen.

Läge der Punkt D mit den drei anderen A, B, C ganz oder nahezu in einem Kreise, so würde dieses sofort durch die volle oder annähernde Deckung der Hilfskreise abd und bcd angezeigt werden, und es wäre hierdurch Veranlassung gegeben, die Bestimmung dieses Punkts aus A, B, C nicht weiter zu verfolgen oder wenigstens erst dann vorzunehmen, wenn ein anderer Punkt D' gefunden ist, der in Verbindung mit zweien der drei Punkte A, B, C die Lösung der Aufgabe in Bezug auf D zulässt.

Da Diopter überhaupt nicht weit zu sehen gestatten und für minder gute Augen diese Weite noch kleiner ist, so kann man die Sehwinkel μ und ν auch mit der Kippregel auf das Tischblatt zeichnen und von dieser Zeichnung aus mit dem Einschneidezirkel zur Beschreibung der Hilfskreise

abnehmen. Es gehört dazu nur, dass man die Axe p des Zirkels in den Scheitel d' des überzutragenden Winkels μ bringt und, nach vorausgegangener grober Drehung, den linken Schenkel mit Hilfe des elfenbeinernen Fusses h, der scharf nach der Innenfläche dieses Schenkels begrenzt ist, auf die Linie d'A stellt und den rechten Schenkel durch die Schraube k in die Richtung d'B so dreht, dass diese von dem Fusse h des Schenkels gedeckt wird.

Die Genauigkeit des Einschneidezirkels kann entweder in Hinsicht auf die Beschreibung von Kreisen allein oder in Bezug hierauf und die Aufnahme der Peripheriewinkel geprüft werden; in dem letzteren Falle setzt sich der Ausdruck für die Genauigkeit aus denen für Winkelmessung und Kreisbeschreibung zusammen. Der Verfasser hat über beide Fälle Beobachtungen angestellt, beziehungsweise anstellen lassen.

Mit welcher Genauigkeit man Kreise beschreiben kann, von welchen entweder eine Sehne und ein Peripheriewinkel oder drei Punkte (also auch wieder Sehne und Peripheriewinkel) gegeben sind, erfährt man am besten dadurch, dass man die mit dem Einschneidezirkel und auf gewöhnliche Weise beschriebenen Kreise miteinander vergleicht, wobei es gleich ist, ob man zu dem vom Einschneidezirkel gelieferten Bogen den Mittelpunkt sucht und von diesem aus den Weg des Einschneidezirkels mit dem gewöhnlichen Zirkel prüft, oder ob man mit letzterem im Voraus einen Kreis beschreibt, den Einschneidezirkel auf drei Punkte desselben einstellt und zusieht, ob oder wie weit der von der Axe des Einschneidezirkels beschriebene Bogen mit dem voraus gezogenen Kreise zusammenfällt. Nach längerer Uebung, namentlich im sanften Andrücken der Winkelschenkel an die Einsatznadeln, ist jeder in geometrischen oder graphischen Arbeiten nur einigermassen Geübte im Stande, mit dem Einschneidezirkel Kreise zu beschreiben, welche sich von den auf gewöhnliche Weise erzeugten nicht mehr unterscheiden, als zwei mit einem Stockzirkel aus Einem Mittelpunkte beschriebene Kreise, welche gleiche Halbmesser haben: der Einschneidezirkel gewährt somit als Kreisbeschreiber volle Befriedigung, und dasselbe ist mit seiner Gesammtleistung der Fall.

Die Zeitersparniss, welche das mechanische Verfahren dem geometrischen gegenüber gewährt, ist namentlich dann bedeutend, wenn lediglich die Bestimmung der Standpunkte in Betracht kommt, also auf die Orientirung des Messtisches verzichtet werden darf: in diesem Falle kann die Pothenot'sche Aufgabe in der halben Zeit, welche zur Ausführung des Lehmann'schen Verfahrens nothwendig ist, gelöst werden. Näheres hierüber, sowie über die Genauigkeit der mechanischen Lösung der Pothenot'schen und der nachfolgenden Hansen'schen Aufgabe findet man in des Verfassers oben S. 166 genannter Abhandlung über den Einschneidezirkel und dessen Gebrauch in der practischen Geometrie.

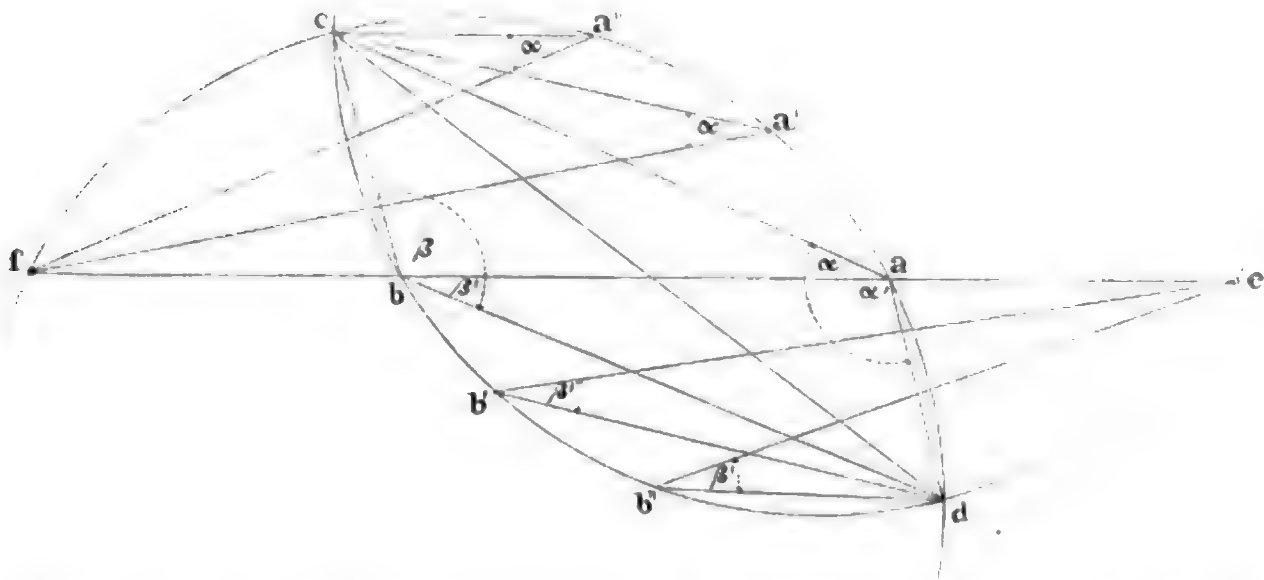
§. 77. Aufgabe. Mit Hilfe des Messtisches aus der bekannten Lage zweier unzugänglichen Punkte die Lage zweier anderen

auf dem Felde gegebenen Punkte durch blosse Winkelmessung auf diesen Punkten zu bestimmen.

Die vorliegende Aufgabe führt den Namen des Herrn Geheimraths Hansen in Gotha, weil sie dieser gelehrte Astronom und Geodät in Nr. 419, S. 165 der Astronomischen Nachrichten trigonometrisch aufgelöst und als neu bezeichnet hat. Diese Angabe beruhte aber auf einem Irrthume, da eine trigonometrische Lösung der in Rede stehenden Aufgabe schon von van Swinden in seinen Elementen der Geometrie (S. 321 der deutschen Uebersetzung von Jakobi) und von Gerling in Nr. 62, S. 233 der Astronomischen Nachrichten, eine practisch-geometrische Lösung aber bereits 1838 von Pross in seinem Lehrbuche der practischen Geometrie (S. 198) gegeben wurde. Wir behalten indessen den einmal angenommenen Namen bei, weil er bei dem Fachmanne sofort die Vorstellung erweckt, um welche es sich in dem vorliegenden Falle handelt, und weil es genügen dürfte, die Unrichtigkeit der Bezeichnung „Hansen'sche Aufgabe" nachgewiesen zu haben.

Hier haben wir es nicht mit der trigonometrischen, sondern lediglich mit der geometrischen und beziehungsweise mechanischen Lösung der Hansen'schen Aufgabe zu thun: wir werden also auf graphischem und mechanischem Wege die Lage zweier Standorte A, B (Fig. 107) des Mess-

Fig. 107.



tisches aus den daselbst gemessenen scheinbaren Grössen α, α', β, β' der Verbindungslinien dieser Orte mit zwei anderen gegebenen Punkten C, D bestimmen, oder was dasselbe ist: wir werden auf dem Messtische ein Viereck abcd aus einer Diagonale cd und den an der anderen Diagonale ab liegenden Winkeln α, α', β, β' so verzeichnen, dass es dem Vierecke ABCD in der Natur ähnlich ist. [1]

[1] Eine bei Messtischaufnahmen (in kleinem Massstabe) vortheilhaft anzuwendende rein geometrische Lösung der Hansen'schen Aufgabe haben wir bereits in §. 59, Seite 117 mitgetheilt.

Stellt man nämlich den Messtisch über dem Punkte A horizontal auf, projicirt diesen Punkt auf das Blatt und stellt den Einschneidezirkel auf den Winkel C A D $= \alpha + \alpha'$ ein, so kann man mit dieser Einstellung über der Sehne c d sofort den Kreis c a d f beschreiben. Nimmt man dann ferner den Winkel C A B $= \alpha$ in den Zirkel und legt den einen Schenkel desselben an c und seinen Scheitel in α' auf den eben beschriebenen Kreis, so schneidet der zweite Schenkel diesen Kreis in dem Punkte e. Wird hierauf der Messtisch nach B versetzt und horizontal aufgestellt, der Punkt B auf das Blatt projicirt und der Winkel C D B $= \beta + \beta'$ mit dem Einschneidezirkel aufgenommen, so lässt sich mit diesem über der Sehne c d der Kreis c b d e beschreiben.

Misst man endlich den Winkel A B D $= \beta'$ und legt ihn so auf den eben beschriebenen Kreis, dass der Scheitel irgend einen Punkt b' deckt und der Schenkel b' d an dem Endpunkte d anliegt, so schneidet der andere Schenkel des Zirkels (b' e) den Kreis c b d e in dem Punkte e. Verbindet man nun die Schnittpunkte e und f durch eine gerade Linie, so schneidet diese die zwei Kreise c a d f und c b d e in zwei Punkten a und b, welches die gesuchten Punkte sind.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ist sehr einfach. Die Lage des Punkts a ist offenbar durch die scheinbaren Grössen α, α' und $\alpha + \alpha'$, die des Punkts b durch β, β' und $\beta + \beta'$ bestimmt, also muss der Kreis c a d f ein geometrischer Ort von a und der Kreis c b d e ein geometrischer Ort von b sein. Dadurch, dass man c a' f $= \alpha$ und folglich d a' f $= \alpha'$ macht, bestimmt man einen Punkt f, der die Eigenschaft hat, durch seine Verbindung mit den Punkten a, a' . . . des Orts von a alle auf der Sehne c d stehenden Peripheriewinkel c a d = c a' d = . . . $= \alpha + \alpha'$ in ihre zwei Bestandtheile α und α' zu zerlegen: jede von f ausgehende Sehne des Kreises c a d f liefert folglich einen Punkt a, a' . . ., welcher mit c, f, d die Winkel α, α', $\alpha + \alpha'$ bildet. Ebenso hat der durch den Winkel d b' e $= \beta'$ bestimmte Punkt e des Kreises c b d e die Eigenschaft, durch seine Verbindung mit den Punkten b, b' . . . des Orts von b alle auf der Sehne c d stehenden Peripheriewinkel c b d, c b' d . . . $= \beta + \beta'$ in ihre zwei Bestandtheile β und β' zu zerlegen, so dass jede von e ausgehende Sehne des Kreises c b d e einen Punkt b, b' . . . liefert, welcher mit c, e, d die Winkel β, β', $\beta + \beta'$ bildet. Wenn nun die Sehnen f a', f a . . . in Bezug auf den Punkt a und die Sehnen e b', e b . . . in Bezug auf den Punkt b allen Bedingungen der Aufgabe genügen, so ist klar, dass nur die zwei Sehnen f a und e b, welche in eine Gerade f e zusammenfallen, den Bedingungen der Aufgabe in Bezug auf die beiden Punkte a und b genügen können. In der That liegen gleichzeitig nur an den Enden der Geraden a b einerseits die scheinbaren Grössen α, α' der Seiten B C, B D und andererseits die scheinbaren Grössen β, β' der Seiten A C, A D, während jene Enden selbst auf den Kreisen ruhen, welche durch die Gesichtswinkel $\alpha + \alpha'$ und $\beta + \beta'$ der Geraden C D bestimmt sind.

Wollte man die Kreise cad und cbd nicht ganz ausziehen, um die Punkte f und e als deren Schnitte mit den Geraden a′f und b′e zu erhalten, so dürfte man nur auf dem Kreise cad noch einmal den Winkel $\alpha = ca''f$ und auf dem Kreise cbd den Winkel $\beta' = db''e$ antragen und die Schnitte der Schenkel a′f, a″f, beziehungsweise b′e, b″e suchen, welche mit den Kreisschnitten f und e übereinstimmen müssen. Jedenfalls gewähren die eben genannten Winkelschenkel a″f und b″f eine Controle für die Genauigkeit der Arbeit, wenn diese nach der ersten Vorschrift ausgeführt wurde.

Sind die Punkte a und b auf dem Messtische gefunden, so versteht es sich von selbst, wie derselbe für diese Punkte zu centriren und nach den Richtungen ac, ad und beziehungsweise bc, bd zu orientiren ist; auch bedarf es wohl kaum der Erinnerung, dass meine Lösung der vorgelegenen Aufgabe eine rein geometrische Bedeutung hat, indem sie zeigt, wie auf einfachste Weise ein Viereck abcd zu construiren ist, von dem man eine Diagonale (cd) und die vier Winkel an der anderen Diagonale (α, α', β, β') kennt.

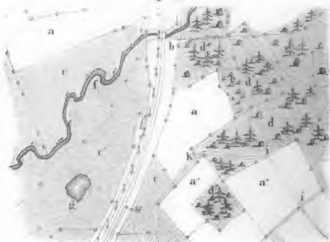
§. 78. Erklärungen und practische Bemerkungen, welche sich auf die Aufnahme eines Verbands von Grundstücken oder einer Flurmarkung beziehen.

Der Hauptgrundsatz, welcher bei der Aufnahme einer grösseren Bodenfläche zu befolgen ist, nämlich: vom Grossen in's Kleine zu arbeiten, wurde bereits in der Einleitung zu diesem Capitel ausgesprochen, und es ist darunter das Festlegen einer Reihe von Hauptpunkten, an die sich das Aufnehmen der Einzelnheiten des Terrains anschliesst, zu verstehen. Diese Einzelnheiten nennt man, wenn sie für sich begrenzt sind, Parzellen und unterscheidet sie nach ihrer staats-, land- oder forstwirthschaftlichen Benützung. So heissen dieselben Bau-, Weg-, Fluss-, Teich-, Feld-, Wiesen-, Hut-, Wald-Parzellen, wenn sie der Reihe nach ein Gebäude mit Hofraum, ein Stück Strasse oder Fluss, einen Teich, ein Feld, eine Wiese, eine Viehweide oder einen Wald umfassen. Besteht das Feld, die Wiese oder der Wald aus mehreren Theilen, welche für sich begrenzt sind oder verschiedenen Besitzern gehören, so bildet jeder Theil eine besondere Parzelle. Steinbrüche, Lehm-, Thon- und Sandgruben, Sümpfe, Torfmoore u. dgl. bilden ebenfalls besondere Parzellen. Die Raine, welche sich sehr häufig zwischen Feldern hinziehen, sind keine besonderen Parzellen, sondern werden zu den Feldern gerechnet, welchen sie angehören. Gehört ein Rain zweien Besitzern zugleich, so wird zu jedem Felde die Hälfte oder ein durch die Eigenthumsverhältnisse bestimmter Theil gerechnet. Fig. 108 stellt einen Verband von mehreren Parzellen vor: a, a sind Feldparzellen, b ist eine Bahnparzelle, c, c sind Wiesen-, d, d Waldparzellen, e ist eine zu d′ gehörige Hutparzelle, f eine Flussparzelle, g ist eine zu c′ gehörige Teichparzelle; die Waldparzelle d″ gehört zur Feldparzelle a′, die Wegparzelle i, i zum Felde a″ u. s. w.

Wenn es sich bei der Aufnahme einer Flurmarkung um Besitzverhältnisse

handelt, so müssen alle Parzellen genau dargestellt werden; will man aber bloss ein Bild der natürlichen und künstlichen Bildungen des Bodens, so kann man mehrere an einander stossende Felder als eine Parzelle behandeln, ebenso mehrere Wiesen- und Waldtheile als eine einzige Wiesen- und beziehungsweise Waldparzelle. Die Grenzen der aufzunehmenden Parzellen sind entweder durch Marksteine, Raine, Hecken, Zäune, Mauern, Einfriedigungen etc. gegeben, oder sie werden dem Geometer durch eine orts- und sachkundige Person vorgezeigt, von der er zugleich die Namen der Besitzer erfragen kann.

Fig. 108.

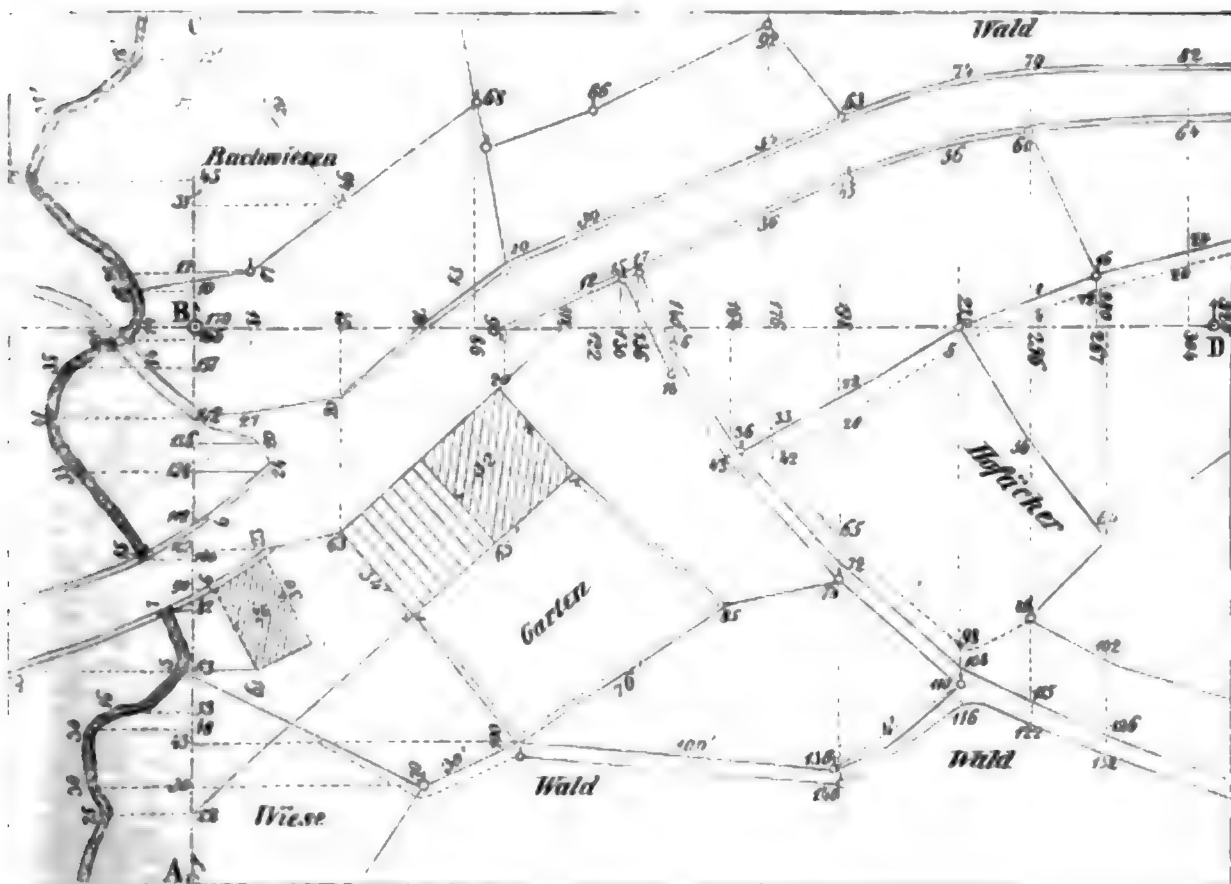


Von diesem Vorzeiger begleitet vollzieht der Geometer oder dessen Gehilfe die **Abpflockung** der einzelnen Parzellengrenzen, wobei die auf Seite 128 beschriebenen Markpflöcke zur Anwendung kommen. Diese Pflöcke sind in solchen Entfernungen in den Boden zu stecken, dass die geraden Verbindungslinien zwischen je zwei aufeinander folgenden genau genug mit den Parzellengrenzen zusammenfallen. Ein practischer Blick wird entscheiden, was in gegebenen Fällen unter „genau genug" zu verstehen ist: bei guten Gärten, Feldern und Wiesen bedeutet es offenbar etwas Anderes als bei Viehweiden, Torfmooren u. dgl. Gebäude werden in der Regel nur mit zwei Pflöcken an der Langseite bezeichnet, weil sich mit Hilfe der dadurch bestimmten Geraden der Grundriss dieser Parzellen leicht bestimmen lässt.

Während des Abpflockens der Parzellen fertigt der Geometer einen **Handriss** der ganzen Flurmarkung mit allen davon aufzunehmenden Parzellen an. Dieser Handriss wird so naturgetreu gemacht, als es das Augenmass zulässt, und man schreibt in denselben alle Pflocknummern, Culturgattungen, Eigenthümer etc. ein; Brücken, Stege, Wehre, Baumgruppen, Gebäude, Signale u. s. w. werden so bezeichnet, wie es bei Situations-

zeichnungen gebräuchlich und aus Fig. 109, welche ein Stück eines Handrisses vorstellt, theilweise zu ersehen ist. Ein solcher Riss erleichtert die Aufnahme ausserordentlich, wesshalb er niemals wegzulassen und in möglichst grossem Massstabe mit Sorgfalt anzufertigen ist. Derselbe liefert auch in Verbindung mit der bei seiner Aufnahme erworbenen Terrainkenntniss das besste Mittel zur Bestimmung des Polygons, an das sich die Detailmessung anzuschliessen hat und welches nebst den Bindelinien, die man allenfalls von einem Eckpunkte zu einem anderen legen will (z. B. AFC in Fig. 75, S. 135), in den Handriss eingezeichnet wird. Wie das Polygon selbst zu legen ist, hängt zum Theil von den anzuwendenden Aufnahmsmethoden, grösstentheils aber von der Beschaffenheit des Bodens ab: ob derselbe nämlich eine freie Aussicht gewährt oder nicht, fest oder sumpfig ist u. s. w.

Fig. 109.



Zur Aufnahme des Details eines Flurbezirks wird in Deutschland vorzugsweise der Messtisch angewendet; in manchen Ländern ist derselbe aber kaum bekannt, wie z. B. in England, wo alle geometrischen Aufnahmen ohne ihn gemacht werden. Es lässt sich nicht läugnen, dass der Messtisch, namentlich in Verbindung mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser, ein bequemes und rasches Arbeiten gestattet und für Alle, welche auch die geringste Rechnung scheuen, ein vortrefflicher Aufnahmsapparat ist. Dagegen muss der Detailmessung mit dem Theodolithen, wenn sie auch mehr Umsicht und Arbeit fordert, der Vorzug grösserer Genauigkeit zuerkannt werden. Da übrigens jede Methode ihre Licht- und Schattenseiten

hat und beide recht gut neben einander bestehen können, so lassen wir, ohne eine als die unbedingt bessere hinstellen zu wollen, lediglich noch einige Bemerkungen zu beiden folgen.

Ist für die Aufnahme des Details eine hinreichende Anzahl von Abscissenaxen bestimmt, so werden auf denselben die Ordinaten abgesteckt und beide gemessen. Die Ergebnisse dieser Messungen schreibt man entweder in den Handriss, wie Fig. 109 zeigt, oder, wenn dieser zu klein sein sollte, in eine ihm ähnliche grössere Zeichnung, oder endlich in eine Tabelle von nachstehender Form ein. Diese Tabelle bezieht sich auf den eben erwähnten Handriss und es ist dazu nur zu bemerken, dass sich die linke und rechte Seite der Abscissenlinie durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben A und B, womit sie bezeichnet ist, bestimmen. Denkt man sich nämlich so gestellt, dass man vom Punkte A nach B sieht, so ist die Seite der Abscissenlinie, welche zur Rechten des Beobachters liegt, die rechte und die entgegengesetzte die linke. In die Rubrik „Bemerkungen" stellt man kurze Andeutungen über die Beschaffenheit und die Verbindung der eingemessenen Punkte ein.

Abscissenlinie A B.

Abscissen	Ordinaten		Bemerkungen.	
	links.	rechts.		
22′	25′	—	Bach.	—
30	30	70	Bach.	Markstein.
43	—	100	—	Ecke des Gartens.
48	30	—	Bach.	—
53	16	—	Bach.	—
63	5 53	19	Bach. Strasse.	Gebäude.
82	7	—	Ob. Brückenkopf.	—
90	—	6	—	Gebäude.
100	15	—	Unt. Brückenkopf.	—
102	—	23	—	Strasse.
112	—	6	—	Strasse.
128	33	24	Bach.	Strasse.
136	—	20	—	Strasse.
142	41	—	Bach.	—
151	14 18	—	Feldweg.	—
	35	—	Bach.	—
166	20	—	Steg.	—
170	14	—	Bach.	—

Parzellen, deren Grenzen krumm und nahezu parallel sind, wie die in Fig. 110 zwischen den Linien mn und pq liegenden, werden entweder

durch Vorwärtsabschneiden, oder mit dem Distanzmesser, oder dadurch aufgenommen, dass man die äusseren Grenzen (14 bis 20 und 26 bis 32) durch gegebene oder eigens hergestellte Abscissenlinien (mn und pq) mittels Ordinaten bestimmt, die dazwischen liegenden Grenzen aber durch gerade Querlinien oder Traversen

$$\left(\frac{15}{31}, \frac{16}{30}, \frac{17}{29} \text{ etc.}\right),$$ [1]

welche die vorher bestimmten Punkte der äusseren Grenzen verbinden, schneidet und die Schnittpunkte von den Endpunkten der Querlinien aus einmisst. Diese Querlinien sollen die Feldfurchen so viel als möglich senkrecht schneiden.

Fig. 110.

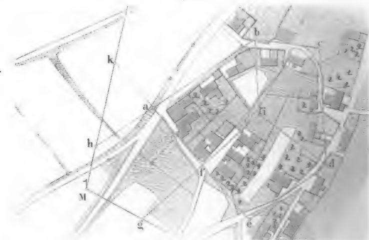
Bei der Aufnahme mit dem Messtische gibt man dem Gehilfen, welcher eine Latte oder Fahne auf den anzuvisirenden Punkten aufzustellen und zu halten hat, ein Verzeichniss mit, aus dem er sieht, in welcher Reihenfolge die Punkte anvisirt werden sollen. Damit sich der Geometer überzeugt, dass der Gehilfe keinen Punkt übersehen hat, muss dieser bei jedem fünften oder zehnten Pflocke ein bestimmtes Zeichen geben, welches der Messende erwiedert, wenn es mit seinen Aufschreibungen übereinstimmt; ausserdem ist sofort nachzusehen, wo gefehlt wurde, und der Fehler zu verbessern. Auch von dem richtigen Stande des Messtisches muss sich der

[1] Diese Bezeichnungen bedeuten: vom Punkte 31 nach 15, von 30 nach 16, von 29 nach 17 u. s. w. Sie setzen also auch die Richtung der Linien fest.

Geometer von Zeit zu Zeit Gewissheit verschaffen, was dadurch geschieht, dass er die Linealkante der Kippregel an die Orientirungslinie legt und zusieht, ob das betreffende Signal von dem Fadenkreuze gedeckt wird. Sollte sich eine Abweichung ergeben, so ist nicht nur der Tisch zu berichtigen, sondern auch jeder Pfahl nochmals anzuvisiren, welcher seit der letzten Versicherung aufgenommen wurde.

Ist die Uebersicht eines Flurtheils durch Häuser oder Bäume sehr erschwert, so geht man vor Allem darauf aus, diesen Theil mit einem kleineren Vielecke zu umziehen, das mit dem Hauptpolygon fest verknüpft ist, und benützt die Seiten dieses kleineren Vielecks als Abscissenlinien bei der weiteren Aufnahme der Coordinaten. In Fig. 111 stellt a b c d e f ein solches Hilfspolygon vor, welches mit dem bei M vorüberziehenden Hauptpolygon in Verbindung steht. Gestattet das Terrain, einen Punkt i im Innern des

Fig. 111.

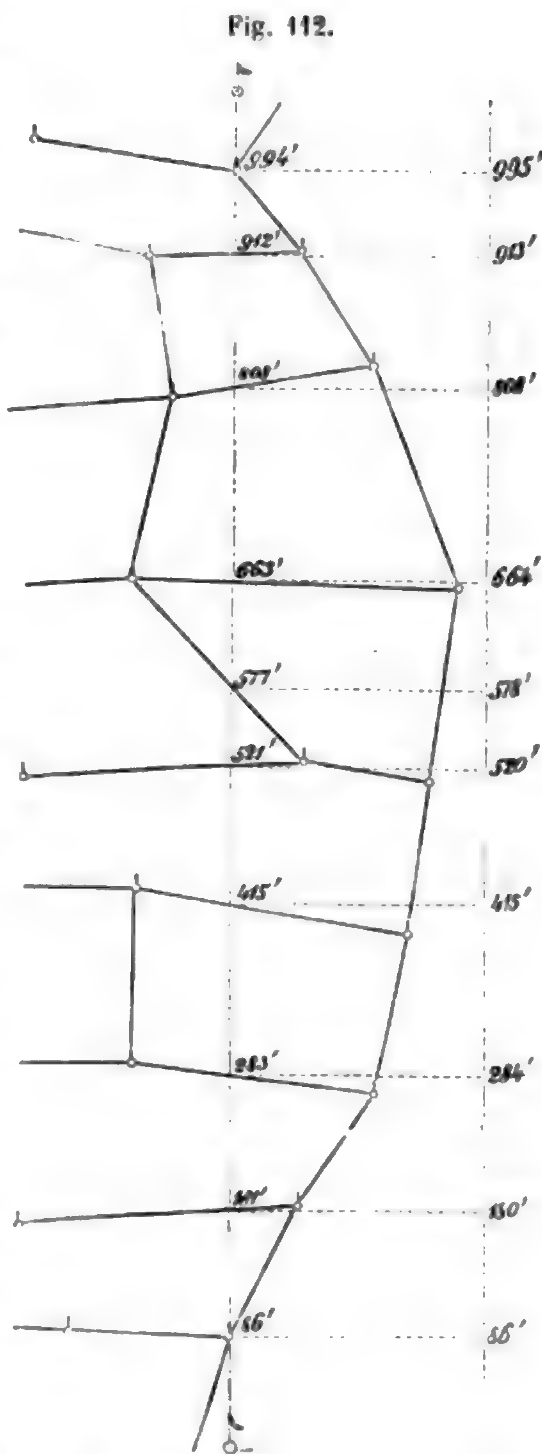


Vielecks zwei- oder dreimal anzuschneiden, so wird man dieses nicht unterlassen, um daselbst einen neuen gut bestimmten Standpunkt für den Messtisch oder Theodolithen zu gewinnen. Besitzt man einen Distanzmesser, so lassen sich von i aus eine grosse Anzahl Punkte mit geringer Mühe erhalten.

Der Geometer muss während der Aufnahme eines Flurbezirks stets darauf bedacht sein, sich eine Controle seiner Arbeit zu verschaffen, und nach dem Schlusse derselben hat er noch eine besondere Prüfung (Revision) der graphisch dargestellten Messungsergebnisse auf dem Felde vorzunehmen. Hierbei kann er entweder Probemessungen oder Probeschnitte, oder beide Prüfungsmethoden zugleich anwenden. Wählt er nämlich aus dem gezeichneten Plane zwei beliebige Punkte aus und misst deren Entfernung im Bilde und auf dem Felde, so bedient er sich der Probemessung: bringt

er aber einen Punkt des Messtisches über einen gleichnamigen Punkt des Felds und visirt er, nach gehöriger Orientirung des Blatts, beliebige Punkte an, um zu sehen, ob sie mit ihren Bildern in einerlei Visirebenen liegen, so wendet er den Probeschnitt an. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass diese letztere Prüfungsmethode ebenso wie erstere auch für die Aufnahme mit dem Theodolithen ihre Anwendung findet, und dass in diesem Falle die Horizontalwinkel von einer bestimmten, im Plane und auf dem Felde festgelegten geraden Linie aus gezählt werden müssen. Mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser kann man den Probeschnitt und die Probemessung gleichzeitig ausführen, wesshalb er zur Revision der Aufnahme besonders geeignet ist.

Fig. 112.



Probemessungen macht man selbstverständlich nicht bloss zwischen je zwei, sondern sogleich zwischen mehreren Punkten, welche einer viele Grenzen durchschneidenden Diagonale angehören. Diese Diagonale wird auf dem Felde abgesteckt und auf dem Plane ausgezogen: hier misst man die Abscissen der Durchschnittspunkte mit dem verjüngten Massstabe, dort aber mit der Kette oder dem Distanzmesser und schreibt die Ergebnisse an der Revisionslinie nebeneinander, wie Fig. 112 zeigt. Von den Differenzen beider Messungen hängt es ab, ob die Aufnahme als gut anzuerkennen, oder als ungenügend zu verwerfen, oder theilweise zu verbessern ist.

2. Der Flächeninhalt einzelner und verbundener Grundstücke.

Methoden der Flächenbestimmung.

§. 79. **Kettenmass.** Der Flächeninhalt eines Grundstücks oder eines Verbands von Parzellen kann entweder aus den auf dem Felde gemessenen Stücken, oder aus den auf dem Plane abgegriffenen Dimensionen, oder endlich auf mechanischem Wege durch ein Planimeter (Flächenmessinstrument) bestimmt werden.

Die Bestimmung des Flächeninhalts aus dem Kettenmasse besteht darin, dass man das auszumessende und im Allgemeinen als Vieleck sich darstellende Grundstück in Dreiecke zerlegt und in jedem derselben Grundlinie und Höhe misst, wobei der Fusspunkt der letzteren durch das Prismenkreuz oder den Winkelspiegel bestimmt wird (Fig. 113).

Ist das Grundstück von vielen kleinen Seiten oder krummen Linien begrenzt, so legt man in oder um dasselbe ein Vieleck, misst und berechnet zuerst dieses, und fügt alsdann die aus Abscissen und Ordinaten bestimmten Flächeninhalte der an dem Vielecke liegenden Abschnitte der Figur als positive oder negative Grössen hinzu (Fig. 114).

Fig. 113.

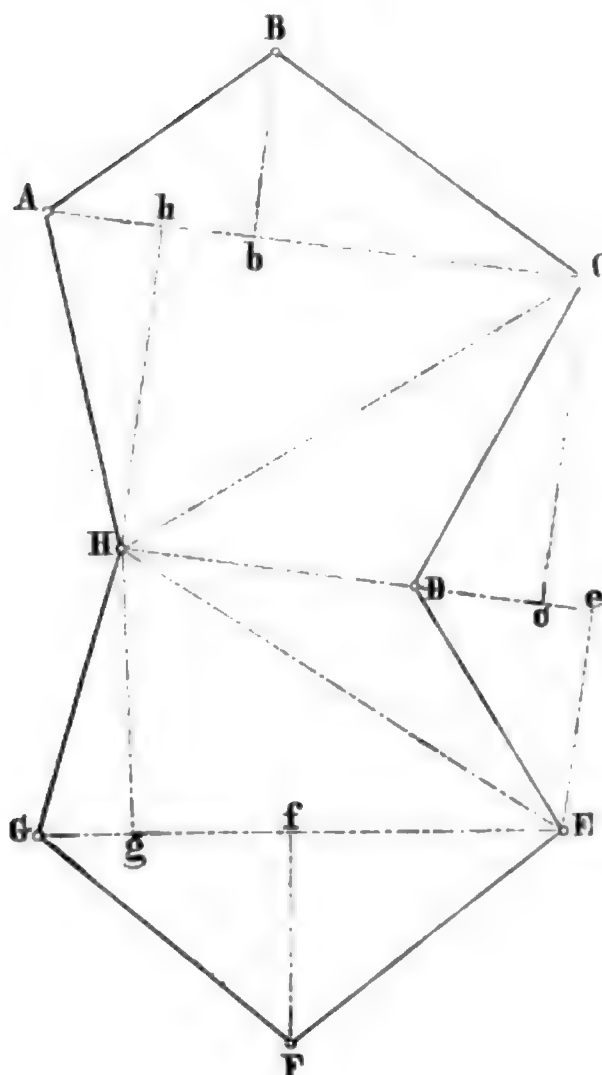
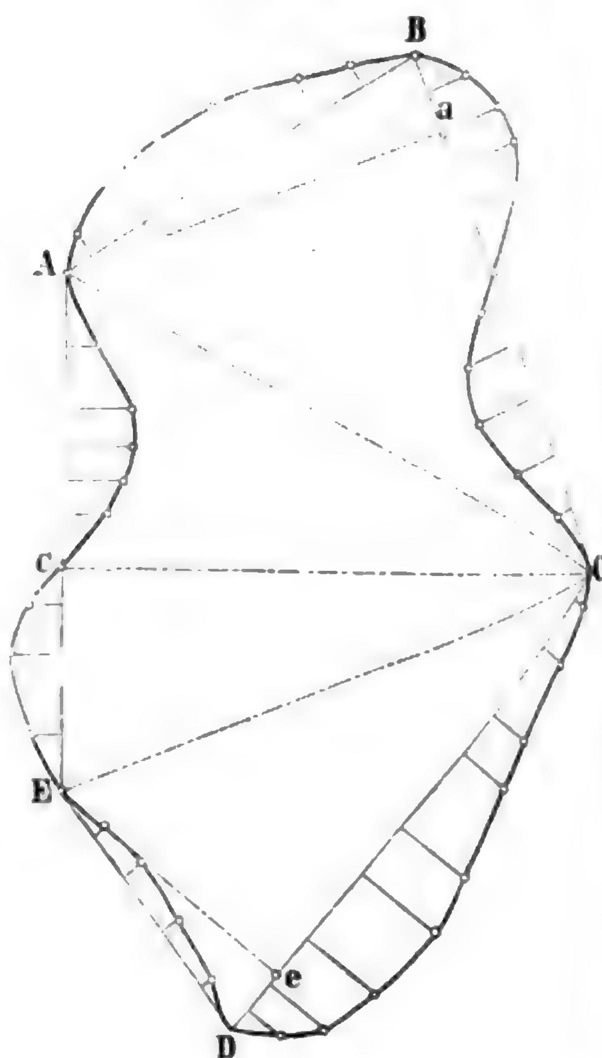


Fig. 114.



Man sieht diese Flächenbestimmungen als hinreichend genau an, wenn sie mit einer zweiten nach einer anderen Zerlegung vorgenommenen Messung und Berechnung bis auf $^1/_{200}$ oder $^1/_{300}$ des gefundenen Inhalts übereinstimmen. Hat man viele zusammenhängende Parzellen zu messen, so ist eine Controle der Messung dadurch gegeben, dass man den ganzen Verband durch ein Vieleck einschliesst, den Gesammtinhalt wie vorhin mit Bezug auf Fig. 113 bestimmt, und schliesslich diesen Inhalt mit der Summe aller

Flächengehalte der Parzellen vergleicht: beträgt die Abweichung dieser Summen nur $\pm$ 1/2 oder $\pm$ 1/3 Prozent der einen oder anderen, so kann man mit dem Ergebnisse vollständig zufrieden sein.

§. 80. **Zirkel und Massstab.** Sind Flächeninhalte aus Zeichnungen durch Zirkel, Massstab und Rechnung zu bestimmen, so ahmt man gewöhnlich das auf dem Felde anzuwendende Verfahren nach, indem man die zu berechnenden Figuren in Dreiecke oder in ein Vieleck und kleine Segmente zerlegt und diese aus den der Zeichnung entnommenen Dimensionen berechnet; krummlinige Figuren zerlegt man indessen zweckmässiger in parallele Streifen von gleicher Breite, weil sich diese als Paralleltrapeze betrachten und schnell berechnen lassen. Denn sind $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ die Längen der $n + 1$ parallelen Seiten, welche n Streifen von der Breite b bilden, so sind die Flächeninhalte der einzelnen Trapeze:

$$\tfrac{1}{2} b (a_0 + a_1), \ \tfrac{1}{2} b (a_1 + a_2), \ \tfrac{1}{2} b (a_2 + a_3) \ldots \tfrac{1}{2} b (a_{n-1} + a_n)$$

und folglich wird ihre Summe oder der Flächeninhalt der ganzen Figur

$$F = b \left(\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1} + \tfrac{1}{2} a_n\right). \qquad (165)$$

Da in den meisten Fällen a_0 und a_n null sein werden, so besteht der zweite Factor des die Fläche darstellenden Products bloss aus der Summe der Ordinaten, welche die Figur theilen. Dieser zweite zu b gehörige Factor lässt sich, auch wenn a_0 und a_n nicht null sind, leicht mit Zirkel und Massstab bestimmen. Denn setzt man $\tfrac{1}{2} a_0$ mit dem Zirkel an das untere Ende von a_1 an und öffnet jenen bis zum oberen Ende, so ist die Oeffnung $= \tfrac{1}{2} a_0 + a_1$; setzt man ferner diese Länge an die Ordinate a_2 ($=$ b2) an und öffnet den Zirkel bis zum anderen Endpunkte dieser Ordinate, so erhält man $\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2$; in gleicher Weise wird $\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ erhalten; und so kann man fortfahren, bis die Zirkelöffnung $= \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 \ldots + \tfrac{1}{2} a_n$ ist, worauf sie auf dem Massstabe gemessen und die gefundene Länge mit der Breite b multiplicirt wird.

Flächeninhalte, welche mit Zirkel und Massstab bestimmt werden, sieht man als hinreichend genau gefunden an, wenn die Summe aller Theile von dem unmittelbar gemessenen ganzen Inhalte bei Plänen von 1 : 5000 nicht mehr als 1/100 und bei 1 : 2500 nicht mehr als 1/200 abweichen.

§. 81. **Planimeter.** Am schnellsten und sichersten werden gezeichnete Figuren mit den in neuerer Zeit in Aufnahme gekommenen Planimetern gemessen, und zwar mit derjenigen Classe derselben, welche den Flächeninhalt einer ebenen Figur durch blosses Umfahren des Umfangs angibt. Diese merkwürdigen und bereits sehr vervollkommneten Instrumente können hier um so weniger mit Stillschweigen umgangen werden, als zu erwarten steht, dass sie in nicht ferner Zeit auf allen technischen Bureaux, wo viele Flächen zu berechnen sind, eingeführt sein werden.

Das Princip, worauf die allein brauchbare Classe der die Figur umschreibenden Planimeter beruht, wurde, wie der Verfasser in Dingler's polytechnischem Journal Bd. 137, S. 82 nachgewiesen hat, von dem

bayerischen Trigonometer J. M. Hermann[1] bereits im Jahre 1814 erfunden und 1817 angewendet, seine Erfindung ist aber, da er sie nicht veröffentlichte, sondern bloss seiner vorgesetzten Stelle vorlegte, nicht gehörig beachtet worden und scheint bereits vergessen gewesen zu sein, als der schweizerische Ingenieur Oppikofer aus Untereppikon im Jahre 1827 auf gleicher Grundlage einen von dem Hermann'schen Instrumente kaum zu unterscheidenden Planimeter construirte. Der Mechaniker Ernst in Paris nahm an dem Oppikofer'schen Planimeter mehrere Veränderungen und zum Theil Verbesserungen vor, so dass die abgeänderten Planimeter in Frankreich nach ihm benannt wurden. Ein wesentliches Verdienst um diese Instrumente gebührt dem Ingenieur Wetli in Zürich desshalb, weil er den Kegel des Hermann'schen Planimeters durch eine flache Scheibe ersetzte und dadurch die Genauigkeit der Messung wesentlich erhöhte. Einige kleine Verbesserungen der Wetli'schen Construction verdankt man dem Astronomen Hansen in Gotha.

Der von Wetli verbesserte Hermann'sche Linearplanimeter leistet in Bezug auf Genauigkeit und Zeitersparniss fast Unglaubliches, an Einfachheit und Wohlfeilheit wird er jedoch von dem Polarplanimeter des Professors Amsler[2] in Schaffhausen übertroffen. Indem wir von diesen beiden Arten von Planimetern nach den dieselben behandelnden Schriften von Amsler und dem Verfasser Zeichnungen und Beschreibungen nebst Theorie und Gebrauchsanweisung mittheilen, finden wir uns zu der Bemerkung veranlasst, dass die völlige Uebereinstimmung der Fig. 115 mit der Fig. 4 Tafel 15 der Messkunde von Barfuss (Weimar 1854) bloss davon herrührt, dass letztere bis auf die Buchstaben eine Copie unserer Zeichnung vom Jahre 1853 ist. (Vergl. Bauernfeind, die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen. München, 1853.)

Der Linearplanimeter.

§. 82. Der Planimeter unterscheidet sich von der ursprünglichen Einrichtung des umschreibenden Planimeters von Hermann im Grunde nur durch eine bessere mechanische Ausführung und die Vertauschung des von dem Erfinder angewendeten drehbaren Kegels mit einer horizontalen Scheibe. In der Einführung dieser Scheibe besteht Wetli's grosses Verdienst um die Vervollkommnung des auf rechtwinklige Coordinaten gegründeten Planimeters, welchen wir zunächst betrachten und der Kürze halber (zum Unterschiede von dem Polarplanimeter) Linearplanimeter nennen wollen.

[1] Geboren am 22. Juli 1785 in Pfronten bei Füssen, 1808 zum Geodäten ernannt und am 25. März 1841 als Trigonometer in München gestorben.

[2] Der Verfasser sah im August 1856 in der Werkstätte des polytechnischen Instituts zu Wien einen mit dem Amsler'schen bis auf eine Kleinigkeit übereinstimmenden Polarplanimeter, welcher nach den bereits im Jahre vorher gemachten Angaben des Bergmeisters Schmid in Leoben von Chr. Starke verfertigt war. Sorgfältige Nachforschungen stellten heraus, dass auch hier wieder zwei Personen gleichzeitig eine und dieselbe Idee und Form eines Instruments erfunden haben. (Vergleiche: Amsler, über einen neuen Planimeter. Schaffhausen, 1856.)

Man kann die Idee, welche diesem Instrumente zu Grunde liegt, kaum besser und einfacher ausdrücken, als dieses ihr Erfinder in den nachfolgenden Worten that:[1]

„Der Flächeninhalt zweier Dreiecke oder Parallelogramme, welche eine und dieselbe Grundlinie haben, steht im geraden Verhältniss zu ihren Höhen. Denkt man sich nun einen Kreis, dessen Peripherie gleich einer solchen gemeinschaftlichen Grundlinie ist, und diesen Kreis mit etwas Anderem so in Verbindung, dass, wenn man mit dem Letzteren längs dieser Linie hinfährt, er sich gerade einmal um seine Axe dreht, wenn die Höhe der Figur = 1 ist; denkt man sich ferner, dass, wenn die Höhe der Figur = 2 ist, sich der Kreis vermittels seiner Verbindung, während längs der Grundlinie hingefahren wird, zweimal um seine Axe dreht; denkt man sich endlich, dass die Revolutionen des Kreises wie die Zahlen der Höhen zunehmen, und würde die Zahl dieser Revolutionen an irgend Etwas bemerkt werden können: so hätte man mit einem so verbundenen Kreise eine Art mechanischen Flächenmessers. Wollte man nun ohne Zahlenrechnung den Inhalt geometrischer Figuren durch eine Maschine finden, so dürfte bloss die Art aufgesucht werden, wie die Kreisrevolutionen in dem obigen Verhältniss bewirkt werden könnten, und die Maschine wäre erfunden."

Nach der jetzigen Einrichtung des Linearplanimeters ist der vorgenannte Kreis ein ungezahntes Rädchen, das auf einer horizontalen Scheibe senkrecht steht und um eine mit dieser Scheibe parallele Axe drehbar ist. Die Scheibe selbst dreht sich um eine verticale Axe und bringt dadurch das auf ihr ruhende Rädchen in Folge der stattfindenden Reibung in Bewegung. Ist der Abstand des Berührungspunkts des Rädchens vom Mittelpunkte der Scheibe gleich dem Halbmesser des Rädchens, so wird dieses eine ganze Umdrehung machen, wenn die Scheibe eine macht, und eine halbe, wenn diese sich nur zur Hälfte dreht; allgemein wird sich das Rädchen so vielmal mehr drehen als die Scheibe, als sein Halbmesser in dem Abstande seines Berührungspunkts vom Mittelpunkte der Scheibe enthalten ist. Die Verschiedenheit dieses Abstands erfordert eine Bewegung der Scheibe längs der unverrückbar gedachten Drehaxe des Rädchens, oder längs der mit ihr parallelen Höhe des zu messenden Rechtecks; die Drehung der Scheibe muss dagegen durch die Abwickelung eines um ihre Welle geschlungenen Fadens geschehen, welcher der Grundlinie jenes Rechtecks parallel ist. Schliesslich ist an dem Apparate noch eine Vorrichtung anzubringen, durch welche die Drehungen des Rädchens gezählt werden können. Nach dieser Vorbereitung wird man den Zusammenhang der in der nachfolgenden Abbildung und Beschreibung näher bezeichneten Theile des Hansen'schen Planimeters leicht begreifen.

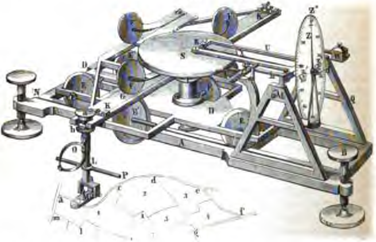
§. 83. **Beschreibung.** Das Instrument erfordert zwei auf einander senkrechte (den Axen parallele) Grundbewegungen: die eine geschieht durch

[1] Siehe des Verfassers Aufsatz »zur Geschichte der Planimeter« in Dingler's polytechnischem Journal, Bd. 137, H. 2.

den unteren Schlitten nach der Langseite des Messingrahmens A, welcher mit den Stellschrauben B das Fussgestell bildet; die andere aber durch den oberen Schlitten G, auf dem ein Silberdraht ausgespannt ist, der sich um die Trommel T der Scheibe S schlingt.[1]

An dem Schlitten G befindet sich der Führer L, welcher zum Umschreiben der auszumessenden Figur dient. Der Fahrstift des Hermann-Wetli'schen Planimeters ist von Hansen durch ein Glas M mit einer kreisförmigen Marke ersetzt worden, welche auf dem Umfange fortgeführt wird. Damit dieses genauer als mit dem Stifte geschehen könne, ist über M eine Lupe O angebracht, welche Marke und Umfang vergrössert. Die Drehungen

Fig. 115.



des auf der Scheibe S stehenden Rädchens R werden durch den Zeiger Z auf dem Zifferblatte Z° gemessen, und dieses ruht auf den mit dem Fussgestelle festverbundenen Trägern Q, Q. Die Eintheilung des Zifferblatts, welches in neuerer Zeit auf der Langseite des Gestells angebracht wird, kann den zu wählenden Masseinheiten und ihren Unterabtheilungen angepasst werden: an unserem Instrumente ist sie so getroffen, dass man bei Z' Tausende, bei Z'' Hunderte und am Umfange ganze und Theile von Flächeneinheiten ablesen kann. Alle übrigen Theile, namentlich Laufrollen, Federn, Schrauben und das Gegengewicht W, dienen bloss zur Erzeugung genauer Bewegungen und zur Berichtigung des Instruments.

§. 84. Der **Gebrauch** des fehlerfreien Planimeters ist äusserst einfach. Steht derselbe nämlich auf einer festen ebenen Unterlage, einem Tische

[1] Man kann sich die Axe der x diesem Drahte und die Axe der y der Langseite des Rahmens A parallel denken.

oder Zeichenbrette, so bringe man ihn zunächst durch die Fussschrauben in eine nahehin wagrechte Lage. Diese Lage erkennt man daran, dass jeder der beiden Schlitten an der Stelle ruhig verharrt, in die man ihn schiebt. Hierauf lege man die auszumessende ebene Figur so unter den Führer L, dass dieser ungefähr über deren Mitte steht, wenn sich bei etwas ausgezogenem Schlitten das Rädchen R am Mittelpunkte der Scheibe S befindet. Diese Stellung ist jedoch wie die horizontale Lage des Instruments nur annähernd herbei zu führen. Nun bezeichne man auf dem Umfange einen Punkt, von dem der Führer ausgeht und bis zu dem er wieder zurückkehrt. Für die Verminderung der zufälligen Fehler ist es gut, diesen Punkt so zu wählen, dass der Berührungspunkt des Rädchens R noch nahe am Scheibenmittelpunkte steht, oder so, dass die erste Bewegung des Führers der Langseite des Instruments nahezu parallel ist. Hierauf hebe man durch das Schräubchen e das Rädchen R ein wenig in die Höhe, drehe alle Zeiger auf Null zurück und stelle die Marke M genau auf den Anfangspunkt des Umfangs, was dann der Fall ist, wenn die Mitte der Marke diesen Punkt deckt. Ist dieses geschehen, so lasse man durch Rückwärtsdrehen des Schräubchens e das Rädchen R auf die Scheibe S herab, bis sich beide dicht berühren, führe die Marke M auf der auszumessenden Figur von links nach rechts (wie den Zeiger einer Uhr) vorsichtig herum und lese, sobald der Ausgangspunkt erreicht ist, auf dem Zifferblatte die Fläche ab, wie bereits angegeben. Will man die Figur sogleich zum zweitenmale messen, so fahre man lediglich, wenn man im Anfangspunkte angekommen ist, weiter bis man diesen zum zweitenmale erreicht, die Ablesung gibt dann die doppelte Fläche. Man begreift, dass sich auf diese Weise der Flächeninhalt einer Figur beliebig vervielfachen und durch Division die einfache Fläche finden lässt.

§. 85. **Theorie.** Sobald man eingesehen hat, dass der beschriebene Planimeter den Flächeninhalt eines mit seinen Axen parallel liegenden Rechtecks angibt, wenn dieses rechtsinnig umfahren wird, hat man den wesentlichsten Theil der Theorie des Linearplanimeters erfasst.

Fig. 116.

Stellt a b c d (Fig. 116) ein Rechteck vor, dessen Seiten den Schlittenbewegungen parallel sind, und bezeichnet

x die Länge der dem Drahte parallelen Seite a b;
y die der unteren Schlittenbahn parallele Seite a d;
r_0 den Abstand des Berührungspunkts des Rädchens R vom Scheibenmittelpunkte, wenn der Führer auf a steht;
r den Halbmesser der Scheibentrommel T;
r_1 den Halbmesser des Rädchens R;
φ den Drehwinkel der Scheibe oder ihrer Trommel und
v den Drehwinkel des Rädchens R, beide in Bogenmass:

so ist, wenn der Führer von a nach b gelangt ist, $x = r \varphi$ und, da sich während dieser Bewegung der Abstand r_0 nicht ändert, $r_0 \varphi = r_1 v$, oder, wenn man φ eliminirt:

$$r_0 x = r r_1 v. \qquad (166)$$

Geht der Führer von b nach c, so erfolgt keine Abwickelung des Drahtes, folglich auch keine Drehung der beiden Scheiben; aber es ändert sich der Abstand r_0 in $r_0 \pm y$ um. In c ist die Ablesung der in b gleich. Bewegt man jetzt den Führer von c nach d, so entsteht eine der vorigen entgegengesetzte aber gleiche Drehung der grossen Scheibe, welche durch $- x = - r \varphi$ ausgedrückt ist; und auf dem Rädchen R oder der kleinen Scheibe wickelt sich ein Bogen von der Länge $(r_0 \pm y) \varphi = r_1 v_1$ ab, welcher der Lage nach dem vorigen $r_1 v$ entgegengesetzt ist. Es ergibt sich somit die zweite Gleichung:

$$- (r_0 \pm y) x = - r r_1 v_1. \qquad (167)$$

Fährt man schliesslich von d nach a, so erfolgt wie von b nach c keine Drehung, der Abstand $r_0 \pm y$ wird jedoch wie im Anfange $= r_0$. Die Ablesung in a ist der in d gleich und entspricht dem Bogenunterschied $v - v_1$. Dieser Unterschied zeigt aber die Fläche des Rechtecks a b c d an; denn zieht man die Gleichung (167) von der (166) ab, so kommt

$$\pm y x = r r_1 (v - v_1), \qquad (168)$$

d. h. die Fläche des Rechtecks a b c d $= x y$ ist der algebraischen Summe der Drehungen des Rädchens proportional, was zu beweisen war.

Denkt man sich nun an das Rechteck a b c d ein zweites e f g h angefügt, wie Fig. 116 zeigt und jedes dieser Rechtecke umfahren, so gibt der Planimeter offenbar die Summe beider Flächen an. Bei diesem Umfahren wurde aber die Linie e f, an der sich beide Rechtecke berühren, zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen umfahren. Die damit verbundenen Drehungen des Rädchens R heben sich folglich auf, da jedesmal der Abstand des Berührungspunkts $r_0 \pm y$ war, und man kann also die Beschreibung der Linie e f ganz weglassen; thut man dieses aber, so bleibt bloss der Umfang a b c f g h e d a der Fig. 116 zu umfahren übrig, um die Fläche dieser Figur zu finden. Dasselbe findet statt, wie viele Rechtecke man auch an einander legt. Da man nun jede Figur in Rechtecke so zerlegen kann, dass deren Flächensumme der gegebenen Figur gleich ist, und da die Lage der Rechtecke willkürlich ist, so kann man dieselben auch so einlegen, dass ihre Seiten den Bewegungsrichtungen der Schlitten des Planimeters beziehlich parallel sind. Zufolge des vorhergehenden Satzes braucht man, um die Fläche der ganzen Figur zu ermitteln, nur die treppenförmige Umfangslinie b c f g . . . . b, welche die Rechtecke begrenzt, zu umfahren. Da aber die Breite der Rechtecke beliebig ist und demnach ausserordentlich klein genommen werden kann, so wird bei dieser Annahme die Treppenlinie mit der eigentlichen Umfangslinie der gegebenen Figur zusammenfallen, und deren Inhalt gefunden werden, wenn man ihren Umfang umfährt.

Es kommt also, wenn der Zählapparat unmittelbar den Inhalt der Fläche statt der Drehungen des Rädchens angeben soll, nur darauf an, die Flächeneinheit auszumitteln, welche ein Theil des Zifferblatts vorstellt. Diese Ausmittelung ist sehr einfach. Denn stellt F die Fläche vor, welche einer ganzen Umdrehung des Zeigers Z entspricht, so muss in diesem Falle die Summe aller Drehungen $= 2\,\pi$ und daher

$$F = 2\,r\,r_1\,\pi$$

sein. Ist nun das Zifferblatt in n gleiche Theile getheilt, so stellt jeder Theil eine Fläche $f = {}^1/_n\,F$ vor und es drückt alsdann

$$n\,f = 2\,r\,r_1\,\pi$$

die Abhängigkeit der Halbmesser der Trommel T und des Rädchens R von der Flächeneinheit f aus. Ist demnach z. B. der Trommelhalbmesser $r = 3{,}485$ Dec. Linien und soll einer von den 100 Theilen des Zifferblatts eine Quadrat-Decimallinie vorstellen, so muss der Halbmesser des Rädchens

$$r_1 = \frac{n\,f}{2\,r\,\pi} = \frac{100}{2\,.\,3{,}485\,\pi} = 4''',567$$

sein. Wäre die zu messende Fläche im Massstabe von 1 : 2500 gezeichnet und sollte 1 Theil des in 100 Theile getheilten Zifferblatts den hundertsten Theil eines Tagwerks, also 400 □' (in Bayern „Decimale" genannt) vorstellen, so fänden die Gleichungen statt:

$$F = 100\,.\,f = 64\,\square''' = 2\,r\,r_1\,\pi = 2\,\pi\,.\,3{,}485\,.\,r_1$$

und hieraus erhielte man den der Bedingung entsprechenden Halbmesser des Rädchens R, d. i.

$$r_1 = \frac{64}{2\,\pi\,.\,3{,}485} = 2''',9228.$$

§. 86. Die **Prüfung** des Planimeters würde sehr umständlich sein, wenn alle wesentlichen Theile einzeln untersucht werden müssten, ob sie ihre Bestimmung mit der erforderlichen Genauigkeit erfüllen. Diese Einzel-Untersuchung ist jedoch nicht nöthig, sobald man sich durch ein summarisches Verfahren überzeugt hat, dass der Flächeninhalt von genau berechneten Versuchsfiguren richtig angegeben wird. Am besten sind hierzu regelmässige Figuren, wie Kreise, Quadrate, gleichseitige Dreiecke u. s. w. geeignet, weil sie sich am schärfsten zeichnen und berechnen lassen. Man kann sie entweder auf angespanntem Papiere fein ausziehen oder in ebene Metallplatten graviren. Ihre Abmessungen müssen mit der grössten Genauigkeit bestimmt sein. Es ist gut, wenn man zu diesen Probefiguren auch solche nimmt, welche, wie z. B. Rechtecke, erfordern, dass die beiden Schlitten ihre grösstmöglichen Bewegungen machen, weil nur dann, wenn auch der Inhalt dieser Flächen richtig angegeben wird, angenommen werden darf, dass alle Theile des Apparats ihre Schuldigkeit thun.

Bei diesen Versuchen kann sich zeigen, dass alle abgelesenen Flächeninhalte gegen die berechneten nur um äusserst wenig (etwa $^1/_{1000}$) bald zu gross, bald zu klein sind: in diesem Falle ist das Instrument in Ordnung. Oder es zeigt sich, dass alle Inhalte um etwas zu gross gefunden werden;

dann ist auch das Rädchen etwas zu gross und desshalb sein Durchmesser um eine Kleinigkeit zu verringern. Oder man findet alle Flächen etwas zu klein; dann ist auch der Durchmesser des Rädchens zu klein. Da derselbe aber nicht vergrössert werden kann, so ist oft damit zu helfen, dass man den Draht etwas dicker nimmt, denn dadurch wird der Halbmesser r der Trommel grösser und es kann so das Product $r r_1$ auf die erforderliche constante Grösse gebracht werden, sowie auch im vorhergehenden Falle durch Anwendung eines dünneren Drahtes das Abdrehen des Rädchens oft erspart wird. Oder endlich es zeigt sich, dass die Abweichungen von dem wahren Flächeninhalte bald positiv bald negativ, jedenfalls aber grösser sind als sie sein dürfen; dann wird der Fehler entweder von der Ungeschicklichkeit oder Unachtsamkeit des Messenden, oder von der Unebenheit der Scheibe S, oder von der gleitenden Bewegung des Rädchens R herrühren.

Was die erste dieser drei Fehlerquellen betrifft, so wirkt sie um so schwächer, je besser das Instrument aufgestellt ist und je gleichmässiger und vorsichtiger der Umfang der Figur umfahren wird. Die zweite Quelle liegt meistens in dem Papiere, womit die Metallscheibe überzogen ist; man muss desshalb den Ueberzug nach allen Richtungen mit einem genauen Lineale untersuchen, ob er eben ist, und ihn verbessern, wenn er es nicht sein sollte. Am gefährlichsten kann die dritte Fehlerquelle werden, welche theils in einer schwerfälligen Bewegung der Axe des Rädchens R, theils in zu grossem oder zu geringem Drucke dieses Rädchens auf die Scheibe S liegen kann. Die Bewegung der genannten Axe lässt sich durch die auf ihre Lager wirkenden Schräubchen bei e und c′, der Druck des Rädchens aber durch das Gegengewicht W reguliren.

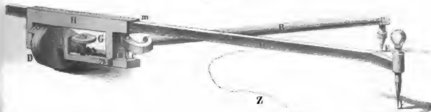
§. 87. Ueber die **Genauigkeit** des Linearplanimeters hat der Verfasser vielfache Versuche angestellt und einen Theil der letzteren in seiner oben angeführten Schrift auf S. 33 bis 37 mitgetheilt. Aus allen diesen Versuchen geht mit Entschiedenheit hervor, dass jenes Instrument eine viel grössere Genauigkeit gewährt, als man für irgend einen practischen oder wissenschaftlichen Zweck nöthig hat, und dass die Genauigkeit bei kleinen Flächen etwas geringer ist als bei grossen. Bei nur einiger Uebung wird man Flächen von ungefähr 2 Quadratzoll Inhalt sicher bis auf $^1/_{1000}$ ihres Inhalts richtig finden, und, wie diese auch umgrenzt sein mögen, mit einem Zeitaufwande von nur 1 bis 3 Minuten.

Die Genauigkeit der Planimeter von Wetli und Hansen ist so gross, dass sie denjenigen, welche das erste Mal damit arbeiten oder welche bloss Berichte über ausgeführte Arbeiten lesen, auffällt. Sie kann auch wohl nur dadurch erklärt werden, dass man annimmt, die mit der Bewegung verbundenen kleinen Unregelmässigkeiten gleichen sich ungefähr in derselben Weise grösstentheils aus wie die kleinen Beobachtungsfehler beim Nivelliren, wovon später noch die Rede ist.

Der Polarplanimeter.

§. 88. **Beschreibung.** Die Bezeichnung Polarplanimeter ist desshalb gewählt, weil sich das Instrument beim Gebrauche um einen festen Punkt (den Pol) dreht. Dieser Punkt ist in unserer (etwas verkürzten) Zeichnung Fig. 117 mit E bezeichnet und wird in Wirklichkeit durch eine feine Nadel vorgestellt, welche in den Arm B eingesetzt ist, der mit den übrigen beiden Haupttheilen, dem Stabe A und der Laufrolle D, durch die Hülse H zusammenhängt. Sowie der Arm B den Nadeleinsatz E, trägt der Stab A an einem Ende den Fahrstift F, während das andere Ende in der Hülse H durch Reibung festgehalten wird. Die Hülse ist an den Enden aufgeschnitten, damit die dadurch entstehenden Lappen, als Federn wirkend, die Reibung vermehren und gleichmässiger machen. Mit dieser Hülse ist

Fig. 117.



der Arm B durch die verticale Axe C verbunden. Denkt man sich durch diese Axe und die Mitte des Fahrstifts eine Ebene gelegt, so bekommt man die Richtung, welcher die Axe der stählernen Laufrolle D parallel ist. Der äusserste Rand dieser Rolle ist abgerundet und polirt, ihr cylindrischer Limbus aber in 100 oder 200 Grade getheilt, welche mittels des Nonius o bis auf Zehntelsgrade abgelesen werden können. Die ganzen Umdrehungen der Rolle werden durch das Rädchen G gezählt, das von einer an der Axe jener Rolle befindlichen unendlichen Schraube bewegt wird. Der Stab A hat während jeder Messung eine unveränderliche Stellung gegen die Hülse, und es wird dieselbe nur geändert, wenn man der Messung eine andere Flächeneinheit zu Grunde legen will. Wie weit man ihn zu verschieben hat, sieht man an der Theilung auf seiner oberen Fläche, für welche eine in die Verlängerung der Axe C fallende Kante m der Hülse H als Zeiger dient.

§. 89. **Gebrauch.** Soll der Flächeninhalt einer gezeichneten ebenen Figur (Z) gefunden werden, so stelle man vor Allem den Stab A so, dass die Fläche in der Einheit ausgedrückt wird, welche man wünscht, z. B. in Quadratdecimetern. Dieses ist der Fall, wenn der auf der Theilung mit 1 Quadratdecimeter bezeichnete Theilstrich bis an die Kante m der Hülse H vorgeschoben ist. Hierauf setze man das Instrument nach Fig. 117 so auf die Zeichnung, dass die Rolle D, die Nadel E und der Stift F genau aufliegen und der Stift F an jeden Punkt der zu messenden Figur gelangen

kann. Hat man die Nadel E etwas in das Papier gedrückt und den Stift auf den beliebig gewählten Anfangspunkt F des Umfangs der Figur eingestellt, so lese man den Stand der Rolle D an dem Rädchen G und dem Nonius o ab und schreibe ihn auf. Alsdann umfahre man die Figur von links nach rechts bis zu dem Ausgangspunkte, lese den Stand der Rolle D wieder ab und subtrahire die erste Ablesung von der zweiten. Die erhaltene Differenz sei $= \Delta$. Liegt nun die Spitze oder der Pol E ausserhalb der umfahrenen Figur, so ist der Unterschied Δ geradezu der gesuchte Flächeninhalt in der Einheit, auf welche der Stab A eingestellt wurde, hier in Quadratdecimetern; befindet sich aber der Pol E innerhalb der umfahrenen Figur, so ist der Differenz Δ eine constante Zahl beizufügen, welche für jede Masseinheit des Planimeters auf der Seitenfläche des Stabs A und zwar da angemerkt ist, wo sich der einzustellende Theilstrich befindet. Hätte man also die Spitze E innerhalb der Figur befestigt und mit der Einstellung auf Quadratdecimeter z. B. die Differenz $\Delta = 4{,}567$ erhalten, so wäre, da die Constante hier $= 18{,}81$ ist, der Inhalt der umfahrenen Fläche $= 18{,}81 + 4{,}567 = 23{,}377$ □Decimeter. Um diese Reductionen zu ersparen, wird man, so oft es die Ausdehnung der auszumessenden Figur erlaubt, die Spitze E ausserhalb des Umfangs anbringen. Befindet sich die Figur auf einem Reissbrette, welches zu klein ist, um der Rolle D den nöthigen Spielraum zu gewähren, so müsste man in gleicher Höhenlage ein zweites Blatt anfügen und die Stossfuge eben zudecken. Ist dagegen die Figur auf ein zu kleines abgeschnittenes Blatt gezeichnet, so braucht man dieses lediglich auf einen grösseren Zeichnungsbogen zu legen, beide mit Strohpapier zu überdecken und die Laufrolle über dieses wegzuführen. Bei der Lage des Pols innerhalb der Figur kann es sich treffen, dass die Differenz Δ (durch Subtraction der ersten Ablesung von der zweiten entstanden) negativ wird: dieses Vorzeichen ist bei der Reduction gehörig zu berücksichtigen.

§. 90. **Theorie.** Sowie der §. 85 nur einen Theil der Theorie des Linearplanimeters enthält, so folgt auch hier nur so viel von der Theorie des Polarplanimeters, als nöthig ist, dessen Wirkungsweise einzusehen. Wir halten uns hierbei ganz an die von Amsler gegebene Darstellung.

In den Fig. 118 und 119 bezeichne F die Spitze des Fahrstifts, E die Nadelspitze oder den Pol, C die Horizontalprojection der Axe des Arms B, D den Berührungspunkt der Laufrolle, r die während einer Messung constante Entfernung des Stifts F von der Axe C und R die gleichfalls unveränderliche Entfernung dieser Axe vom Pole E.

Liegt dieser Pol ausserhalb einer geschlossenen Curve Z, wie in Fig. 118, und man führt den Stift F auf ihr herum, so beschreibt der Punkt C bloss einen Kreisbogen, befindet sich aber E innerhalb der Curve Z, wie in Fig. 119, so beschreibt der Punkt C einen ganzen Kreis. Diese beiden Fälle sind besonders zu untersuchen.

Hat F den ganzen Umfang durchlaufen, so befindet sich die Gerade CF

Fig. 118.

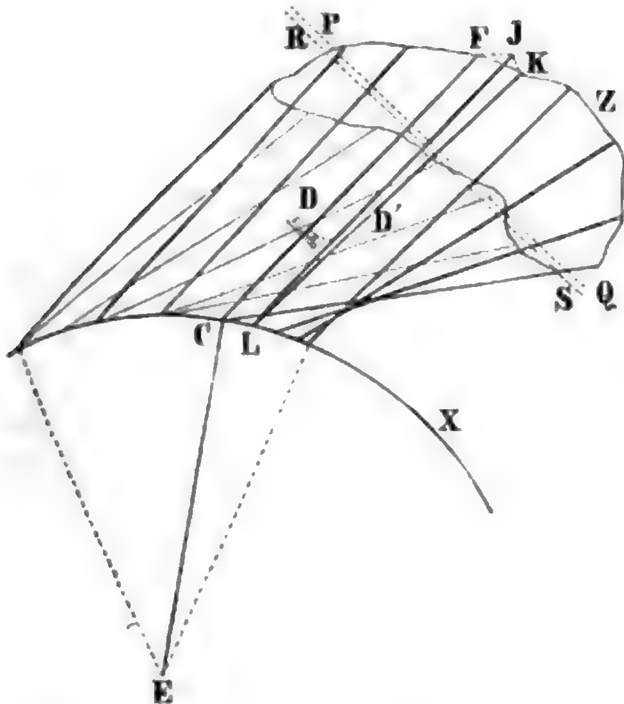
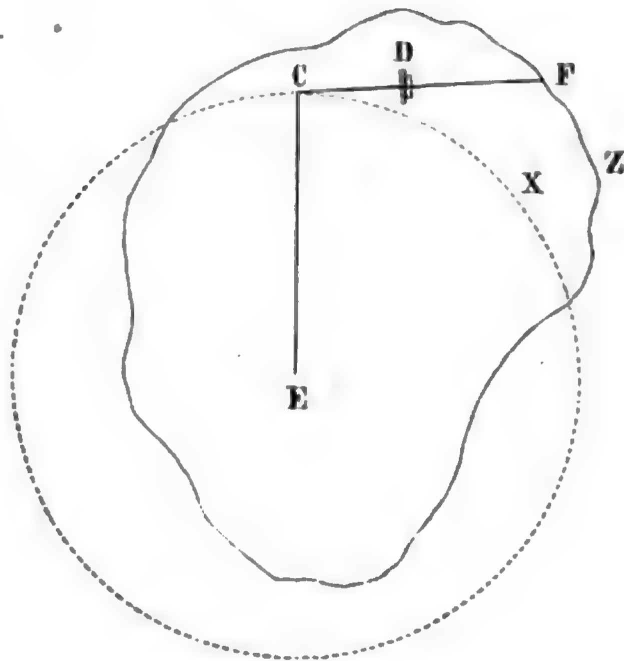


Fig. 119.



wieder in ihrer Anfangslage und hat während ihrer Bewegung jeden innerhalb der Curve Z liegenden Punkt einmal oder 3, 5, 7 . . . mal getroffen, jeden äusseren Punkt dagegen entweder gar nicht oder 2, 4, 6 . . . mal. Sind nun C F und L K (Fig. 118) zwei auf einander folgende Lagen der beweglichen Geraden, so ist klar, dass C F nur durch eine gleichzeitig fortschreitende und drehende Bewegung in die Lage L K kommt, und dass man diese zusammengesetzte Bewegung in zwei einfache zerlegen kann, indem man sich vorstellt, dass die Gerade C F zuerst durch eine parallele Verschiebung in die Lage L J und hierauf durch eine Drehung um den Punkt L in die Lage L K gelange. Somit wird das Flächenelement C L K F durch die algebraische Summe des Parallelogramms C F J L = p und des Sectors L J K = s vorgestellt.

Die Fläche p werde als positiv angesehen, wenn sie durch die Tangente des Punkts C vom Pole E getrennt ist und, von diesem aus gesehen, rechts von C F liegt; der Sector s dagegen sei positiv, wenn die Gerade L J durch eine rechtsinnige Drehung in die nachfolgende Lage übergeht.

Es ist nun nicht schwer einzusehen, dass, wenn man sich jedes Flächenelement, das durch zwei auf einander folgende Lagen der Geraden C F entsteht und durch die von deren Endpunkten beschriebenen Bögen begrenzt wird, in ein Parallelogramm p und einen Sector s zerlegt denkt, die Summe aus der Summe aller p (Σ p) und aus der Summe aller s (Σ s), d. i. $\Sigma\, p + \Sigma\, s$ gleich ist der von der Curve Z begrenzten Fläche, sobald C F in die erste Lage oder der Stift F auf den Ausgangspunkt zurückgekehrt ist. Wird der Flächengehalt der Figur Z mit J bezeichnet, so ist demnach

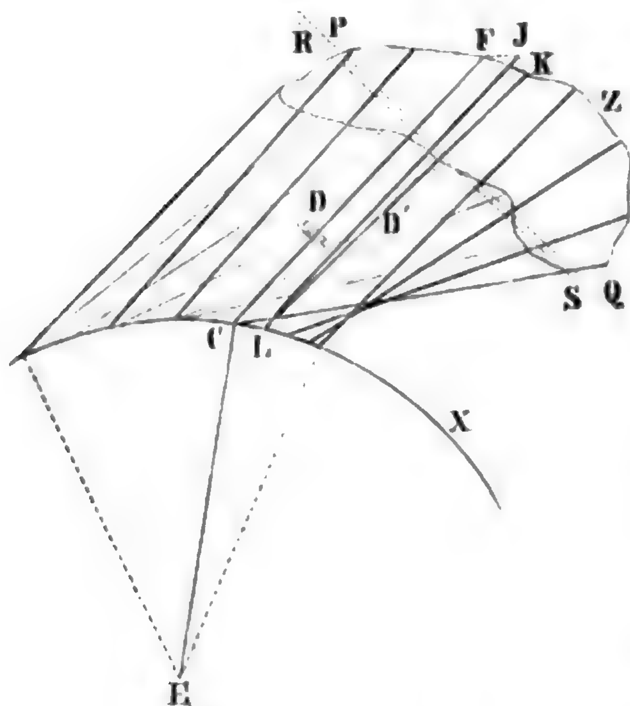
$$J = \Sigma\, p + \Sigma\, s. \tag{169}$$

Denkt man sich jetzt mit der Geraden C F eine auf der Zeichnungs-

fläche sich bewegende Rolle so verbunden dass ihre Axe parallel zu C F ist und ihr Berührungspunkt in D liegt, so wird diese Rolle bloss gleiten, wenn sie nach ihrer Axe, und bloss rotiren, wenn sie senkrecht zur Axe bewegt wird; in jedem anderen Falle findet gleichzeitig Gleitung und Drehung statt. Bei dem Uebergange der Linie C F in die Lage L J wird die Rolle einen Bogen h abwickeln, welcher der senkrechte Abstand dieser beiden Lagen ist; und bei dem Uebergange von der Lage L J in die Lage L K beschreibt der Berührungspunkt der Rolle D einen Bogen $\varrho\ \varphi$, wenn $\varrho = CD$ und $\varphi = JLK$ ist. Die Gesammtabwickelung von der ersten zur zweiten Lage ist somit $= h + \varrho\ \varphi$ und von der ersten Lage bis wieder zur ersten, wobei die ganze Figur umfahren wird, gleich

$$u = \Sigma h + \Sigma \varrho\ \varphi. \quad (170)$$

Fig. 118.



Die Grössen h und φ sind positiv oder negativ, je nachdem es die Flächenelemente p und s sind, und der Abstand ϱ wird negativ, wenn die Rolle D auf der Verlängerung von F C, also von F weiter abliegt. Für den einen Fall, wo der Pol E ausserhalb der Figur Z liegt, Fig. 118, ist $\Sigma s = 0$, da der constante Halbmesser aller Sectoren, die Gerade C F, gerade so viele Drehungen im positiven als negativen Sinne gemacht hat, sobald er in seine erste Lage zurückgekehrt ist. Es wird somit für diesen Fall

$$J = \Sigma p \quad (171)$$

und da auch $\Sigma \varphi = 0$, also $\Sigma \varrho\ \varphi = \varrho\ \Sigma \varphi = 0$ ist,

$$u = \Sigma h. \quad (172)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der constanten Grösse von $CF = r$, so kommt

$$r\ u = \Sigma\ r\ h$$

und da r die Grundlinie, h aber die Höhe jedes Parallelogramms p bezeichnet, somit $r\ h = p$ ist, so folgt weiter

$$J = r\ u \quad (173)$$

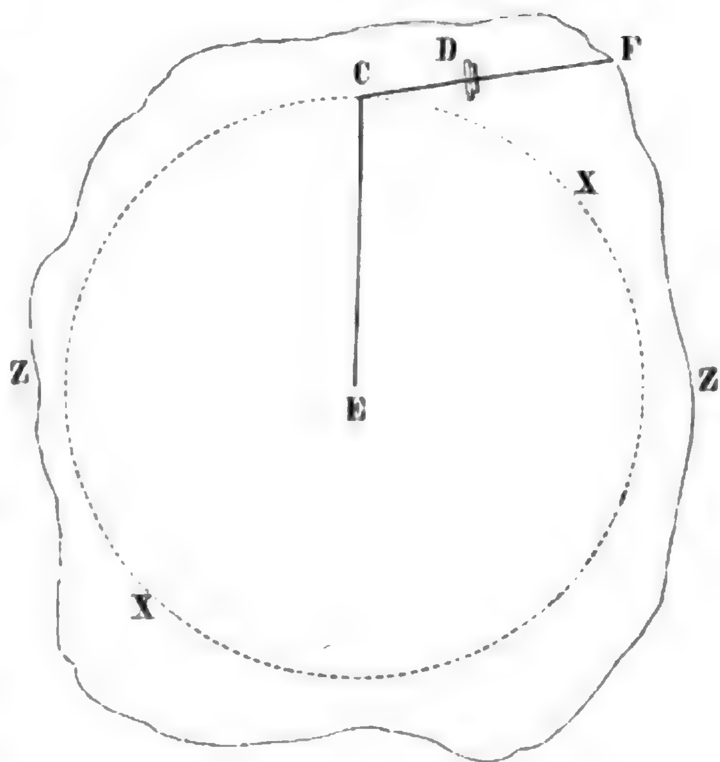
d. h. die von dem Punkte F umschriebene Fläche ist gleich einem Rechtecke, welches die constante Länge r der beweglichen Geraden C F zur Grundlinie und den von der Rolle D während der Bewegung abgewickelten Bogen u zur Höhe hat; mit anderen Worten: der abgewickelte Bogen der Rolle D ist dem Inhalte der umfahrenen Fläche proportional.

In dem anderen Falle, wo der Pol E innerhalb der Figur Z liegt, macht die Gerade C F bis zu ihrer Rückkehr in die Anfangslage eine ganze

Umdrehung, während sie in dem ersten Falle eben so viele positive als negative Drehungen vollführte. Die von den Punkten F und C (Fig. 120) beschriebenen Curven Z und X, von denen die letztere ein Kreis ist, schliessen demnach die Fläche ein, welche durch die Summe $\Sigma p + \Sigma s$ ausgedrückt ist, und es ist desshalb, wenn $EC = R$ gesetzt wird,

$$J - R^2 \pi = \Sigma p + \Sigma s. \quad (174)$$

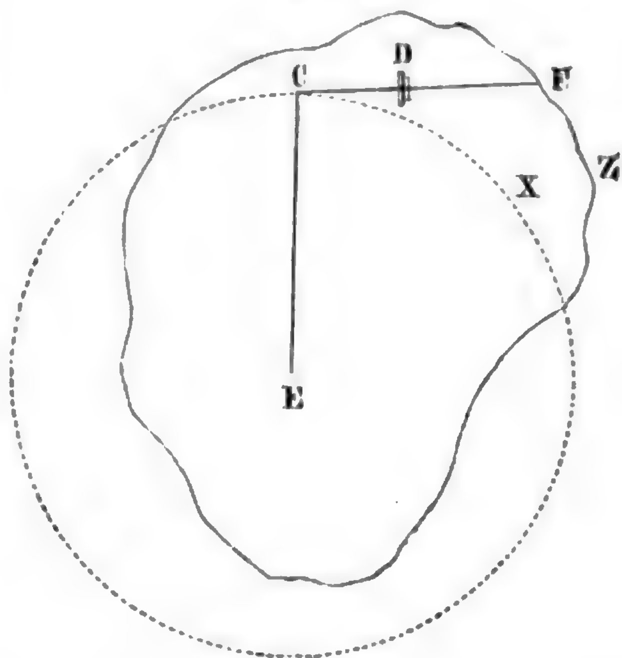
Fig. 120.



Diese Gleichung gilt übrigens nicht bloss für die vorstehende Figur allein, sondern auch dann noch, wenn sich der Kreis X und die Curve Z schneiden, wie dieses in Fig. 119 der Fall ist.

Erwägt man, dass die Gerade $CF = r$ eine ganze Umdrehung macht (der Punkt C z. B. beschreibt den Kreis X), bis sie wieder in ihre erste Lage zurückkehrt, so ist klar, dass die algebraische Summe aller von ihr bis dahin beschriebenen Sectoren (Σs) eine Kreisfläche vom Halbmesser r und daher $\Sigma s = r^2 \pi$ ist.

Fig. 119.



Die letzte Gleichung geht somit über in

$$J - R^2 \pi = r^2 \pi + \Sigma p. \quad (175)$$

Der Ausdruck $\Sigma \varrho \varphi$ in der Gleichung (170), welche hier unverändert gilt, ändert sich, da die Summe aller Drehungen 360° beträgt, in $\varrho \Sigma \varphi = 2 \varrho \pi$ und somit die Gleichung (170) selbst in

$$u = \Sigma h + 2 \varrho \pi \quad (176)$$

ab. Durch Multiplication mit r und Substitution des Werths Σp für $\Sigma r h$ erhält man hieraus:

$$r u = \Sigma p + 2 r \varrho \pi,$$

und wenn man wiederum den Werth von $\Sigma p = r u - 2 r \varrho \pi$ in die Gleichung (175) substituirt und

$$R^2 + r^2 - 2 r \varrho = c^2 \quad (177)$$

setzt, so folgt schliesslich der Inhalt der Curve L oder

$$J = c^2 \pi + r u \quad (178)$$

d. h. befindet sich der Pol E innerhalb der umfahrenen Fläche, so ist diese gleich einer constanten Fläche ($c\,\pi$) plus einem Rechtecke, dessen Inhalt dem von der Rolle abgewickelten Bogen (u) proportional ist.

Die Anwendung des Polarplanimeters erfordert, dass die beiden Ergebnisse der Theorie, welche in den Gleichungen (173) und (178) niedergelegt sind, noch weiter erörtert werden. Man kann nun zunächst statt des Bogens u die Zahl n der Rollenumdrehungen einführen. Es sei nun der Halbmesser der Rolle $D = r_1$, so ist der Bogen

$$u = n \,.\, 2\, r_1\, \pi \tag{179}$$

und wenn man diesen Werth in die eben genannten Gleichungen setzt und die Flächeninhalte J, J der umfahrenen Figuren nunmehr mit J' und J'' unterscheidet, so erhält man jetzt:

$$J' = 2\, r\, r_1\, \pi \,.\, n \tag{180}$$

$$J'' = 2\, r\, r_1\, \pi \,.\, n + c^2\, \pi \tag{181}$$

Damit nun sofort n die Fläche J' oder J'' bis auf die Constante $c^2\,\pi$ angibt, muss man das Product $2\, r\, r_1\, \pi = 1$ oder einer Potenz von 10, also $= 10, 100, 1000 \ldots$ machen; da aber von den Factoren dieses Products nur einer, nämlich die Länge r des beweglichen Arms A, veränderlich ist, so muss man

$$r = \frac{1}{2\, r_1\, \pi} \tag{182}$$

machen. Hätte man nun r_1 mit aller Schärfe gemessen, so könnte man hieraus r berechnen und danach den Arm A in der Hülse H verschieben; der so berechnete Werth von r wird aber in der Regel nur ein Näherungswerth sein, mit dessen Hilfe man den genauen Werth von r durch Versuch findet. Stellt man nämlich erst A nach dem berechneten Werthe von r ein und umfährt einige Probefiguren, deren Flächeninhalt genau bekannt ist, so findet sich sofort, ob r zu gross oder zu klein ist, und nach einigen weiteren Versuchen wird man die Stellung des Arms gefunden haben, welche den Inhalt der Figuren anzeigt: diese Stellung markirt man, um sie später bei Anwendung derselben Flächeneinheit wieder zu benützen. Für andere Masseinheiten bestimmt man die Marken in gleicher Weise.

Die Constante $c^2\,\pi$ wird auch zunächst berechnet, indem man c^2 aus Gl. (177) sucht, unter Anwendung des eben empirisch gefundenen Werths von r. Hierauf werden einige Probefiguren von Innen aus umfahren und nach den gefundenen Flächeninhalten wird $c^2\,\pi$ verbessert. Sollte diese Constante grösser sein als die umfahrene Fläche oder die Angabe n der Rolle D, so wird n negativ, worauf man beim Ablesen wohl zu achten hat.

Ist an einem bestimmten Instrumente $r_1 = 1^{cm}$, so wird, wenn die einer Umdrehung entsprechende Fläche $= 10^2 = 100$ sein soll, $2\, r\, r_1\, \pi = 100$ und daher $r = 15^{cm},915$. Dieser berechnete Werth von r mag durch den oben beschriebenen Versuch auf $r = 15^{cm},7$ reducirt worden sein, da die Probefigur in dem Verhältniss von 98,65 : 100 kleiner angegeben wurde, als sie ist. Wenn nun in Gl. (177) $r = 15^{cm},7$; $R = 15^{cm},9$; $\varrho = 3^{cm},4$ ist,

so wird $c^2 = 606{,}06 \square^{cm}$ und $c^2 \pi = 1904 \square^{cm}$. Dieses ist die berechnete Constante. Hätten mehrere Versuche für eine Fläche von $1728{,}5 \square^{cm}$ Inhalt das mittlere Resultat $n = -170{,}2$ ergeben, so müsste man $c^2 \pi = 1728{,}5 + 170{,}2 = 1898{,}7 \square^{cm}$ setzen, und es wären für das in Rede stehende Instrument die Flächengleichungen $J' = n$ und $J'' = n + 1898{,}7 \square^{cm}$.

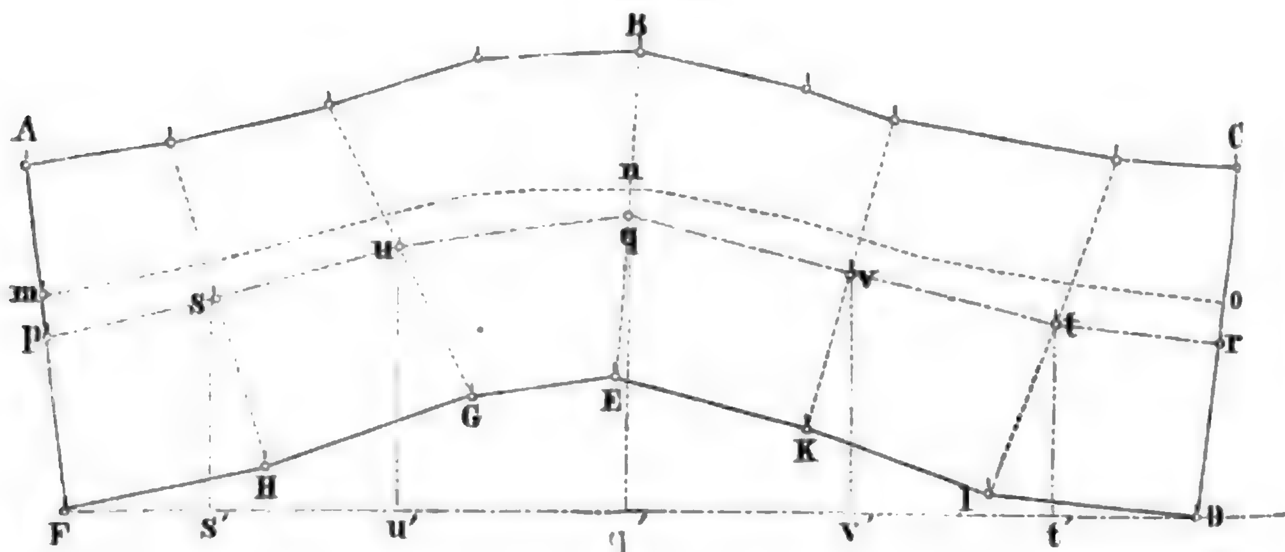
§. 91. **Genauigkeit.** Ueber die Genauigkeit des Polarplanimeters liegen nunmehr ebenso ausreichende Erfahrungen vor, wie über die des Linearplanimeters. Der Verfasser hat im Herbste 1855 mit einem Amsler'schen Planimeter einige Versuche gemacht und die gemessenen Flächen bis auf ein drittel Procent ihres Inhalts genau erhalten; er wollte aber aus diesem Ergebnisse kein definitives Urtheil über die Genauigkeit des Polarplanimeters ableiten, da das zu den Versuchen verwandte Planimeter nach den Angaben des Erfinders (und nach späteren eigenen Beobachtungen des Verfassers) nicht mit aller Sorgfalt gearbeitet war. In Wien hat man mit dem in der Anmerkung auf Seite 184 genannten Planimeter, das sich von dem Amsler-schen bloss dadurch unterscheidet, dass der Pol (E) nicht durch einen Nadeleinsatz, sondern durch einen ziemlich schweren Metallcylinder bestimmt wird, ungefähr dasselbe Resultat erhalten; dagegen führt Amsler über die Genauigkeit seiner Planimeter an: „Man betrachtete die Instrumente als fertig, sobald sie die wirklich umfahrene Fläche bis auf $^1/_{1000}$ genau angaben; dass aber eine bedeutend grössere Genauigkeit erreichbar wäre, zeigt schon die Vergleichung des Polarplanimeters mit dem Wetli'schen Planimeter, indem bei jenem mehrere Fehlerquellen wegfallen, die das letztere besitzt.“ Vor vier Jahren (1869) hat Herr Ingenieur Franz Eickemeyer auf Veranlassung des Verfassers erstens die drei Polarplanimeter der polytechnischen Schule in München unter sich in Bezug auf ihre Leistungsfähigkeit verglichen und hierauf mit dem besten von ihnen (Fabrik-Nr. 4280) Genauigkeitsversuche in der Weise angestellt, dass er eine auf Messing gravirte Kreisfläche von $116{,}15^{mm}$ Durchmesser auf verschiedene Weisen mass. Zunächst wurde in den Mittelpunkt dieser Fläche das eine Ende eines $1{,}5^{mm}$ dicken Messingstreifens mit einer an diesem senkrecht befestigten feinen Stahlspitze eingesteckt, während der Fahrstift durch ein am anderen Ende des Streifens gebohrtes Loch vom Durchmesser der Fahrstiftspitze seine Führung auf dem Kreisumfange erhielt: aus je 15 Versuchen ergab sich eine mittlere Genauigkeit von $^1/_{1760}$ und eine grösste Abweichung von $^1/_{550}$, mochte der Pol möglichst nahe oder sehr fern von der Peripherie befestigt gewesen sein. Als hierauf dieselbe Kreisfläche 15 mal mit freier Hand umfahren wurde, ergab sich eine mittlere Genauigkeit von $^1/_{615}$ und eine grösste Abweichung von $^1/_{340}$. Diese Versuche bestätigen im Wesentlichen die früheren Angaben, und es lässt sich hiernach wohl behaupten, dass die mögliche Genauigkeit der Amsler'schen Polarplanimeter etwa $\frac{1}{1600}$ und die in gewöhnlichen Fällen mit einem vorzüglichen Instrumente zu erreichende $\frac{1}{600}$ beträgt. Der Amsler'sche Polarplanimeter gewährt somit für die meisten practischen Zwecke eine hinreichende Genauigkeit und ist desshalb sehr zu empfehlen.

3. Die geometrische Vertheilung der Grundstücke.

§. 92. Die Theilung eines Grundstücks wird nöthig, wenn von diesem für irgend einen Zweck ein Stück von gegebenem Flächeninhalte abzuschneiden ist, oder wenn mehrere Eigenthümer einer Parzelle ihre Antheile sondern wollen, oder wenn die krumme, oder vielfältig gebrochene Grenze zweier Grundstücke in eine geradlinige verwandelt werden soll.

Für diese Theilungen sind entweder bestimmte Richtungen und Formen der Grenzen vorgeschrieben, oder es dürfen die neuen Grenzen in soweit beliebig gewählt werden, als sie den Zugang zu den abgetheilten Parzellen nicht erschweren. Ferner können Theilungen vorkommen bei Grundstücken von gleichem Werthe der Flächeneinheit, d. i. von gleicher Bonität, oder bei Grundstücken von ungleicher Bonität. In diesem Falle wird also für die Theilung nicht die Fläche allein, sondern das Product aus dem Flächeninhalte und dem Preise der Flächeneinheit oder der Werth des Grundstücks

Fig. 121.



massgebend sein. Endlich kann die Theilung auf Grund eines vorliegenden genauen Plans des Grundstücks oder ohne diesen durch unmittelbare Messung auf dem Felde zu vollziehen sein.

Hiernach liesse sich eine grosse Reihe von Aufgaben bilden; wir werden uns aber auf wenige beschränken, da sich das Princip, welches bei diesen Theilungen zu befolgen ist, leicht aussprechen und ausführen lässt; es besteht nämlich darin: alle hierher gehörigen Aufgaben versuchsweise zu lösen und die ersten Lösungen so lange zu verbessern, bis den gestellten Bedingungen innerhalb der nothwendigen Genauigkeitsgrenzen genügt ist. Soll hiernach z. B. ein Grundstück ABCDEF (Fig. 121) von gleicher Bonität in zwei gleiche Theile so getheilt werden, dass die neuen Grenzen den alten nahezu parallel laufen, so wird man erst eine Linie m n o als Theilungslinie annehmen und die beiden Flächen rechts und links dieser Linie aus dem Kettenmasse berechnen. Sind f_1 und f_2 die gefundenen Flächeninhalte, so ist die Gesammtfläche $f_1 + f_2 = 2f$

und folglich die Grösse eines gesuchten Theils = f, daher der eine bereits abgesteckte Theil (B n) um $d = f - f_1$ zu klein und der andere (E n) um $d = f_2 - f$ zu gross. Misst man nun die Linie m n o auf dem Felde und findet ihre horizontale Länge = l, so muss der Streifen p q r = d, um welchen f_1 zu vergrössern und f_2 zu verkleinern ist, eine Breite b erhalten, welche sich aus der Gleichung

$$d = b\,l$$

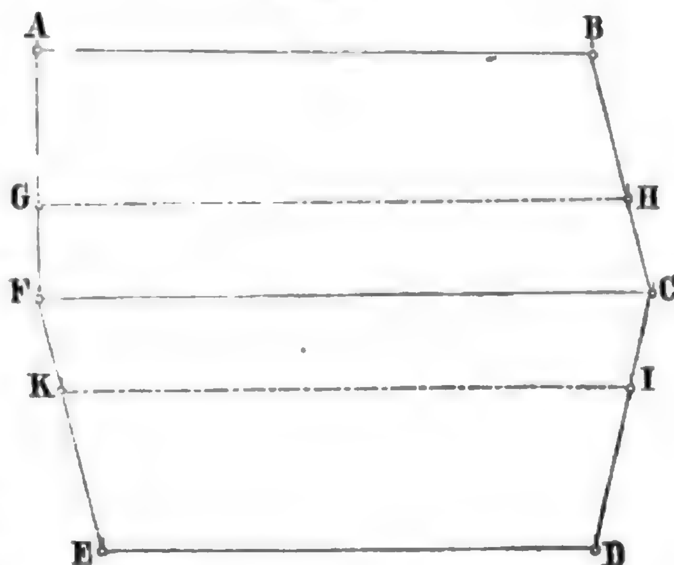
ergibt. Trägt man diese Breite von m n o aus mehrmals ab, so wird die nunmehr abgesteckte Linie p s u q v t r der gestellten Aufgabe genügen.

Wäre das zu theilende Grundstück genau gezeichnet gewesen, so hätte man die vorläufige Theilungslinie m n o in dem Plane angedeutet und die Flächen f_1 und f_2 entweder mit Zirkel und Massstab oder mit dem Planimeter gemessen und hierauf den Streifen m n o r q p wie vorhin bestimmt. Alsdann hätte man die Abstände A p, p F, C r, r D aus dem Plane entnommen, um hiernach die Punkte p und r auf das Feld überzutragen, und schliesslich würde man die Punkte s, u, q, v, t der Theilungslinie durch Abscissen und Ordinaten, welche in Bezug auf die Axe F D aus der Zeichnung abgegriffen wurden, auf dem Felde ausgesteckt haben.

Sind die zu theilenden Figuren Dreiecke oder Trapeze, so lassen sich bei der Theilung wohl auch die Constructionen anwenden, welche die ebene Geometrie lehrt; erfahrungsgemäss führt aber auch hier die Lösung durch Versuche meist schneller zum Ziele.

§. 93. **Aufgabe. Zwei aneinander stossende Grundstücke von verschiedener aber bekannter Bonität sollen in drei Theile getheilt werden, welche ihrem Werthe nach in einem gegebenen Verhältniss stehen.**

Fig 122.



Es seien A C und F D (Fig. 122) die beiden Grundstücke, der Werth w_1 des ersten $= f_1\,b_1$ und der des zweiten $w_2 = f_2\,b_2$, wobei f den Flächeninhalt und b den Preis der Flächeneinheit (die Bonität) bezeichnet. Stellen G H und K I die Theilungslinien vor, so soll sich der Werth von A H : G I : K D verhalten wie m : n : p. Der zu theilende Werth ist offenbar

$$w_1 + w_2 = f_1\,b_1 + f_2\,b_2 = W$$

und es trifft desshalb, wenn man m + n + p = N setzt, nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung auf

$$\text{Nr. 1 der Werth } m\,\frac{W}{N} = v_1,$$

$$\text{Nr. 2 der Werth } n \frac{W}{N} = v_2,$$

$$\text{Nr. 3 } \text{„} \quad \text{„} \quad p \frac{W}{N} = v_3.$$

Zeigt sich, dass die Fläche f' des Theils ABHG kleiner wird als f_1, so kann der erste Theil lediglich die Bonität b_1 haben und es wird desshalb f' aus der Gleichung gefunden:

$$f' = \frac{v_1}{b_1} = \frac{m\,W}{b_1\,N}.$$

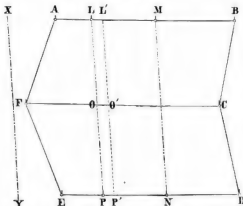
In gleicher Weise erhält man, wenn die Fläche f'' des dritten Theils DEKI von f_2 abgeschnitten werden kann,

$$f'' = \frac{v_3}{b_2} = \frac{p\,W}{b_2 N}$$

und es bleibt folglich für den zweiten Theil IHGK übrig: von dem Grundstücke der Bonität b_1 die Fläche $f_1 - f'$, und von der Bonität b_2 die Fläche $f_2 - f''$. Sind die Flächen f' und f'' bestimmt, so lassen sich die Linien GH und KI leicht berechnen und abstecken.

Sollen die Theilungslinien (LP, MN) einer gegebenen Richtung XY parallel laufen und die gemeinsame Grenze der beiden Grundstücke schneiden, wie in Fig. 123, so ziehe man erst L′P′ so, dass die beiden Abschnitte AO′, O′E dem Werthe v_1 nahezu entsprechen; da aber, wenn φ_1 die Fläche AO′ und φ_2 die Fläche FP′ bezeichnet, der Werth

Fig. 123.



$$\varphi_1\, b_1 + \varphi_2\, b_2 \lesseqgtr v_1$$

sein wird, so muss die Differenz

$$\varphi_1\, b_1 + \varphi_2\, b_2 - v_1 = \Delta,$$

welche positiv oder negativ sein kann, ausgeglichen werden. Ist dieselbe positiv, so fällt die wahre Theilungslinie LP links von der vorläufig angenommenen L′P′, ausserdem rechts. Um den Abstand beider $= \delta$ zu finden, kann man folgende Rechnung anstellen. Es muss offenbar, wenn $L'O' = l_1$ und $O'P' = l_2$ gesetzt wird, sehr nahe

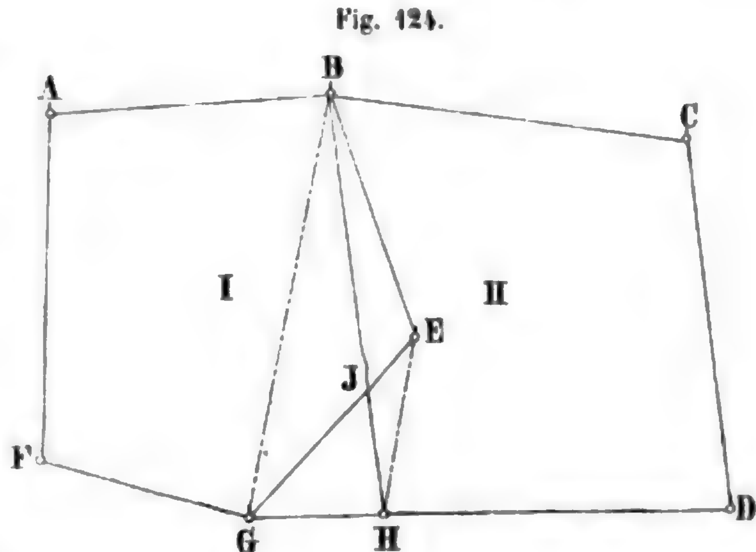
$$\delta\,(l_1\, b_1 + l_2\, b_2) = \Delta$$

sein. Hat man nun aus dieser Gleichung δ gefunden, so ziehe man in dem Abstande δ eine Parallele zu L′P′, womit der erste Theil abgeschnitten ist. Ebenso verfahre man mit dem zweiten Theile; der dritte ergibt sich dann von selbst.

§. 94. **Aufgabe. Zwei aneinander stossende Grundstücke von gleicher Bonität haben eine gebrochene Grenze; man soll dieselbe ohne Aenderung des Flächeninhalts in eine geradlinige verwandeln.**

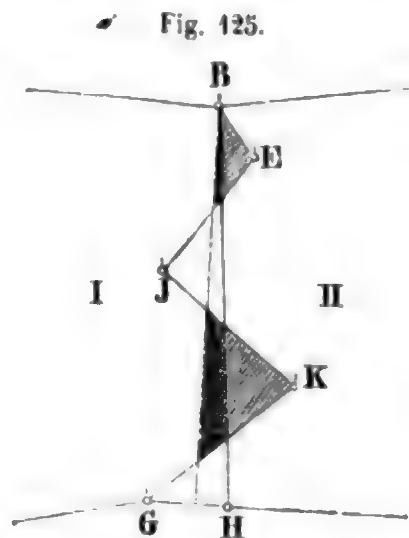
Es sei BEG (Fig. 124) die zu verbessernde Grenze, und es soll die neue durch B gehen. Denkt man sich zu BG durch die Ecke E die Parallele EH gezogen, so ist durch die Verbindungslinie BH die Aufgabe gelöst. Denn es ist Dreieck BGE, welches im Grundstücke I liegt, dem Dreiecke BGH, das den beiden Grundstücken angehört, gleich, weil beide gleiche Grundlinie und Höhe haben; kommt nun BGH statt BGE zu dem Grundstücke I, so bleibt dessen Flächeninhalt unverändert, während es die geradlinige Grenze BH erhält; und da zu II für das abgeschnittene Stück GJH das gleich grosse BJE hinzugefügt wird, so bleibt auch dessen Flächengrösse die frühere.

Fig. 124.



Ist die zu verbessernde Grenze wie in Fig. 125 mehrmals gebrochen, so kann man das vorhergehende Verfahren öfters nacheinander anwenden, indem man bei dem Punkte J beginnend erst JKG in eine geradlinige Grenze verwandelt, dann mit dieser neuen Grenze und dem Stück JE ebenso verfährt u. s. f. Rascher wird man jedoch in manchen Fällen zum Ziele kommen, wenn man erst eine provisorische Linie BH zieht und aus dem Kettenmasse oder der Zeichnung berechnet, ob die vom Grundstücke I abgeschnittenen (hier schraffirten) Flächengrössen den von II abgetrennten gleich sind oder nicht. Sind die ersteren zu gross, so rückt man die Theilungslinie BH etwas gegen II vor und vergleicht die neuen Abschnitte. Reicht diese Verlegung noch nicht aus, so wird eine weitere gewiss zum Ziele führen. Ist die neue Grenze ausgemittelt, so wird sie durch Marksteine oder einen Graben auf dem Felde bezeichnet.

Fig. 125.



Man kann hiernach leicht ermessen, wie zu verfahren ist, wenn die Grundstücke I und II verschiedene Bonitäten haben: es ist nämlich von jedem Grundstücke für das andere so viel an Werth abzuschneiden, als ihm von diesem durch die geradlinige Grenze zugelegt wird.

D. Messung eines ganzen Landes.

§. 95. Der Zweck einer Landesvermessung besteht entweder in der Herstellung von Plänen, aus denen sich die Grenzen und Flächen der einzelnen Grundstücke mit hinreichender Genauigkeit entnehmen lassen, oder in der Anfertigung von Karten, welche die Lage und Grösse der vorzüglichsten natürlichen und künstlichen Bildungen der Bodenfläche angeben. Wird der erstere Zweck verfolgt, so muss die Messung sehr in's Einzelne gehen und in einem grossen Massstabe (1 : 1000 bis 1 : 5000) vorgenommen werden; in dem anderen Falle aber genügt eine weniger detaillirte Aufnahme und ein kleinerer Massstab (1 : 20000 bis 1 : 100000).

Sehr ausführliche Landesvermessungen werden hauptsächlich in der Absicht gemacht, um sie als Basis für die Anlage der Grundsteuer oder der Steuercataster zu benützen; die hierfür angefertigten Pläne (Steuerblätter) dienen aber auch zu verschiedenen anderen staatswirthschaftlichen und technischen Zwecken. Dagegen sind die weniger ausführlichen topographischen Messungen vorzugsweise für militärische und geographische Zwecke geeignet. Hier ist nur von der Herstellung der Catasterpläne die Rede, da topographische Karten einerseits aus diesen Plänen construirt, andererseits aber nach denselben Principien wie Steuerblätter aufgenommen werden können.

Wenn es schon für die Aufnahme einer kleineren Fläche, z. B. eines Flurbezirks, nöthig ist, mehrere Hauptpunkte durch ein Vieleck festzulegen, um daran die Detailmessung zu knüpfen; so ist die Herstellung eines genauen Netzes von Linien, wodurch man eine grosse Anzahl gut bestimmter Punkte erhält, für eine Landesvermessung erste Bedingung. Dieses aus Dreiecken bestehende Netz liefert für sich die gegenseitige Lage aller ihm selbst angehörigen Punkte, und in Verbindung mit der Detailaufnahme auch die gegenseitige Lage aller Terrainpunkte. Dieses Resultat genügt aber noch nicht; man will vielmehr auch wissen, wie alle wichtigeren Punkte des Landes gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde gelegen sind, mit anderen Worten: man will die geographische Breite und Länge jedes Punkts kennen.

Die desshalb nöthig erscheinende Orientirung des Dreiecksnetzes erfordert, dass man die geographische Lage eines Punkts und einer Seite desselben genau kenne. Diese Daten liefern die Astronomen aus vieljährigen genauen Beobachtungen, wesshalb auch die Sternwarte des zu vermessenden oder eines angrenzenden Landes als astronomischer oder Orientirungspunkt und eine von diesem Punkte ausgehende und mehrere Meilen lange Dreieckseite als Orientirungslinie benützt wird. Diese Bestimmungen setzen wir hier als gegeben voraus und beschäftigen uns demnach nur mit den nachfolgenden technischen Arbeiten einer Landesvermessung, nämlich

1) mit der Feststellung der Basis des Dreiecksnetzes,
2) „ „ Auswahl und Bezeichnung der Dreieckspunkte,
3) „ „ Messung der Winkel aller Dreiecke,

4) mit der Berechnung der Dreiecke jeder Ordnung,
5) „ „ Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte,
6) „ „ Bestimmung der geographischen Lage der Netzpunkte,
7) „ „ Verbindung des Netzes und der Detailblätter,
8) „ „ Aufnahme der Einzelnheiten des Terrains.

1. Die Basis des Dreiecksnetzes.

§. 96. Da genaue Längenmessungen sehr mühsame und kostspielige Arbeiten sind, gute Winkelmessungen dagegen verhältnissmässig leicht ausgeführt werden können, so legt man dem Dreiecksnetze, womit das zu vermessende Land überzogen werden muss, nur eine einzige wirklich gemessene Linie zu Grunde, welche desshalb die Basis des Netzes genannt wird. Diese Linie ist eine Seite eines der grösseren Netzdreiecke oder eines Dreiecks erster Ordnung. Aus dieser Seite und den drei unmittelbar gemessenen Winkeln des ihr angehörigen Dreiecks findet man die beiden anderen Seiten desselben durch Rechnung; mit den nun bekannten neuen Seiten und den zugehörigen Winkeln kann man wieder zwei andere Dreiecke berechnen, hiermit abermals vier neue anstossende Dreiecke, und so kann man fortfahren, bis alle Dreiecke berechnet sind.

Da von der Genauigkeit der Basismessung die Genauigkeit des Dreiecksnetzes abhängt, so wird man für dieselbe ein ebenes und festes Terrain wählen, welches eine sichere Messung und das Anvisiren einiger Punkte des Hauptnetzes gestattet. Man wird dieselbe 1 bis 2 Meilen lang machen und an ihren Endpunkten durch massive Signale genau und dauerhaft bezeichnen.

Prof. Schwerd schlug zwar in seiner Schrift: „die kleine Speyerer Basis“ vor, nur kleine Grundlinien genau zu messen und dieselben durch Winkelmessungen zu vergrössern, und nachdem er selbst an der genannten Basis von 441 Toisen Länge einen erfolgreichen Versuch gemacht hatte, wandte auch Bessel eine kleine Grundlinie von 935 Toisen an und Baeyer gab seinen Basen ebenfalls blos 1100 bis 1400 Toisen Länge. Das Schwerd'sche Princip wird aber noch nicht überall anerkannt, und es will desshalb die Commission der neuen Karte von Spanien die vorliegende Frage dadurch entscheiden, dass sie ihre Basis in fünf kleine theilt und jene aus diesen ableitet. Das Ergebniss dieser Untersuchung ist noch nicht veröffentlicht, und die Bedenken gegen zu kleine Grundlinien sind daher noch immer berechtigt.

Nach der Bezeichnung der Endpunkte nimmt man die Messung der Basis mit genau abgeglichenen Messstangen nach dem in §. 40 auseinander gesetzten Verfahren vor und reducirt die gefundene Länge in der daselbst angegebenen Weise auf den Horizont.

Die so gefundene Basis B ist, die Erde als Kugel vorausgesetzt, ein Kreisbogen vom Halbmesser

$$R = r + \frac{1}{2}(f + f')$$

wobei r den Erdhalbmesser bis zum Meeresspiegel, f die Höhe des einen

und f' die Höhe des anderen Endpunkts der Basis über dem Meere oder überhaupt das Glied $\frac{1}{2}$ (f + f') die mittlere Meereshöhe der Grundlinie, die nicht ausschliesslich aus der Höhe der Endpunkte abgeleitet zu sein braucht, bezeichnet.

Schliesst man das Dreiecksnetz an die Basis B an, so liegt dasselbe auf einer Kugel von dem Halbmesser R. Hat man in einem Nachbar-Lande die Basis B' gemessen, welche einem Kugelhalbmesser R' angehört, und denkt man sich die von beiden Basen ausgehenden Dreiecksnetze an der Landesgrenze durch gemeinschaftliche Signale aneinander gefügt, so ist klar, dass bei aller Genauigkeit der Messung die sphärischen Dreieckseiten, welche den Schluss bilden, aus beiden Netzen verschieden erhalten werden, weil ihrer Berechnung aus dem Netze des einen Landes eine Kugel vom Halbmesser R und aus dem Netze des anderen Landes eine Kugel vom Halbmesser R' zu Grunde liegt. Jene Dreieckseiten werden jedoch in gleicher Grösse gefunden, wenn man die beiden Netze auf eine und dieselbe Kugel projicirt, wozu sich die Meeresfläche am besten eignet. Diese Projection ergibt sich, wenn man die bereits auf den Horizont reducirte Basis noch weiter auf den Meeresspiegel reducirt. Ist B die Basis auf der Kugel vom Halbmesser R und b die auf die Meeresfläche reducirte Basis, so hat man offenbar B : b = R : r und hieraus

$$b = \frac{r}{R} B = \frac{r}{r + h} B = \left(1 - \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2}\right) B$$

wobei $R = r + \frac{1}{2}(f + f') = r + h$ gesetzt ist.

Bedenkt man, dass der Werth des Bruchs h : r höchstens 0,00011 und somit dessen Quadrat 0,000000012 beträgt, so kann man

$$b = \left(1 - \frac{h}{r}\right) B = B - \frac{h}{r} B \tag{183}$$

setzen. Betrüge z. B. die Länge einer auf den Horizont reducirten Basis, welche in einer Höhe von 326,66 Toisen oder 1959,96 Pariser Fuss über dem Meere liegt, 5470,34 Toisen oder 32822,04 Pariser Fuss, so wäre (da der Halbmesser r = 3266608 Toisen) die Reduction

$$\beta = 0{,}0001 \,.\, 5470{,}34 = 0{,}547034 \text{ Toisen} = 3{,}2822 \text{ P. Fuss.}$$

Die Reduction der Basis auf die Meeresfläche wird hauptsächlich nur wegen der Vergleichung mit anderen Triangulationen vorgenommen; ob man diese Fläche selbst als Projectionsfläche des Netzes ansehen will, hängt von der Höhenlage des zu vermessenden Landes ab. Ist dieses tief gelegen, so kann man das Netz sofort auf die Meeresfläche projiciren; liegt das Land aber hoch, so wählt man eine bis zur mittleren Höhenlage desselben Landes reichende Kugelfläche als Projectionsfläche. In Württemberg z. B. lag die zwischen dem Schlosse Solitude und der Stadt Ludwigsburg gemessene Basis 1019 P. Fuss über dem Meere; da aber der mittleren Höhe des Landes nur etwa 840 P. Fuss oder 140 Toisen entsprechen, so hat man für die gesammte Landesvermessung eine Kugelfläche von dem Halbmesser r + h = 3266608 + 140 = 3266748 Toisen angenommen.

In Bayern wurden für die Landesvermessung drei Grundlinien gemessen: im Jahre 1801 die altbayerische zwischen München und Aufkirchen von Oberst Bonne, 1807 die fränkische zwischen Nürnberg und Bruck bei Erlangen von Professor Schiegg, und 1819 die rheinbayerische zwischen Speyer und Oggersheim von Steuerrath Lämmle. Die auf das Meer projicirten Grundlinien haben folgende Längen:

die altbayerische Basis ist = 21655,603 — 1,643 = 21653^{m},96
" fränkische " " = 13797,196 — 0,632 = 13796,56
" rheinbayerische " " = 19795,289 — 0,314 = 19794,97.

Näheres über diese Basismessungen findet man in dem vom Verfasser vor 7 Jahren begonnenen und vom topographischen Bureau des k. Generalstabs und der k. Steuercatastercommission fortgesetzten, zur Zeit (März 1873) aber noch nicht vollendeten Werke: „Die Bayerische Landesvermessung."

2. Die Wahl und Bezeichnung der Netzpunkte.

§. 97. Das Netz, womit ein zu vermessendes Land überzogen wird, besteht aus grossen, mittleren und kleinen Dreiecken, welche man der Reihe nach Dreiecke erster, zweiter und dritter Ordnung nennt. Kleinere Dreiecke als dritter Ordnung, deren man für die Detailmessung bedarf, und welche mit den grösseren Dreiecken in Verbindung stehen, gehören nicht mehr zum Dreiecksnetze.

Die Dreiecke erster Ordnung sollen nur eine geringe Anzahl sehr genau bestimmter, aber das ganze Land umfassender Punkte liefern, wesshalb sie Seiten bis zu 10 Meilen Länge haben können. Mit Ausnahme der Basis werden die kleinsten Seiten selten weniger als drei Meilen betragen, und wegen des Einflusses der unvermeidlichen Messungsfehler sucht man es zu vermeiden, dass eine kleinste und eine grösste Seite in einem und demselben Dreiecke zusammentreffen; denn jener Einfluss wird nach §. 64 am kleinsten, wenn die Dreiecke so viel als möglich gleichseitig sind. Für die Controle der Messung und Rechnung und auch für die Ausgleichung der zufälligen Fehler ist es sehr gut, wenn man die Dreiecke erster Ordnung so an die Basis anschliesst, dass das Netz auf mehrere Arten durchgerechnet werden kann.

Die Dreiecke zweiter Ordnung werden mit denen der ersten Ordnung verbunden, was entweder an Eckpunkten oder Seiten erster Ordnung geschieht. Für die Wahl dieser Dreiecke ist der Umstand massgebend, dass man von ihren Winkelscheiteln aus die bemerkenswerthesten Punkte, welche sie einschliessen, sehen soll. Da man diese im Flachlande leichter auf grosse Entfernungen hin übersehen kann, als in durchschnittenem Terrain, so ist klar, dass in diesem die Dreiecke zweiter Ordnung kleiner sein werden als in jenem; und da manchmal auch ein Dreieck erster Ordnung alle Hauptpunkte seiner Fläche zu übersehen gestattet, so leuchtet ein, dass an ein solches Dreieck keines zweiter Ordnung angeknüpft zu werden braucht.

Die Dreiecke dritter Ordnung schliessen sich an jene der zweiten Ordnung so an, dass jedes der ersteren eine Seite und als dritten Eckpunkt einen hervorragenden Gegenstand der Fläche eines Dreiecks zweiter Ordnung enthält. Als solche dritte Winkelpunkte dienen natürliche Signale, wie Kirchthurmspitzen, hohe Schornsteine, einzelnstehende Bäume u. dgl. Da auf denselben die Winkel der Dreiecke nicht gemessen werden können, so ist es nöthig, sie so zu wählen, dass sie von wenigstens drei Punkten erster und zweiter Ordnung gesehen und anvisirt werden können.

Die Signale zur Bezeichnung der Netzpunkte sind entweder künstliche oder natürliche. Für die Dreiecke erster Ordnung eignen sich nur solche Signale, welche eine sichere Winkelmessung gestatten, also Steinpfeiler oder Pyramiden, wie sie in Bd. I, §§. 93 und 95 beschrieben sind. Findet sich eine hochgelegene Ruine vor, welche einen würfelförmigen Stein mit Metallcylinder, der den Punkt bezeichnet, zu befestigen gestattet, so kann man auch diese als Grundbau für ein Signal erster Ordnung benützen. Sind diese Signale sehr weit entfernt, so macht man sie durch Heliotropenlicht leicht sichtbar. Für Punkte zweiter Ordnung genügt ein in dem Boden befestigter Steinwürfel, auf dessen Oberfläche der Punkt durch einen Kreuzschnitt bezeichnet ist und über dem sich ein Gerüstsignal erhebt, welches einen entsprechenden Visirbalken enthält (Bd. I, §§. 94 u. 95). Von den Dreieckspunkten dritter Ordnung sind immer zwei zugleich Punkte zweiter oder erster Ordnung, während der dritte fast immer ein natürliches Signal ist; muss man aber einen solchen dritten Punkt durch ein künstliches Signal bezeichnen, so kann man dazu einen der auf Seite 133 beschriebenen Holzpfeiler wählen.

Die Netzpunkte werden mit den Namen der Stellen, auf welchen sie sich befinden, z. B. Wendelstein, Peissenberg, Kornbühl, Waldburg, Stauffen, bezeichnet, und es muss ernste Sorge dafür getragen werden, dass man die Axen der Signale wieder auffinden kann, wenn letztere zerstört worden sein sollten. Dieses geschieht am besten durch vier Steinprismen, welche man in die Ecken eines Vierecks stellt, dessen Diagonalen sich in der Signalaxe schneiden. Diese Versicherungssteine werden gut fundirt und so tief versetzt, dass sie kaum über dem Boden hervorragen. Auf seiner Oberfläche trägt jeder Stein ein eingehauenes Kreuz, welches einen Eckpunkt des Vierecks bezeichnet. Die Lage dieser Steine wird in Bezug auf bekannte Objecte eingemessen und in den Acten über die Triangulation vorgemerkt.

3. Die Messung und Ausgleichung der Winkel.

§. 98. Die Messung der Winkel des trigonometrischen Netzes geschieht mit den besten Theodolithen, deren Kreise 20 bis 30cm Durchmesser haben. Bei Dreieckspunkten erster Ordnung werden die Instrumente auf steinerne Pfeiler gestellt; bei Punkten zweiter Ordnung ruhen sie auf einem der hierfür bestimmten Signale oder auf einem der im I. Bande beschriebenen dreibeinigen Stative, welche zur Sicherheit auf drei in den Boden gerammte Pfähle gestellt

und mit Gewichten beschwert werden. Ob die Winkel durch Repetition gemessen werden sollen oder nicht, hängt von der Anordnung des technischen Leiters der ganzen Vermessung ab; bedeutende Astronomen und Geodäten verwerfen die Repetition und verlangen statt derselben folgendes Verfahren.

Nachdem nämlich der Theodolith centrisch und horizontal aufgestellt ist, wird bei feststehendem Horizontalkreise das Fernrohr nach und nach auf alle einzuschneidenden Dreieckspunkte eingestellt und jeder Nonius oder jedes Mikroskop des Alhidadenkreises abgelesen. Ist eine solche Reihe von Einstellungen und Ablesungen, welche ein Gyrus genannt wird, zu Ende, so dreht man den Horizontalkreis um einen beliebigen Winkel von etwa 20^0 oder 30^0 und schlägt das Fernrohr durch. Hierauf stellt man den Horizontalkreis fest, richtet das Fernrohr wieder auf alle vorher anvisirten Signale, jedoch in umgekehrter Ordnung und liest die Nonien oder Mikroskope ab. Dieser Gyrus correspondirt dem vorausgegangenen. Auf ihn folgt wieder eine Drehung des Horizontalkreises, das Durchschlagen des Fernrohrs, dessen Einstellung in der ersten Richtung und Ablesen der Nonien oder Mikroskope. Zu diesem dritten Gyrus wird der correspondirende vierte gemacht, und so fährt man fort, bis ein Punkt erster Ordnung etwa 60mal, ein Punkt zweiter Ordnung 20mal und ein Punkt dritter Ordnung 8mal gut beobachtet worden ist. Da man von den Punkten eines Dreiecks zweiter Ordnung alle Punkte dritter Ordnung, welche auf der Fläche jenes Dreiecks liegen, sehen kann, so schneidet man die Punkte dritter Ordnung sofort mit denen der zweiten Ordnung ein. Sollten sich jedoch dadurch die anzuvisirenden Punkte sehr häufen, so ist es gut, sie zu theilen und nur etwa 15 Punkte in einen Gyrus aufzunehmen. Bei jedem Gyrus soll man das Fernrohr wieder genau auf den Ausgangspunkt einstellen und, wenn sich hierbei eine Differenz in der Ablesung von mehr als 5 Secunden zeigen sollte, den ganzen Gyrus verwerfen.

Alle Beobachtungen sind sofort deutlich in ein Tagebuch einzutragen und zwar mit Tinte. Sollte etwas fehlerhaft geschrieben worden sein, so ist die Verbesserung so anzubringen, dass man die verbesserte Stelle noch lesen kann. Bei der thüringischen Landesvermessung sind nach der Anordnung Hansen's die Blätter der Beobachtungsbücher mit folgendem Schema bedruckt, das wir zur Erläuterung theilweise ausgefüllt haben.

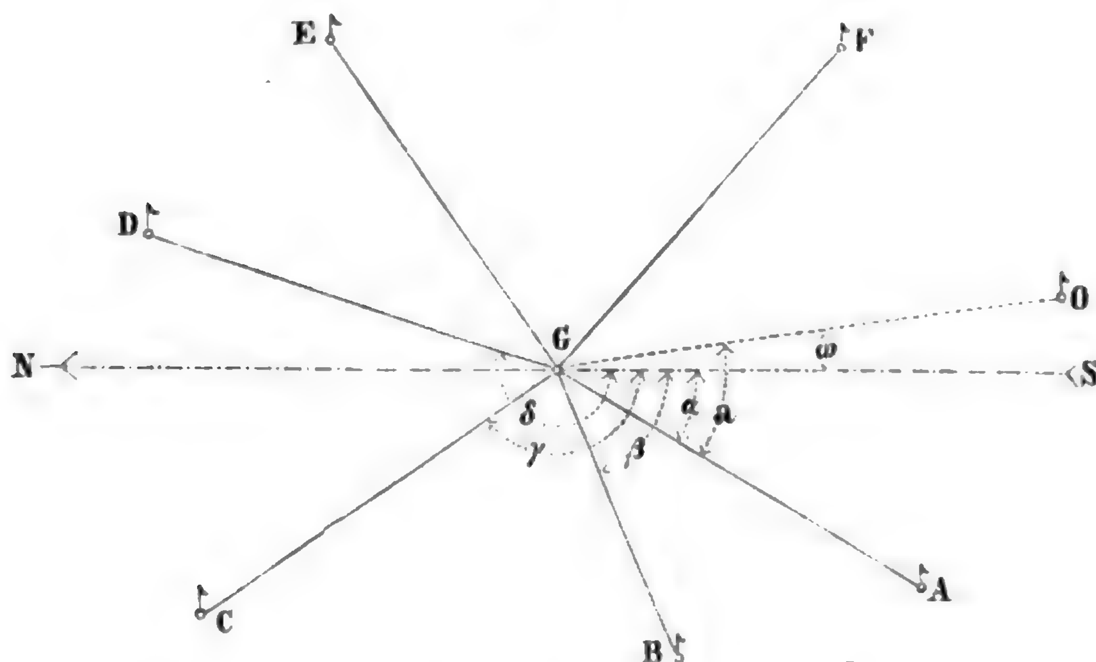
Station: Felsberg. Beobachter: Müller. Instrument: Theodolith Nr. 2.
Instrumenten-Centrum: 20,'23. Lage des Fernrohrs: erste. Gyrus Nr. 9.

Des Gegenstands		Ablesung.				Mittel.	Richtungs-winkel.	Bemer-kungen.
Nr.	Name.	Nonius I.	II.	III.	IV.			
VII.	Staufen	57⁰ 18′ 20″,0	25″,2	18″	22″,0	57⁰ 18′ 21″,3	36⁰ 42′ 54″,0	Luft klar und ruhig.
X.	Brennbühl	121⁰ 53′ 47″,0	50″,0	45″	51″,6	121⁰ 53′ 48″,4	101⁰ 18′ 21″,1	Luft klar aber bewegt.

Unter **Richtungswinkeln** versteht man die Azimuth- oder Horizontalwinkel, welche die Dreieckseiten des Netzes mit der Mittagslinie bilden. Man zählt diese Winkel in der Regel von dem Südpunkte der genannten Linie an über Westen durch den ganzen Horizont bis zu 360°. Soll nun aus dem Mittel der Ablesungen, welches für den Nonius I berechnet und eingetragen ist, der Richtungswinkel einer Seite gefunden werden, so geschieht dieses am einfachsten durch Addition oder Subtraction eines dem Gyrus angehörigen constanten Winkels in folgender Weise.

Sind A, B, C, D, E (Fig. 126) die von G aus eingeschnittenen Punkte und bezeichnen a, b, c, d, e die für diese Punkte geltenden Mittel der Ablesungen; weiss man ferner, dass das Azimuth der Seite G A oder der Horizontalwinkel S G A $= \alpha$ ist, so wird die Ablesung a auf α gebracht werden, wenn man von ihr den constanten Winkel $\omega = a - \alpha$ abzieht. (In

Fig. 126.



dem vorstehenden Schema ist $\alpha = 36^0\ 42'\ 54''$, $a = 57^0\ 18'\ 21'', 3$ und $\omega = 20^0\ 35'\ 27'', 3$.) Durch Subtraction des Winkels ω von dem Mittel b liefert dieses dann aber auch die Richtungswinkel S G B, sowie $c - \omega = S\,G\,C$, $d - \omega = S\,G\,D$ und $e - \omega = S\,G\,E$ ist.

Das Azimuth α der Seite G A ist bei der Winkelmessung noch nicht genau bekannt, aber es lässt sich doch annähernd bestimmen, indem man durch Beobachtung der Sonne oder auf eine andere später anzugebende Weise die Richtung der Mittagslinie aufsucht. Kennt man α näherungsweise, so folgt daraus mit demselben Grade der Genauigkeit auch der Winkel ω. Werden die Messungen auf einem und demselben Standpunkte später wiederholt und hat man unterdessen das Azimuth der Seite G A genauer kennen gelernt, so behält man doch den ersten Werth von α bei, weil diese erste Bestimmung der Richtungswinkel lediglich den Zweck hat, die Messungsresultate der verschiedenen Gyren mit einander zu vergleichen.

Bei der definitiven Berechnung des Netzes werden die früher gefundenen Richtungswinkel selbstverständlich verbessert.

Kommt es vor, dass sich bei der Winkelmessung der Theodolith nicht centrisch aufstellen lässt, so müssen die gemessenen Winkel nach §. 44 centrirt, d. h. um die in den Formeln (94) und (95) bestimmte Grösse δ verbessert werden. Um aber die Centrirung δ berechnen zu können, muss man die horizontale Entfernung e der Alhidadenaxe von der Axe des Stationspunkts wissen, wesshalb die Grösse e zu messen und neben der Bezeichnung „Instrumentencentrum" in das Beobachtungsjournal einzuschreiben ist. Ausserdem hat man auch den Stationspunkt anzuvisiren und in den Gyrus aufzunehmen. Ist dieser Punkt so nahe gelegen, dass man die Ocularröhre nicht weit genug ausziehen kann, um ihn zu sehen, so ist es nöthig, auf dem Theodolithenfernrohre ein Diopter anzubringen, wie dergleichen auf den Fernrohren der Kippregel und des Reichenbach'schen Distanzmessers (Fig. 156 und 246 im ersten Bande) zu sehen sind. Die Visirlinie dieses Diopters soll mit der des Fernrohrs in einer zum Horizontalkreise senkrechten Ebene liegen. Will man die hierfür nothwendige Prüfung und Berichtigung nicht vornehmen, so genügt es, auf einen entfernteren, jedoch mit dem Diopter noch gut anzuvisirenden Gegenstand nach einander das Diopter und das Fernrohr einzustellen, jedesmal die Nonien des Horizotalkreises abzulesen und hierdurch den Winkel zu bestimmen, um welchen die zur Einstellung des Diopters auf den Stationspunkt gehörige Ablesung verbessert werden muss. Wenn diese Einstellung auch nicht so scharf als die des Fernrohrs auf die entfernteren Punkte ist, so hat dieses wegen des geringen Werths der Excentricität e keine nachtheiligen Folgen. Bei grösseren Werthen von e gebraucht man das Diopter ohnehin nicht.

§. 99. **Genauigkeit der Winkelmessung.** Darf man ein vorzüglich gearbeitetes und berichtigtes Instrument voraussetzen, so kommen bei einer Richtungsbeobachtung nur zwei von einander unabhängige Fehler, nämlich der des Einstellens des Fernrohrs auf das Signal (μ_1) und der des Ablesens mit Einschluss der Theilungsfehler (μ_2) in Betracht. Es wird demnach der mittlere Fehler einer Richtungsbeobachtung

$$\mu = \pm \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \tag{184}$$

und, da ein Winkel der Unterschied zweier Richtungswinkel ist, der mittlere Fehler einer Winkelbeobachtung

$$m = \sqrt{\mu^2 + \mu^2} = \mu \sqrt{2} \tag{185}$$

Werden zwischen 3 Signalen 1, 2, 3 die Winkel 1.2 und 1.3 gemessen, so hat jeder den mittleren Fehler $m = \mu\sqrt{2}$, und da sich der Winkel 2.3 aus der Differenz der Winkel 1.3 und 1.2 ergibt, so ist dessen mittlerer Fehler

$$m' = \sqrt{m^2 + m^2} = 2\mu. \tag{186}$$

Hätte man die Signale 1, 2, 3 zuerst in dieser Folge und hierauf mit durchgeschlagenem Fernrohre in umgekehrter Reihenfolge 3, 2, 1 beobachtet,

so würde jedem aus dieser „Satzbeobachtung" hervorgehenden Winkel nur ein mittlerer Fehler $m = \mu \sqrt{2}$ ankleben, während bei gesonderter Winkelmessung die Winkel 1.2 und 1.3 zwar auch nur diesen Fehler haben, jener des dritten Winkels 2.3 aber 2μ beträgt. Erwägt man noch, dass diese gesonderte Messung für das Signal 1 eine doppelte Einstellungszahl erfordert, so dass bei ihr eigentlich 4 Richtungsbeobachtungen zu machen sind, während die Satzbeobachtung deren nur 3 fordert, so ergibt sich ohne Weiteres der Schluss, dass im Allgemeinen Satzbeobachtungen den gesonderten Winkelmessungen vorzuziehen sind.

Wird ein einziger Winkel 1.2 mit einem Theodolithen n mal gesondert gemessen, so wird der mittlere Fehler m'' dieses Winkels im Verhältniss von $\sqrt{n}$ kleiner sein als m, daher

$$m'' = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}(\mu_1^2 + \mu_2^2)}. \qquad (187)$$

Misst man dagegen denselben Winkel durch n malige Repetition, so ist der Theorie nach auch von μ_2^2 nur der n te Theil zu nehmen und somit der mittlere Fehler m''' des n mal repetirten Winkels:

$$m''' = \sqrt{\frac{2}{n}\left(\mu_1^2 + \frac{\mu_2^2}{n}\right)}. \qquad (188)$$

Für einen Reichenbach'schen Theodolithen, der einen Limbus von 12'',5 Durchmesser und ein Fernrohr von 16'',25 Brennweite, 15''' Oeffnung und 60maliger Vergrösserung hatte, fand Struve[1]

$$\mu_1 = 1'',290 \text{ und } \mu_2 = 1'',401$$

während Bessel[2] für einen Theodolithen von Pistor mit einem Limbus von 12'' Durchmesser und einem Fernrohre von 16'' Brennweite, 16''' Oeffnung und 27maliger Vergrösserung

$$\mu_1 = 0'',837 \text{ und } \mu_2 = 1'',872$$

erhielt. Die Mittel aus diesen Werthen würden $\mu_1 = 1'',063$ und $\mu_2 = 1'',636$ sein; setzt man aber voraus, dass stets an 2 Nonien oder Mikroskopen abgelesen wird, so darf der mittlere Ablesefehler μ_2 durch $\sqrt{2}$ dividirt und daher

$$\mu_1 = 1'',063 \text{ und } \mu_2 = 1'',157$$

gesetzt werden. Mit diesen Werthen hat Prof. Jordan[3] folgende Werthe berechnet:

n =	1	5	10	20	100
m'' =	2,22	0,99	0,70	0,50	0,22
m''' =	2,22	0,75	0,50	0,39	0,15

und daraus die Ueberlegenheit der Repetition gefolgert, jedoch auch die richtige Bemerkung beigefügt, dass diese theoretische Genauigkeit in der

[1] Vergl. Astronomische Nachrichten vom Jahre 1824, Bd. 2, Nr. 47.
[2] Vergl. Astronomische Nachrichten vom Jahre 1834, Bd. 11, Nr. 256 und Gradmessung in Ostpreussen, S. 73.
[3] Vergl. Jordan's Taschenbuch der practischen Geometrie, S. 107.

Praxis nicht eintritt, weil die absolut feste Verbindung des Limbus eines Repetitionstheodolithen mit dem Dreifusse, welche hier vorausgesetzt ist, in Wirklichkeit nicht stattfindet. Dass in der That eine kleine Verschiebung dieser Theile bei der Repetition vorkommt, geht daraus hervor, dass man die Winkel bei der Messung von links nach rechts (Drehung mit der Theilung) etwas grösser findet als bei der Messung von rechts nach links (Drehung gegen die Theilung). Da aber diese Differenz nur 2 bis 3 Secunden bei zwei verschieden angeordneten Messungen beträgt, was für den einzelnen Winkel 1 bis 1.5 Secunden ausmacht, so ist die Repetitionsmethode noch immer ein vorzügliches Mittel, Winkel „auf die stehende Secunde" genau zu messen, und da der Zeitgewinn beim Repetiren nicht unterschätzt werden darf, so fragt es sich sehr, ob dieses Verfahren in Zukunft, wie Viele glauben, von der wiederholten einfachen Winkelmessung ganz verdrängt werden wird. Nach einer Zusammenstellung von Professor Jordan in dessen Taschenbuch der Geometrie (S. 318) hat sich bei verschiedenen Triangulirungen der mittlere Fehler m eines durch die Messung und Ausgleichung auf einer Station gewonnenen Winkels zwischen 0″,42 und 2″,74 und im Mittel aus 15 Werthen zu 1″,17 ergeben. Wenn man hierbei erwägt, dass Gauss und Schwerd ihre Winkel mit Repetitionstheodolithen bis auf 0″,42 und 0″,69 genau erhalten haben, so liegt hier eine Leistung dieser Instrumente vor, welche letztere nicht so geringschätzig zu behandeln gestattet, wie es oft geschieht.

§. 100. **Horizontabschluss.** Die auf einer Station gemessenen Winkel sollen zusammen 360° betragen; da dieses aber in der Regel nicht zutrifft, so muss eine vorläufige Ausgleichung der Winkel auf die genannte Summe stattfinden, und dieses Geschäft nennt man den Horizontabschluss. Freilich erleiden die so verbesserten Winkel später noch eine kleine Veränderung in Folge der Ausgleichung des Dreiecksnetzes, indem die um einen Punkt herum liegenden Winkel nicht bloss der einen Bedingung, dass ihre Summe = 360° sei, sondern auch der anderen zu genügen haben, dass sie mit den ihnen zunächst gegenüberliegenden Seiten Dreiecke bilden, deren Winkelsumme 180° plus dem sphärischen Excess beträgt. Auf diese spätere Aenderung ist jedoch hier noch keine Rücksicht zu nehmen.

Bei dem Geschäfte des Horizontabschlusses kommt die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen (§§. 16 bis 19) zur Anwendung, und wir benützen zu dessen practischen Erläuterung das Zahlenbeispiel, welches Gerling in seinen „Ausgleichungsrechnungen der practischen Geometrie" S. 157 u. ff. mitgetheilt hat.

Die von der Station aus anvisirten 4 Signale sollen von links nach rechts mit 1, 2, 3, 4 und die gemessenen 6 Winkel mit 1.2, 1.3, 1.4, 2.3, 2.4, 3.4 bezeichnet werden. Dieser Bezeichnung wird in runder Klammer die Zahl der Repetitionen beigefügt, aus welcher der Winkel hervorgegangen ist. Die durch Beobachtung gefundenen Werthe mögen der Reihe nach O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 heissen, so dass

$$
\begin{aligned}
o_1 &= 1.2\,(30) = 48^0\,17'\ \ 1'',4\\
o_2 &= 1.3\,(20) = 96\ \ 52\ \ 16,8\\
o_3 &= 1.4\,(26) = 152\ \ 54\ \ \ 6,8\\
o_4 &= 2.3\,(25) = 48\ \ 35\ \ 14,3\\
o_5 &= 2.4\,(28) = 104\ \ 37\ \ \ 7,8\\
o_6 &= 3.4\,(44) = 56\ \ \ 1\ \ 48,9
\end{aligned}
\tag{189}
$$

ist. Heissen die aus den Richtungsbeobachtungen 4.1, 4.2, 4.3 erhaltenen 3 Winkel beziehlich a, b, c, so berechnen sich hieraus die Winkel u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 wie folgt:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 1.2\,(30) = +a\\
u_2 &= 1.3\,(20) = \qquad +b\\
u_3 &= 1.4\,(26) = \qquad\qquad +c\\
u_4 &= 2.3\,(25) = -a + b\\
u_5 &= 2.4\,(28) = -a \qquad + c\\
u_6 &= 3.4\,(44) = \qquad -b + c.
\end{aligned}
\tag{190}
$$

Es sind somit die Fehler v zwischen den berechneten Winkeln (u) und den beobachteten (o):

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1 - o_1 = +a \qquad\qquad - 48^0\,17'\ \ 1'',4\\
v_2 &= u_2 - o_2 = \qquad +b \qquad - 96\ \ 52\ \ 16,8\\
v_3 &= u_3 - o_3 = \qquad\qquad +c - 152\ \ 54\ \ \ 6,8\\
v_4 &= u_4 - o_4 = -a + b \qquad - 48\ \ 35\ \ 14,3\\
v_5 &= u_5 - o_5 = -a \qquad +c - 104\ \ 37\ \ \ 7,8\\
v_6 &= u_6 - o_6 = \qquad -b + c - 56\ \ \ 1\ \ 48,9
\end{aligned}
\tag{191}
$$

und wenn man vorläufig

$$
\begin{aligned}
a &= 48^0\,17'\,1'' + da\\
b &= 96\ \ 52\ \ 17 + db\\
c &= 152\ \ 54\ \ \ 7 + dc
\end{aligned}
$$

setzt, die Bedingungsgleichungen für das Minimum der Function [vv]

$$
\begin{aligned}
0 &= -\ 0'',4 + da\\
0 &= +\ 0,2 \qquad + db\\
0 &= +\ 0,2 \qquad\qquad + dc\\
0 &= +\ 1,7 - da + db\\
0 &= -\ 1,8 - da \qquad + dc\\
0 &= +\ 1,1 \qquad - db + dc.
\end{aligned}
$$

Um die Verbesserungen da, db, dc, welche den Constanten a, b, c der Normalgleichungen (27) und (32) auf Seite 20 und 23 entsprechen, zu finden, hat man erst die Summen [xx], [xy], [xz] u. s. w. zu bilden und daraus [pxx], [pxy], [pxz] u. s. w. abzuleiten. Nun sind aber die Coefficienten x, y, z nur entweder + 1 oder — 1 oder 0, daher auch die Producte xx, xy, xz.... nur = 1 oder = 0, wie aus dem Gleichungssystem (190) hervorgeht. Es wird nämlich

$x_1 = +1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$	$x_4 = -1$	$x_5 = -1$	$x_6 = 0$
$y_1 = 0$	$y_2 = +1$	$y_3 = 0$	$y_4 = +1$	$y_5 = 0$	$y_6 = -1$
$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = +1$	$z_4 = 0$	$z_5 = +1$	$z_6 = +1$

Die Grössen $o_1, o_2, o_3 \ldots$ in den Normalgleichungen (27) und (32) sind die genäherten Werthe von $v_1, v_2, v_3 \ldots$ in dem Gleichungssystem (191), und daher ist $o_1 = -0'',4$, $o_2 = +0'',2$, $o_3 = +0'',2$, $o_4 = +1'',7$, $o_5 = -1'',8$, $o_6 = +1'',1$. Die in dem vorliegenden Falle gegebenen Gewichte p haben folgende Werthe:

$$p_1 = 30 \quad p_2 = 20 \quad p_3 = 26 \quad p_4 = 25 \quad p_5 = 28 \quad p_6 = 44.$$

Es kann demnach nicht schwer sein, die für die Normalgleichungen erforderlichen Producte und Summen zu bilden; so ist z. B.

$$[xx] = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 = + 3$$
$$[pxx] = 30 + 0 + 0 + 25 + 28 + 0 = + 83$$
$$[pxo] = - 12,0 + 0 + 0 - 42,5 + 50,4 + 0 = - 4,1$$

u. s. w. f. Daher die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} +83\,da - 25\,db - 28\,dc &= +4,1 \\ -25\,da + 89\,db - 44\,dc &= +1,9 \\ -28\,da - 44\,db + 98\,dc &= -3,2 \end{aligned} \quad . \qquad (192)$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man die Unbekannten wie folgt:

$$da = +0'',06 \qquad db = +0'',04 \qquad dc = 0'',00$$
$$a = 48^0\,17'\,1'',06 \qquad b = 96^0\,52'\,17'',04 \qquad c = 152^0\,54'\,7'',00.$$

$v_1 = -0'',34$; $v_2 = +0'',24$; $v_3 = +0'',20$; $v_4 = +1'',68$; $v_5 = -1'',86$; $v_6 = + 1'',06$. $[pvv] = 3,468 + 1,152 + 1,040 + 70,562 + 96,868 + 49,439 = 222,529$

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{P-k}} = \sqrt{\frac{222,529}{6-3}} = \sqrt{74,1763} = \pm 8'',61.$$

Der mittlere Fehler eines einmal gemessenen Winkels würde somit $\pm 8'',61$ und der eines 25mal gemessenen $\pm 8'',61 : \sqrt{25} = \pm 1'',72$ betragen.

4. Die Berechnung der Dreieckseiten.

§. 101. Die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecks erster Ordnung, welches immer als ein sphärisches (eigentlich sphäroidisches) zu betrachten ist, setzt die Länge der Dreieckseiten als bekannt voraus, weil in dem Ausdrucke für den sphärischen Excess eines Dreiecks zwei Seiten desselben vorkommen; nicht minder ist diese Kenntniss für die Centrirung jener Winkel nöthig, welche nicht im Scheitel gemessen werden konnten; Hauptzweck der Seitenberechnung aber ist die Bestimmung der gegenseitigen und geographischen Lage der Netzpunkte. Für die ersteren beiden Zwecke genügt eine annähernde (provisorische), für den letzteren aber nur eine genaue (definitive) Berechnung. Bei der provisorischen Berechnung der Dreieckseiten zum Behufe der Winkelausgleichung und Centrirung der Winkel setzt man in die entsprechenden trigonometrischen Formeln die Dreieckswinkel so ein, wie sie aus der Messung hervorgingen, also noch mit den zufälligen Fehlern behaftet; bei der definitiven Seitenberechnung werden nur die verbesserten Winkel angewendet.

Geht man bei der Berechnung der Dreiecke erster Ordnung, wie es sein muss, von der unmittelbar gemessenen Basis aus, so sind in dem ersten

Dreiecke die auf das Niveau der Messung reducirte sphärische Basis und alle drei auf $180^0 + \varepsilon$ ausgeglichenen Winkel gegeben, wobei ε den sphärischen Excess bezeichnet. Man könnte somit die zwei anderen sphärischen Seiten des ersten Dreiecks entweder nach dem bekannten Satze über die Proportionalität der Sinuse der Seiten und Gegenwinkel, oder auch aus der ebenfalls sehr bekannten Relation zwischen einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln berechnen. Diese Formeln wendet man jedoch in der Regel nicht an, weil es zu umständlich und mit gewöhnlichen Logarithmentafeln unausführbar wäre, die Winkel bis auf Tausendel-Secunden genau zu berechnen, wie es doch geschehen müsste, wenn man die Seitenlängen bis auf einige Centimeter genau finden wollte; denn da einem Centriwinkel von 1″ ein Erdbogen von $31^m,2$ entspricht, so trifft auf $0'',001$ ein Bogen von 3 Centimeter. Statt der Formeln der sphärischen Trigonometrie bedient man sich gewöhnlich des nachfolgenden Lehrsatzes von Legendre, welcher es möglich macht, die geodätischen Dreiecke wie ebene zu berechnen. Man könnte auch ein von Delambre angegebenes Verfahren anwenden, wonach jede Bogenseite auf ihre Sehne und jeder sphärische Winkel auf den Sehnenwinkel reducirt wird; allein dieses Verfahren ist umständlicher als das von Legendre, wesshalb es in der Praxis nicht angewendet wird.

Die sphärische Berechnung der Dreieckseiten kann mit Hilfe besonderer Tafeln, welche aber nur für ein mässig grosses Land gelten, sehr erleichtert werden. So wurden die Seiten der Hauptdreiecksnetze von Bayern und Württemberg nach einem von Soldner angegebenen Verfahren sphärisch berechnet. Dieses Verfahren, welches bei gleicher Genauigkeit nicht mehr Zeit erfordert als das von Legendre, besteht im Wesentlichen darin, dass man mit Hilfe einer für das zu vermessende Land eigens berechneten Tafel aus dem Logarithmus des Sinus den Logarithmus des Bogens in einer gegebenen Längeneinheit (z. B. Ruthen) ausdrückt. Bezeichnet nämlich m diejenige Zahl, womit der Sinus eines Bogens φ multiplicirt werden muss, um den Bogen selbst zu geben, so gilt die Relation $m \sin \varphi = \varphi$ oder $\log m = \log \varphi - \log \sin \varphi$. Drückt man $\log \varphi$ durch eine nach Potenzen von $\sin \varphi$ fortschreitende Reihe aus, so lässt sich m aus φ berechnen und man hat schliesslich mit Rücksicht darauf, dass man die Bögen für einen gegebenen Halbmesser r sucht: $\log \varphi = \log \sin \varphi + \log m + \log r = \log \sin \varphi + \log n$, wenn man $\log m + \log r = \log n$ setzt. Dieser $\log n$ wird aus der erwähnten Hilfstafel (der Additamententafel) mit dem Argumente $\log \sin \varphi$ gefunden.

§. 102. Lehrsatz. **Ein geodätisches Dreieck darf wie ein ebenes behandelt werden, wenn man jeden seiner Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.**

Der nachfolgende Beweis rührt von Gauss her und ist in Crelle's Journal der Mathematik, Bd. 22, S. 96 enthalten.

Bezeichnet man den ganzen sphärischen Excess eines Kugeldreiecks mit $3\,\omega$, die Winkel dieses Dreiecks mit $A + \omega$, $B + \omega$, $C + \omega$ und die gegen-

überliegenden Seiten beziehlich mit a, b, c, so erhalten zwei bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende Gestalt:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \tfrac{3}{2}\omega \sin (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin (B - \tfrac{1}{2}\omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}.$$

Aus der Verbindung dieser Formeln durch Potenzirung und Division folgt:

$$\frac{\sin^6 \tfrac{1}{2} a}{\cos^2 \tfrac{1}{2} a} = \frac{\sin^3 (\tfrac{3}{2}\omega) \sin^3 (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^2 (B + \omega) \sin (B - \tfrac{1}{2}\omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}$$

$$\frac{\sin^6 \tfrac{1}{2} b}{\cos^2 \tfrac{1}{2} b} = \frac{\sin^3 (\tfrac{3}{2}\omega) \sin^3 (B - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^2 (A + \omega) \sin (A - \tfrac{1}{2}\omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Dividirt man diese Gleichungen in einander und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$\frac{\sin^3 (\tfrac{1}{2} a) \cos (\tfrac{1}{2} b)}{\cos \tfrac{1}{2} a \sin^3 (\tfrac{1}{2} b)} = \frac{\sin (A + \omega) \sin^2 (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin^2 (B - \tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Macht man die linke Seite dieser Gleichung durch Division gleich 1 und multiplicirt beide Seiten mit dem Cubus des Verhältnisses von a sin B : b sin A, so erhält man

$$\left(\frac{a \sin B}{b \sin A}\right)^3 = \frac{a^3 \cos \tfrac{1}{2} a \sin^3 (\tfrac{1}{2} b)}{b^3 \sin^3 (\tfrac{1}{2} a) \cos \tfrac{1}{2} b} \times$$

$$\frac{\sin (A + \omega) \sin^2 (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^3 A} \times \frac{\sin^3 B}{\sin (B + \omega) \sin^2 (B - \tfrac{1}{2}\omega)}$$

und somit, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung $= D$ setzt,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[3]{D}. \qquad (193)$$

Diese Formel ist streng richtig und gilt für jedes sphärische Dreieck; geht man aber auf ein geodätisches Dreieck über, dessen Seiten im Vergleich zum Erdhalbmesser sehr klein sind (indem sie in der Regel kaum den tausendsten Theil desselben betragen), so wird jeder der drei Factoren, aus denen der Ausdruck für D besteht, so nahe der Einheit gleich, dass die Abweichungen hiervon nur noch Grössen vierter Ordnung sind, wenn die Dreieckseiten a, b, c als Grössen erster Ordnung angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung wird also

$$\sqrt[3]{D} = 1$$

und daher auch für das geodätische Dreieck:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}. \qquad (194)$$

Nennt man die sphärischen Winkel des geodätischen Dreiecks A′, B′, C′ und setzt man $3\omega = \varepsilon$, so ist

$$A = A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad B = B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad C = C' - \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

und daher nach der letzteren Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin (A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon)}{\sin (B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon)} \qquad (195)$$

d. h. es gilt für ein solches Dreieck der Satz von der Proportionalität der Seiten und Sinuse der Gegenwinkel, welcher für ebene Dreiecke bekannt ist, wenn man nur jeden sphärischen Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.

Um den Grad der Genauigkeit vorstehender Formel in einem bestimmten Falle zu übersehen, nehmen wir an, in einem geodätischen Dreiecke A′ B′ C′ sei $C' = 90^0$ und $a = b = 1^0 = 15$ Meilen. Berechnet man die Winkel A′ und B′ nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie, so wird

$$A' = B' = 45^0\, 0'\, 15'',708$$

und bestimmt man die Seite c aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \operatorname{tg} a \cos B'$, so ist

$$c = 1^0\, 24'\, 51'',0396.$$

Der sphärische Excess ε des Dreiecks A′ B′ C′ beträgt nach der Formel (127) 31″,416, und hiermit wird

$$A = A' - {}^1/_3\, \varepsilon = 45^0\ \ 0'\ \ 5'',236$$
$$B = B' - {}^1/_3\, \varepsilon = 45^0\ \ 0'\ \ 5'',236$$
$$C = C' - {}^1/_3\, \varepsilon = 89^0\, 59'\, 49'',528.$$

Schreibt man nun die Formel (195) so um, dass statt b die Seite c darin vorkommt, so folgt

$$c = a \frac{\sin (C' - {}^1/_3\, \varepsilon)}{\sin (A' - {}^1/_3\, \varepsilon)} = 1^0\, 24'\, 51'',0396$$

also genau derselbe Werth, welcher oben erhalten wurde. Abweichungen in den Werthen von c zeigen sich somit erst, wenn die Seiten der geodätischen Dreiecke grösser als 15 Meilen sind, was jedoch bei unmittelbaren Triangulationen nicht wohl vorkommt.

§. 103. Aufgabe. Eine Controle der Messung und Berechnung der Dreieckseiten zu bezeichnen.

Das Verfahren für die definitive Berechnung der Dreiecke erster Ordnung stellt sich nun so. Nachdem eine provisorische Berechnung der Dreieckseiten vorliegt und mit dieser die Winkel ausgeglichen sind, rechnet man, von der Basis ausgehend und den Legendre'schen Satz anwendend, ein Dreieck nach dem anderen wie ein ebenes. Ist auf diese Weise das Hauptnetz durchgerechnet, so beginnt man die Rechnung von Neuem, wobei zwar wiederum von der Basis ausgegangen, aber ein anderes an dieser liegendes Dreieck als erstes angesehen wird, um eine andere Reihenfolge der Dreiecke zu erhalten. An diese Rechnung kann man noch eine ähnliche dritte anschliessen, wenn die aus den beiden ersten erhaltenen doppelten Werthe der Dreieckseiten merklich von einander abweichen sollten.

Stimmen die durch verschiedene Berechnungen erhaltenen Seitenlängen gut überein, so ist dieses zwar ein Beweis für die richtige Winkelmessung und die Berechnung, aber noch nicht für die Vollkommenheit des Hauptnetzes; denn diese Uebereinstimmung wäre auch bei einem bedeutenden Fehler in der Basis möglich, da sie die Grundlage der beiden Rechnungen bildet. Um sich völlig beruhigen zu können, ist es nöthig, das Hauptnetz

an eine zweite unmittelbar gemessene Basis anzuschliessen. Aus diesem Netze lässt sich diese zweite Basis, welche eine Dreieckseite bildet, berechnen, und da sie auch mit derselben Sorgfalt wie die erste Basis gemessen wurde, so gibt die Vergleichung der berechneten und gemessenen Längen der zweiten Basis, welche Verificationsbasis oder Bestätigungslinie heisst, Aufschluss über die Genauigkeit der Gesammtarbeit.

Für die bayerische Landesvermessung hat man drei Basen gemessen: eine Hauptbasis zwischen München und Erding (die altbayerische), und zwei Verificationsbasen: die erste zwischen Nürnberg und Erlangen (die fränkische) und die zweite in der Rheinpfalz zwischen Speyer und Oggersheim (die rheinbayerische). Alle drei haben befriedigende Resultate bezüglich des Hauptnetzes geliefert. Weitere Proben seiner Tüchtigkeit hat dieses Netz durch die Anschlüsse an die Dreiecksnetze einiger Nachbarländer bestanden.

Es wird nicht als überflüssige Beigabe erachtet werden, wenn wir hier einige sichere Angaben über Basis- oder Netzanschlüsse mittheilen, welche durch die Methode der kleinsten Quadrate gewonnen wurden und wobei der Widerspruch v zwischen directer Messung und trigonometrischer Berechnung in Millimeter pro Kilometer, also in Millionstel dieser Länge ausgedrückt ist.

Die vom Steuerrath Lämmle in München im Jahre 1819 zwischen Speyer und Oggersheim gemessene rheinbayerische Grundlinie von 19795^{m} Länge wurde von Schwerd aus seiner nur 859^{m} langen „kleinen Speyerer Basis" mittels eines Netzes von 11 Punkten abgeleitet und hierbei $v = 7{,}0^{mm}$ gefunden, während Eckhardt aus der hessischen Basis von 7749^{m} Länge für dieselbe bayerische Grundlinie den Widerspruch $v = 7{,}4^{mm}$ fand.

Aus der von Bessel gemessenen Königsberger Basis wurde durch Vermittelung von 7 Dreiecken die Seite Trunz—Wildenhof = 30123,7481 Toisen gefunden, während Bayer für dieselbe Seite mit 35 Dreiecken aus der Berliner Basis 30123,5041 Toisen fand. Der Widerspruch beträgt hier $v = 8{,}1^{mm}$.

Die von Struve und Penner geleiteten grossen russischen Gradmessungen wurden in zwei aneinanderstossenden Dreiecken vereinigt, und es sandten diese Geodäten die Resultate der Netzanschlüsse unabhängig von einander an Bessel ein. Die Widersprüche in den 5 verschiedenen, durchschnittlich über 14150 Toisen langen Seiten der beiden Dreiecke betrugen für das

1. Dreieck $w_1 = 26{,}4;\ w_2 = 36{,}3;\ w_3 = 19{,}1^{mm}$,

2. Dreieck $w_4 = 13{,}4;\ w_5 = 26{,}2;\ w_6 = 26{,}4^{mm}$.

Was die Geschwindigkeit betrifft, mit der Basismessungen ausgeführt werden, so kann man durchschnittlich 70 bis 80^{m} pro Arbeitsstunde rechnen: eine Grundlinie von 2 Meilen (15000^{m}) Länge würde somit für eine Messung 100 Arbeitsstunden und mit Rücksicht auf die wegen schlechten Wetters ausfallenden Tage mindestens drei Wochen Zeit erfordern.

5. Die Ausgleichung des Dreiecksnetzes.

§. 104. **Allgemeines.** Die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes kann entweder in Einem oder mittels Zerlegung in zwei Operationen geschehen. In dem ersten Falle würden aus dem Netze, das zwei oder mehr Grundlinien enthält und worin keine Horizontabschlüsse gemacht wurden, zunächst alle Bedingungsgleichungen, mögen sich diese nun auf die Stationen, Dreiecke oder Seiten beziehen, abzuleiten sein, und die folgende (mühsamere oft unausführbare) Arbeit bestünde in der Auflösung dieser nach der Methode der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gebildeten Gleichungen. In dem zweiten Falle trennt man die Stationsausgleichungen (Horizontabschlüsse) von der Netzausgleichung (Ausgleichung der Dreiecke und Polygone) und verfährt hierbei nach der Methode der Ausgleichung bedingter Beobachtungen. Diese Trennung ist immer nöthig, wenn es sich um die Ausgleichung grösserer Dreiecksnetze handelt; aber auch das Netz selbst muss noch in kleinere Theile (Polygone) zerlegt werden, wenn man die Auflösung einer oft mehrere Hundert umfassenden Anzahl von Netzbedingungsgleichungen vermeiden will. Bei dieser Zerlegung des Netzes wird zunächst ein Polygon ausgeglichen, dann ein zweites anstossendes, wobei die Ergebnisse der ersten Ausgleichung als gegebene Grössen angesehen werden, dann ein drittes Polygon, welches in Bezug auf das zweite eben so behandelt wird, wie dieses in Bezug auf das zuerst ausgeglichene Polygon. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass auf diesem Wege der strengen Methode zwar nicht genügt, d. h. ein Minimum der Fehlerquadrate nicht erreicht, jedoch ein System von verbesserten Beobachtungswerthen erlangt wird, welches die Bedingungen des Netzes erfüllt und zuverlässiger ist als der Complex der unveränderten Beobachtungswerthe.

§. 105. **Eintheilung der Bedingungsgleichungen.** Diese Gleichungen beziehen sich, wie schon bemerkt, entweder auf die Winkel um jeden Punkt und in jedem Drei- oder Vieleck, welches zum Netze gehört, oder aber auf die Seiten der Dreiecke und bezw. Polygone. Es liessen sich hiernach Stations-, Dreiecks- und Seitengleichungen unterscheiden, man zieht es aber vor, die Bedingungsgleichungen bloss in Winkel- und Seitengleichungen einzutheilen. Die Winkelgleichungen beziehen sich auf die theoretische Winkelsumme des betreffenden Drei- oder Vielecks und drücken demnach aus, welche Grösse die Summe der gemessenen Winkel sammt ihren Verbesserungen haben muss. Man nennt diese Gleichungen wohl auch Bedingungsgleichungen erster Classe, wenn sie lediglich Stations- oder Horizontgleichungen sind, und Bedingungsgleichungen zweiter Classe, wenn sie sich lediglich auf die Winkel des Netzes beziehen. Alle übrigen Gleichungen, welche zur Verbesserung der aus fehlerhaften Winkeln berechneten Seitenverhältnisse dienen, heissen Seitengleichungen oder auch Bedingungsgleichungen dritter Classe. Durch diese letzteren Gleichungen werden die Winkel so verbessert, dass das Verhältniss zweier

bestimmten Seiten stets gleich gross erhalten wird, welche Winkel auch zur Berechnung dieses Verhältnisses benützt werden mögen. Die Summe aller Bedingungsgleichungen, von deren Erfüllung das Bestehen des Netzes abhängt, kann man Netzbedingungsgleichungen nennen.

Das Auffinden der Bedingungsgleichungen ist nicht immer so leicht, als es bei den einfachen Beziehungen, welche zwischen den Winkeln und den Seiten der Drei- und Vielecke herrschen, scheinen kann. Es verhält sich damit, wie mit dem Ansatze von Textgleichungen, der stets eine Ueberlegung erfordert, während das Lösen von bereits angesetzten Gleichungen nach mechanischen Regeln geschieht. Und wie sich für das Ansetzen der genannten Gleichungen keine speciellen Regeln aufstellen lassen, so können auch hier nur die Principien erörtert werden, nach denen man Zahl und numerischen Ausdruck der Bedingungsgleichungen finden kann.

§. 106. **Die Zahl der Bedingungsgleichungen** hängt von verschiedenen Dingen ab, nämlich von der Zahl der Netzpunkte und ihrer Verbindungslinien, sowie von der Classe der Bedingungen und der Art der Winkelmessung. Wir wollen diese Zahl zuerst für die einzelnen Classen der Bedingungsgleichungen und dann im Ganzen feststellen.

1) Bedingungsgleichungen erster Classe oder Stationsgleichungen gibt es stets so viele als das Netz Punkte enthält, auf denen alle Winkel im Umkreise einzeln gemessen worden sind. Diese Gleichungen kommen bei Abzählung der Netzbedingungsgleichungen nicht mehr in Anrechnung, wenn Horizontabschlüsse oder Satzbeobachtungen stattgefunden haben. Wenn demnach ein Dreiecksnetz p Punkte der eben bezeichneten Art enthält, so ist die Zahl der Stationsgleichungen

$$z_1 = p. \tag{196}$$

2) Die Zahl der Bedingungsgleichungen zweiter Classe oder der Winkelgleichungen ergibt sich aus folgender Betrachtung. Sollen p Punkte zu einer geschlossenen Figur verbunden werden, so sind dazu p Linien nöthig, indem der Punkt 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4 und schliesslich p mit 1 zu verbinden ist. Auf die Ordnung der Punkte kommt dabei nichts an, wenn nur der Begriff „geschlossene Figur“ ganz allgemein aufgefasst wird. Bestimmt man die Richtungsunterschiede je zweier Seiten in der Weise, wie es in der Polygonometrie geschieht, durch Angabe des Winkels, um welchen die nach rechts folgende Seite von der nach links vorangehenden abweicht, so ist die Summe aller Richtungsunterschiede entweder gleich 360° oder gleich einem Vielfachen von 360°. Folglich besteht in jeder geschlossenen Figur von p Punkten, welche durch die p nothwendigen Linien verbunden sind, 1 Bedingung für die Winkel. Tritt zu den unentbehrlichen Verbindungslinien eine neue nicht nothwendige und also überschüssige Verbindung hinzu, so wird dadurch die geschlossene Figur von p Punkten in zwei ebenfalls geschlossene Figuren, die zusammen ebenfalls nur p Punkte haben, zerlegt, und es muss für jede dieser geschlossenen Theilfiguren 1 Bedingungsgleichung zweiter Classe bestehen, für die Gesammtfigur

ergeben sich somit 2 solche Gleichungen. In gleicher Weise überzeugt man sich, dass jede neu hinzutretende überschüssige Verbindungslinie 1 Bedingungsgleichung mehr verlangt, und dass daher, wenn zwischen p Punkten $u = l - p$ überschüssige Verbindungen vorhanden sind, die Zahl der Bedingungsgleichungen zweiter Classe oder

$$z_2 = u + 1 = l - p + 1 \tag{197}$$

ist. (Dabei versteht es sich von selbst, dass die Zahl l nicht kleiner als p und nicht grösser als $\frac{1}{2}$ p (p — 1) sein kann.)

3) Von der Zahl der Bedingungsgleichungen dritter Classe oder der Seitengleichungen kann man sich auf folgendem Wege Rechenschaft geben. Zur Bestimmung eines Dreiecksnetzes ist bekanntlich eine Grundlinie oder die Grösse und Richtung zwischen zwei Punkten unbedingt nöthig. (Die Grösse könnte übrigens auch als Masseinheit angenommen und daher vorläufig unbestimmt bleiben.) Um mit den beiden ersten Punkten (1, 2) einen dritten (3) zu verbinden, sind zwei Richtungen nothwendig, von denen mindestens eine mit der Grundlinie verbunden ist. Die Festlegung eines vierten Punkts (4) verlangt ebenfalls zwei Richtungen, die durch zwei beliebige der drei schon bestimmten Punkte (1, 2, 3) gehen können, wovon aber eine mit einer bereits festgelegten Richtung verbunden sein muss. Folglich sind zur Bestimmung eines Dreiecksnetzes von p Punkten ausser der Grundlinie noch weitere 2 (p — 2) Richtungen und demnach $2p - 3$ Seitengleichungen nothwendig. Jede weitere Linie, welche zu den $2p - 3$ unentbehrlichen hinzutritt, ist jetzt offenbar ihrer Lage und Grösse nach bestimmt und bringt eine Bedingung dritter Classe mit sich, mag sie einseitig oder doppelt festgelegt sein. Wenn nun u die Anzahl der überschüssigen Linien und l die Zahl der vorhandenen Linien bezeichnet, so ist $u + 2p - 3 = l$ und folglich die Zahl der Seitengleichungen

$$z_3 = u = l - 2p + 3. \tag{198}$$

4) Wenn keine Bedingungen erster Classe stattfinden, wie es bei vorausgegangenen Horizontabschlüssen oder bei Richtungsbeobachtungen der Fall ist, so ist die Summe z_4 aller Bedingungsgleichungen offenbar $= z_2 + z_3 = (2l - p) - 2p + 4$. Bedenkt man nun, dass zu jedem Winkel 2 Seiten (Schenkel) und nur 1 Punkt (Scheitel) gehören, dass somit in einem Dreiecke, dessen 3 Winkel gemessen worden sind, jede Seite zweimal und jede Ecke nur einmal gezählt wird, so stellt offenbar $2l - p = m$ die Zahl aller Winkel des Dreiecksnetzes vor, und es ist die Summe aller Bedingungsgleichungen oder die Zahl der Netzbedingungsgleichungen

$$z_4 = z_2 + z_3 = m - 2p + 4. \tag{199}$$

5) Da die Zahl der Bedingungsgleichungen auch zugleich die Zahl der Unbekannten ist, welche gesucht werden müssen, so dürfen die von dem Netze zu erfüllenden Bedingungen nicht zu zahlreich werden, damit die Auflösung der aus den Bedingungsgleichungen hervorgehenden Normalgleichungen nicht physisch unmöglich wird. Grosse Netze werden desshalb,

wie schon in §. 104 angeführt ist, in einzelne aneinanderschliessende Polygone zerlegt, wovon jedes für sich ausgeglichen wird.

§. 107. **Der Ansatz der Bedingungsgleichungen** ist, wenn es sich bloss um Winkelgleichungen handelt, in dem Falle sehr einfach, wo sich das Netz in lauter Dreiecke zerlegen lässt: man kann dann diese Gleichungen, indem man von Dreieck zu Dreieck fortschreitet, unmittelbar hinschreiben. Auch ist der Ansatz der Winkelgleichungen in dem anderen Falle, wo das Netz nicht in Dreiecke zerlegt werden kann, nicht schwierig; nur die Seitengleichungen erfordern stets eine dem vorliegenden Falle angepasste besondere Ueberlegung, und es kann deren Ansatz oft schwierig werden.

Für alle Bedingungsgleichungen gilt die Regel, dass sie unter sich unabhängig sein müssen und also nicht aus einander abgeleitet werden können. Wenn z. B. in einem ebenen Dreiecke alle Winkel (A, B, C) und alle Seiten (a, b, c) gemessen sind, so gibt es zunächst keine Bedingungsgleichung erster Classe, weil an keinem Punkte die Winkel im Umkreise bestimmt worden sind. Dagegen hat man 1 Winkelgleichung: $A + B + C = 180^0$ und 2 Seitengleichungen: $a \sin B = b \sin A$ und $a \sin C = c \sin A$.[1] Wollte man auch noch die Gleichung $b \sin C = c \sin B$ als eine Bedingungsgleichung ansehen und die Rechnung mit 4 statt mit 3 Gleichungen durchführen, so liessen sich aus den Normalgleichungen die Correlaten nicht finden, weil sie eine identische Gleichung einschliessen. Denn die vierte Gleichung folgt aus der zweiten und dritten, wenn man a und sin A eliminirt, sie drückt somit wohl eine Eigenschaft des geschlossenen Dreiecks ABC, aber keine Bedingung seiner Existenz aus. An diesem Beispiele lässt sich erkennen, wie nothwendig es sei, vor Aufstellung der Bedingungsgleichungen erst deren Anzahl zu bestimmen.

Wenn ferner in einem ebenen Vierecke 1.2.3.4 alle Winkel und eine Seite 1.2 gemessen wurden, so bestehen, da $l = 6$, $p = 4$, $m = 8$ ist, folgende Werthe von z:

$$z_1 = o, \; z_2 = 3, \; z_3 = 1, \; z_4 = 4.$$

Ohne diese Zahlen vorher bestimmt zu haben, könnte man leicht auf den Gedanken kommen, 4 Bedingungen zweiter Classe aufzustellen (also $z_2 = 4$ zu nehmen), da das Viereck durch die beiden Diagonalen in 4 Dreiecke zerlegt wird, von denen jedes seine Winkel auf 180^0 abschliessen muss; allein bei näherer Ueberlegung findet man, dass, wenn 3 Dreiecke diese Bedingung erfüllen, das vierte Dreieck von selbst sich schliesst. Eben so könnte man glauben, dass es 5 Bedingungen dritter Classe gibt (also $z_3 = 5$ wäre), nämlich 4 Gleichungen für die 4 Eckpunkte von der Form

$$\frac{\sin(1.2).\sin(1.3).\sin(1.4)}{\sin(3.1).\sin(4.1).\sin(2.1)} = 1$$

und eine Gleichung für das Verhältniss aller vier Seiten zu einander, nämlich

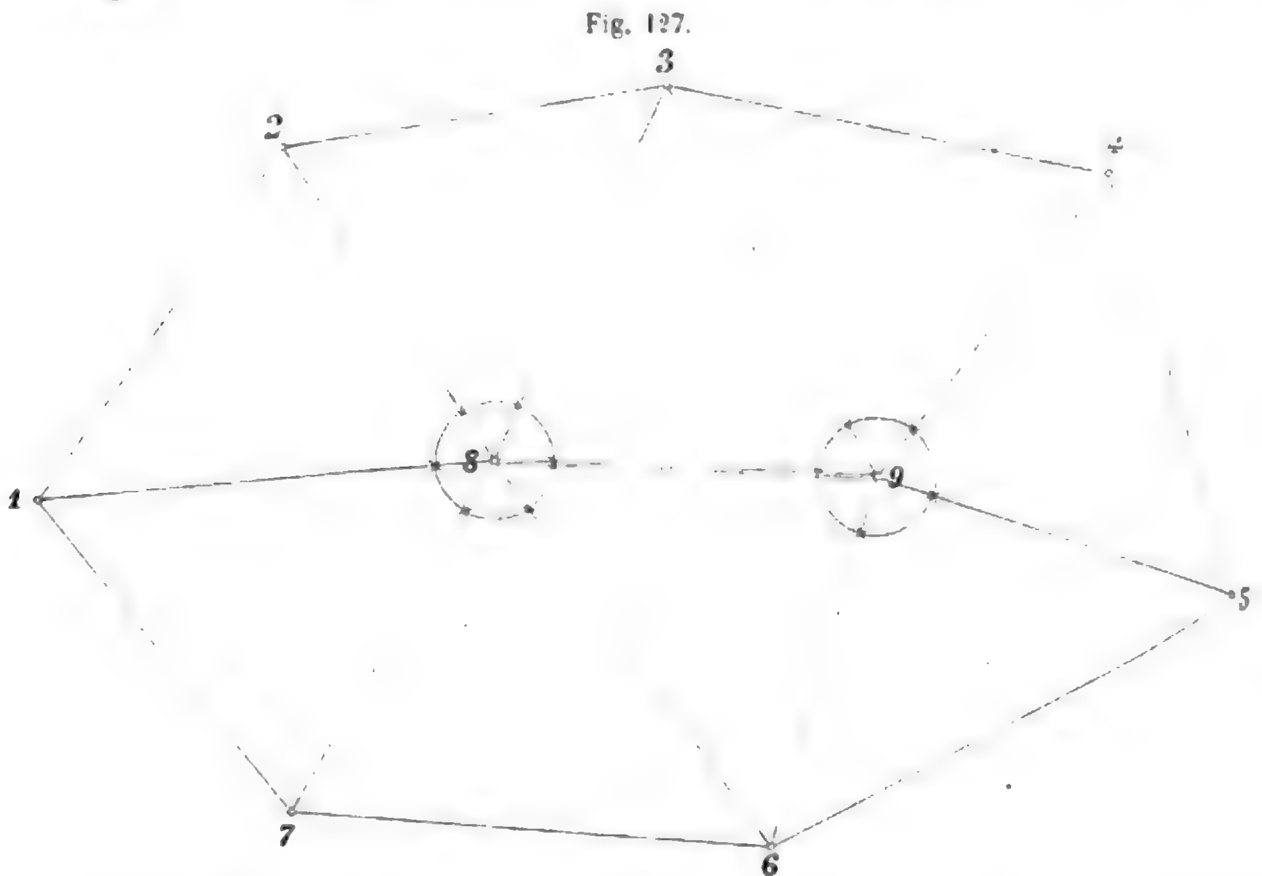
$$\frac{\sin(1.2).\sin(2.3).\sin(3.4).\sin(4.1)}{\sin(3.2).\sin(4.3).\sin(4.1).\sin(2.1)} = 1$$

[1] Die Formeln 196 bis 199 gelten nur für Winkelmessungen; wenn, wie hier, auch Seitenmessungen vorkommen, so gilt für z_3 eine andere Formel.

während es in der That nur 1 Seitengleichung (die vorstehende) gibt: es müssen sich also die 4 übrigen, welche man aufstellen könnte, aus dieser einzigen ableiten lassen, wie es in der That auch der Fall ist.

Zur Uebung in dem Ansatze der Bedingungsgleichungen mag folgendes Beispiel dienen. In dem in Fig. 127 dargestellten Dreiecksnetze, das aus zwei Centralsystemen (Vielecken, welche sich um je einen Mittelpunkt, hier 8 und 9, gruppiren) besteht, seien sämmtliche Winkel einzeln und mit gleicher Genauigkeit gemessen worden, und die Seite AB des Netzes diene als Grundlinie.

Fig. 127.



Dieser Fall ist, da keine Richtungsbeobachtungen vorliegen, nach den von Gauss in dem Supplementum theoriae combinationis etc. §. 13 und §. 14 gegebenen Vorschriften zu behandeln. Suchen wir zunächst die Zahlen der Bedingungsgleichungen auf. Hier ist, da nur um die Punkte 8 und 9 alle Winkel gemessen worden sind, nach (196) die Zahl der Stationsgleichungen

$$z_1 = 2.$$

Ferner ist, da $l = 17$ und $p = 9$, nach (197) die Zahl der Winkelgleichungen

$$z_2 = 9$$

weiter beträgt die Zahl der Seitengleichungen nach (198)

$$z_3 = 2$$

und schliesslich die Zahl aller Netzbedingungsgleichungen nach (199)

$$z_4 = 11.$$

Ueber die Horizontabschlüsse handelt bereits §. 100, wesshalb wir hier die Bedingungen erster Classe (z_1) nicht weiter berühren. Die Bedingungen zweiter Classe bestehen darin, dass in jedem der 9 Dreiecke des Netzes

die Summe der drei Winkel 180° sein muss, wobei die auf 8 und 9 ausgeglichenen Winkel als unmittelbar gemessene angesehen werden. Die Bedingungen dritter Classe (z_3) verlangen, dass die Seiten jedes Centralsystems mit den Winkeln übereinstimmen, d. h. dass in dem um den Punkt 8 herum liegenden Sechsecke

$$\frac{\sin(8.1).\sin(8.2).\sin(8.3).\sin(8.4).\sin(8.7).\sin(8.9)}{\sin(2.8).\sin(3.8).\sin(4.8).\sin(9.8).\sin(1.8).\sin(7.8)} = 1$$

und in dem um den Punkt 9 herum liegenden Fünfecke

$$\frac{\sin(9.8).\sin(9.4).\sin(9.5).\sin(9.6).\sin(9.7)}{\sin(4.9).\sin(5.9).\sin(6.9).\sin(7.9).\sin(8.9)} = 1$$

sei. Nachdem so die 13 zu erfüllenden Bedingungsgleichungen bekannt sind, geschieht die weitere Behandlung nach den im allgemeinen Theile der Ausgleichungsrechnung angegebenen Regeln. (Ein auf den vorliegenden Fall passendes Zahlenbeispiel enthält Jordan's Taschenbuch der practischen Geometrie, S. 300 u. ff.)

Wären die Winkel des in Fig. 127 dargestellten Netzes durch Richtungsbeobachtungen gegeben, so würde man die Ausgleichung desselben am besten nach den von Bessel in seiner „Gradmessung in Ostpreussen" gegebenen Vorschriften vornehmen, die in Jordan's Taschenbuch S. 306 u. ff. an einigen Beispielen erläutert sind.

6. Die Coordinatenberechnung der Netzpunkte.

§. 108. Durch die definitive Berechnung der Dreieckseiten ist die gegenseitige Lage aller Netzpunkte bestimmt. Soll aber die Lage dieser Punkte gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde angegeben werden, so muss erst dieser Meridian festgesetzt und dessen Lage gegen den Hauptmeridian, worauf die geographischen Längen bezogen werden, bekannt sein. Der Meridian, auf welchen man die Netzpunkte zunächst bezieht, geht in der Regel durch die Sternwarte des Landes, deren geographische Lage genau bekannt ist, und welche desshalb als astronomischer Punkt der Landesvermessung benützt wird. Es ist jedoch nicht gerade nothwendig, dass man die Netzpunkte auf den Meridian der Sternwarte bezieht, es kann hierzu auch der Meridian eines anderen genau bestimmten Netzpunkts, welcher dann der **Normalpunkt** heisst, gewählt werden, wie z. B. für die bayerische Landesvermessung die Spitze des nördlichen Thurms der Frauenkirche in München. Senkrecht zu diesem Meridian denkt man sich durch den Normalpunkt einen grössten Kreis der Erdkugel gelegt, welcher das **Perpendikel** genannt wird und in der Richtung Ostwest liegt. Der Meridian und das Perpendikel des Normalpunkts, auf das Niveau der Messung projicirt gedacht, stellen nunmehr kreisförmige Coordinatenaxen vor und auf diese werden alle Punkte der Vermessung durch kreisförmige Abscissen und Ordinaten bezogen.[1] Die **Abscissen**

[1] Statt dieser Linear-Coordinaten gebrauchen manche Geodäten auch Polar-Coordinaten, wobei der Normalpunkt als Pol und dessen Meridian als Axe angesehen wird.

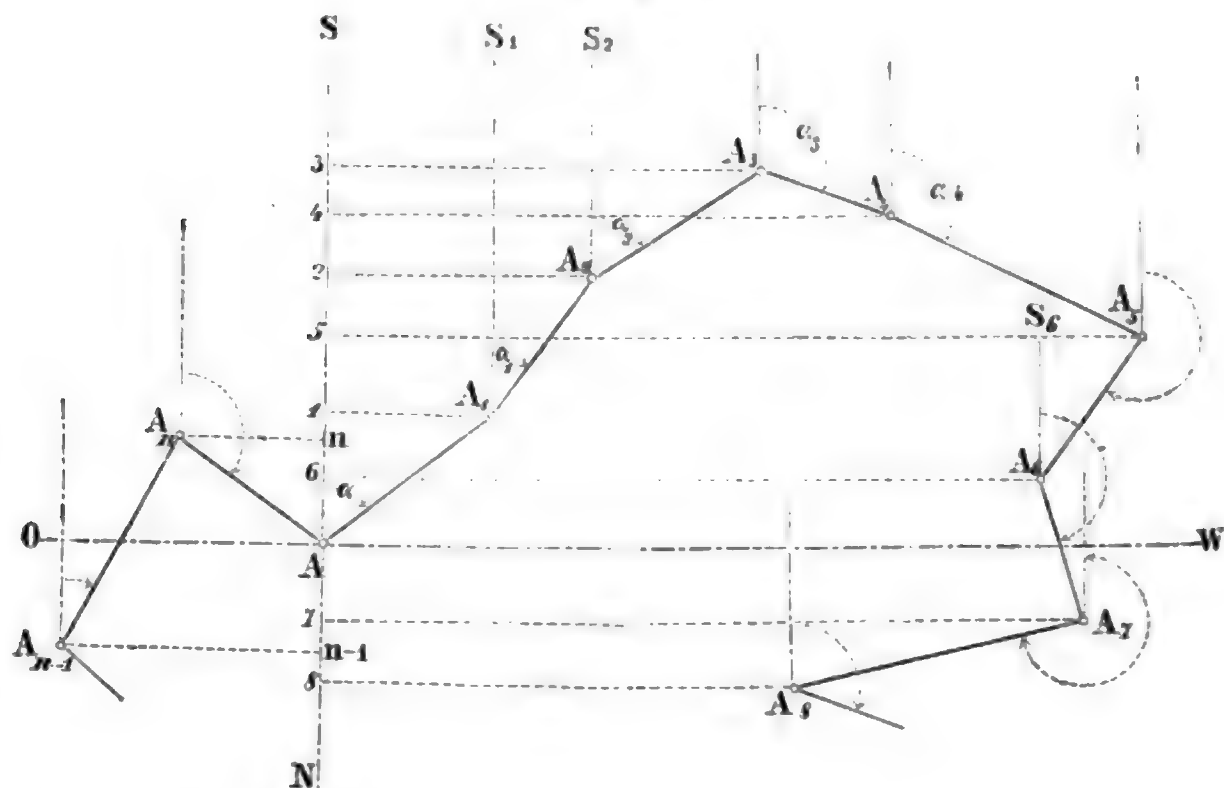
sind Meridianbögen und werden entweder nach Süden oder nach Norden hin als positiv betrachtet. Die Ordinaten sind grösste Kreise, die auf dem Meridian des Normalpunkts senkrecht stehen und folglich ihre Pole in dem Aequator der Erde haben, ihre positive Richtung kann nach Osten oder Westen laufen: wir werden für die Ordinaten die Richtung vom Normalpunkte nach Westen und für die Abscissen jene vom Normalpunkte nach Süden als die positive annehmen.

Bei kleineren Dreiecksnetzen, für welche man den von ihnen eingeschlossenen Theil der Erdkugel als eben ansehen darf, werden selbstverständlich die Axen und die Coordinaten senkrecht auf einander stehende gerade Linien.

§. 109. **Aufgabe. Ein für eine Landesvermessung hergestelltes Dreiecksnetz hat eine so geringe Ausdehnung, dass es als eben angesehen werden kann; man soll aus den gegebenen Bestimmungsstücken die Coordinaten der Netzpunkte berechnen.**

Es sei die vom Normalpunkte A ausgehende erste Dreieckseite $A A_1 = a_1$, die anstossende zweite $A_1 A_2 = a_2$, die dritte $A_2 A_3 = a_3$ u. s. f., die n^te^ $A_{n-1} A_n = a_n$. Ist das Azimuth der Seite a_1 (vom Südpunkte über West

Fig. 128.



bis 360°) in $A = \alpha$, so ist es in $A_1 = 180^0 + \alpha$; setzt man ferner den ersten Richtungswinkel der Seite a_2 in $A_1 = \alpha_1$, so ist der zugehörige zweite im Punkte $A_2 = 180^0 + \alpha_1$. Für die Seite a_3 hat man den ersten Richtungswinkel in $A_2 = \alpha_2$ und den zweiten in $A_3 = 180^0 + \alpha_2$, und so fort erhält man für a_n den ersten Richtungswinkel $= \alpha_{n-1}$ und den zweiten $= 180^0 + \alpha_{n-1}$.

Ueber die Richtungswinkel α_1, α_2, α_3 .... α_n ist zu bemerken, dass sie aus den nach §. 98 bei der Messung bestimmten Richtungswinkeln erhalten werden, wenn man an diesen die nöthigen Reductionen δ wegen der früher nur annähernd bekannten Lage des Meridians anbringt. Diese Lage ist aber jetzt, nachdem alle Dreieckswinkel ausgeglichen sind und das Azimuth von a_1 genau bekannt ist, zunächst für a_2, hiermit für a_3, damit für a_4 u. s. f. mit a_{n-1} für a_n bekannt.

Bezeichnen die Buchstaben ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ... ξ_n die Abscissen und η_1, η_2, η_3, η_4 ... η_n die Ordinaten der Netzpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 ... A_n, so ist nach der Figur 128:

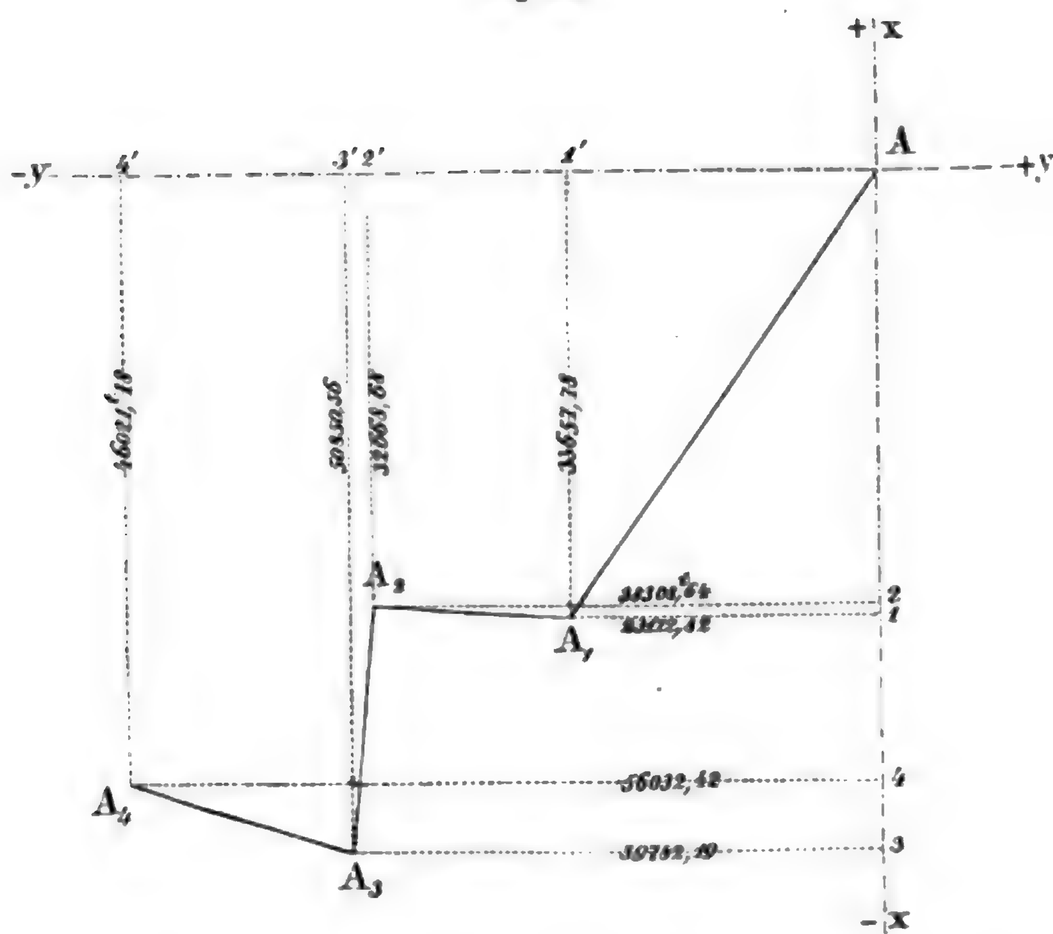
$$\xi_1 = a_1 \cos \alpha, \qquad \eta_1 = a_1 \sin \alpha,$$
$$\xi_2 = \xi_1 + a_2 \cos \alpha_1, \qquad \eta_2 = \eta_1 + a_2 \sin \alpha_1,$$
$$\xi_3 = \xi_2 + a_3 \cos \alpha_2, \qquad \eta_3 = \eta_2 + a_3 \sin \alpha_2,$$
$$\xi_4 = \xi_3 + a_4 \cos \alpha_3, \qquad \eta_4 = \eta_3 + a_4 \sin \alpha_3,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\xi_n = \xi_{n-1} + a_n \cos \alpha_{n-1}. \qquad \eta_n = \eta_{n-1} + a_n \sin \alpha_{n-1}.$$

Theils um die practische Anwendung dieser Formeln zu zeigen, theils aber auch um nachzuweisen, dass die hieraus erhaltenen Werthe von den genaueren sphärischen Coordinaten, welche im folgenden Paragraph berechnet werden, nur sehr wenig abweichen, lassen wir hier ein aus der Gradmessung von Bessel und Baeyer entlehntes und auch von Hansen in seiner Instruction für die thüringische Triangulation benütztes Beispiel folgen. Zur leichteren Uebersicht der Lage der Punkte, welche in demselben vorkommen, mag die Fig. 129, S. 226 dienen, in welcher + x A + y das positive Viertel vorstellt.

Netzpunkt.	Dreieckseite.	Logarithmus derselben.	Richtungswinkel.
	Trunz (A).		
Galtgarben (A_1)	40863t,50	4,6113356	214° 32′ 48″,32
	Galtgarben (A_1).		
Trunz (A)	....	....	34° 34′ 50″,72
Kondehnen (A_2)	15168t,11	4,1809313	273° 46′ 22″,32
	Kondehnen (A_2)		
Galtgarben (A_1)	....	....	93° 11′ 2″,30
Lattenwalde (A_3)	18241t,50	4,2610605	184° 4′ 42″,61
	Lattenwalde (A_3).		
Kondehnen (A_2)	....	....	4° 50′ 27″,14
Gilge (A_4)	16952t,67	4,2292381	286° 45′ 31″,70

Für den Normalpunkt A (Trunz) ist die geographische Breite φ = 54° 13′ 11″,47 und das Azimuth der Seite A A_1, (Trunz-Galtgarben) α = 214° 32′ 48″, 32. Damit nun die in Galtgarben (A_1) stattfindenden Richtungs-

Fig. 129.



winkel auf den richtigen Meridian bezogen werden, ist an denselben eine Verbesserung anzubringen, welche sich wie folgt ergibt: Offenbar muss nach Fig. 128 $S_1\ A_1\ A_2 = \alpha_1 = 214^0\ 32'\ 48'', 32 - 180^0 = 34^0\ 32', 48'', 32$ sein, während nach der früheren Bestimmung laut obiger Tabelle der um δ_1 fehlerhafte Richtungswinkel

$$\omega + \delta_1 = 34^0\ 34'\ 50'', 72$$

ist. Hieraus folgt die Verbesserung δ_1 für den Punkt $A_1 = 2'\ 2'', 40$, und es ist dieser Betrag von jedem der Winkel zu subtrahiren, wesshalb der eine von $34^0\ 34'\ 50'', 72$ in $34^0\ 32'\ 48'', 32$ und der andere von $273^0\ 46'\ 22'', 32$ in $272^0\ 44'\ 19'', 92$ übergeht. Dieser letzte Werth sei $= \omega_1$.

Für den Punkt A_2 (Kondehnen) findet man die zu addirende Verbesserung $\delta_2 = 33'\ 17''\ 62$, wodurch der in der Tabelle aufgeführte Richtungswinkel von $93^0\ 11'\ 2'', 30$ in $93^0\ 44'\ 19'', 92$ und der von $184^0\ 4'\ 42'', 61$ in $184^0\ 38'\ 0'', 23$ verwandelt wird. Der letzte Werth sei $= \omega_2$.

Für den Punkt A_3 (Lattenwalde) ist die zu subtrahirende Verbesserung $\delta_3 = 12'\ 29'', 91$, wesshalb der Richtungswinkel von $4^0\ 50'\ 27'', 14$ in $4^0\ 38'\ 0'', 23$ und der von $286^0\ 45'\ 31'', 70$ in $286^0\ 33'\ 4'', 79$ übergeht. Der letzte Werth sei $= \omega_3$.

Mit Hilfe der verbesserten Richtungswinkel und der gegebenen Dreieckseiten findet man

die Abscisse $\xi_1 = \quad 40863,^t 50 \cos 214^0\ 32'\ 48'', 32 = -\ 33657,^t 78$

„ Ordinate $\eta_1 = \quad 40863,^t 50 \sin 214^0\ 32'\ 48'', 32 = -\ 23172,^t 82$

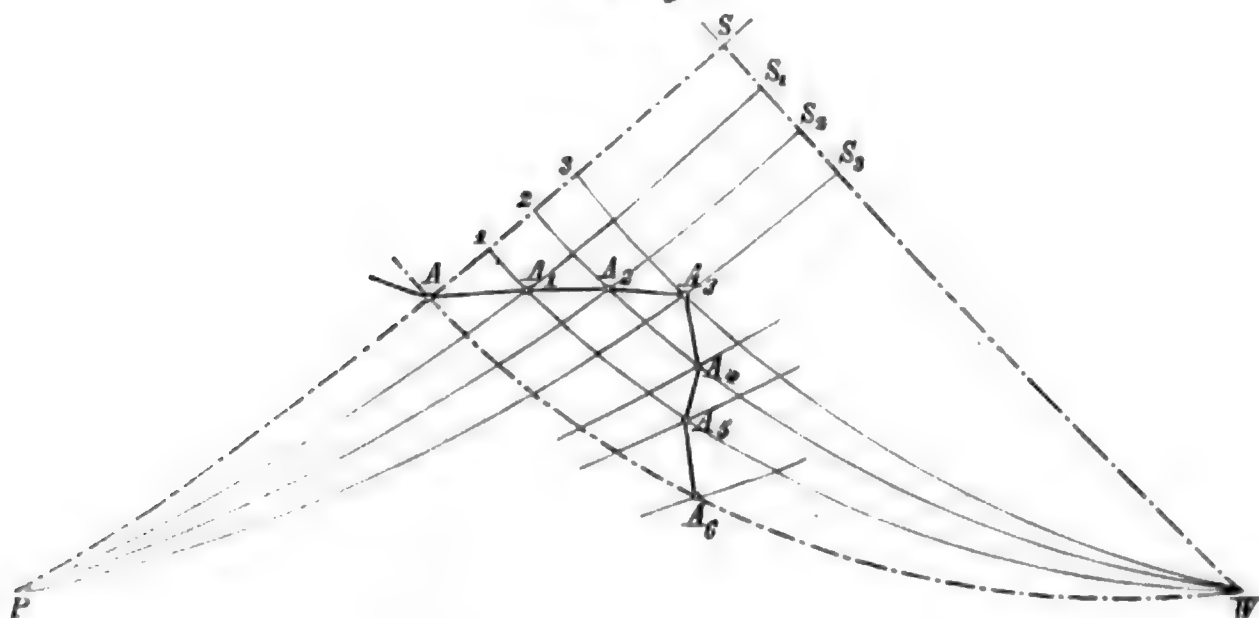
die Abscisse $\xi_2 = -33657,^t78 + a_2 \cos \omega_1 = -32688,^t68$
„ Ordinate $\eta_2 = -23172,^t82 + a_2 \sin \omega_1 = -38308,^t64$
„ Abscisse $\xi_3 = -32688,^t68 + a_3 \cos \omega_2 = -50850,^t56$
„ Ordinate $\eta_3 = -38308,^t64 + a_3 \sin \omega_2 = -39782,^t19$
„ Abscisse $\xi_4 = -50850,^t56 + a_4 \cos \omega_3 = -46021,^t18$
„ Ordinate $\eta_4 = -39782,^t19 + a_4 \sin \omega_3 = -56032,^t42$

Nach diesen Coordinatenwerthen ist die Fig. 129 construirt.

§. 110. **Aufgabe. Es sollen aus den berechneten Dreieckseiten, der bekannten geographischen Breite des Normalpunkts und dem Azimuth einer Seite die Linearcoordinaten eines sphärischen Dreiecksnetzes entwickelt werden.**

Stellt in Fig. 130 der Bogen P S den Meridian des Normalpunkts A und A W das Perpendikel dieses Punkts, folglich S P die Abscissen- und A W die Ordinatenaxe der sphärischen Linearcoordinaten vor; sind ferner

Fig. 130.



A_1, A_2, A_3, A_4 ... auf einander folgende Netzpunkte, deren Coordinaten bestimmt werden sollen; haben die Kreisbögen $A\,A_1$, $A_1\,A_2$, $A_2\,A_3$, $A_3\,A_4$ .... beziehlich die Längen a_1, a_2, a_3, a_4 ....; ist φ die geographische Breite des Normalpunkts A und α das Azimuth $S\,A\,A_1$ der Dreieckseite $A\,A_1$ in dem Punkte A; zieht man durch A_1, A_2, A_3, A_4 .... Meridiane und Perpendikel und nennt die hierdurch erzeugten Coordinaten dieser Punkte beziehlich x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; ....; sowie die Azimuthe der Seiten $A_1\,A_2$, $A_2\,A_3$, $A_3\,A_4$ .... in den Punkten A_1, A_2, A_3, ... nach einander ω_1, ω_2, ω_3 ....; und heissen endlich die sphärischen Winkel $A\,A_1\,P$, $A_1\,A_2\,P$, $A_2\,A_3\,P$ ... β_1, β_2, β_3 ..., die Complemente $A\,P$, $A_1\,P$, $A_2\,P$, $A_3\,P$ .... der geographischen Breiten von A, A_1, A_2, A_3 ... b, b_1, b_2, b_3 ....; und die sphärischen Winkel $A\,P\,A_1$, $A_1\,P\,A_2$, $A_2\,P\,A_3$ .... μ_1, μ_2, μ_3 ....: so ist in dem sphärischen Dreiecke $A\,A_1\,P$ bekannt: die Seite $A\,P = b = 90^0 - \varphi$; die Seite $A\,A_1 = a_1$ im Längenmasse und =

$\alpha_1 = 206265 \frac{a_1}{r}$ Secunden im Gradmasse; endlich der Winkel $A_1\,A\,P = 180^0 - \alpha$.

Aus diesen drei Stücken findet man mit Hilfe der Gauss'schen Formeln

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta_1 - \mu_1) = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}(\mathfrak{b} - \alpha_1)}{\sin \tfrac{1}{2}(\mathfrak{b} + \alpha_1)} \tag{200}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta_1 + \mu_1) = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}(\mathfrak{b} - \alpha_1)}{\cos \tfrac{1}{2}(\mathfrak{b} + \alpha_1)}. \tag{201}$$

Hat man hiermit $\beta_1 - \mu_1 = \delta_1$ und $\beta_1 + \mu_1 = \sigma_1$ berechnet, so wird

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \delta_1) \text{ und } \mu_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \delta_1)$$

gefunden. Ist aber β_1 bekannt, so hat man auch das Azimuth der Seite a_1 im Punkte A_1 oder den über West gezählten Winkel $S_1\,A_1\,A$ gleich

$$\alpha' = 180^0 + \beta_1. \tag{202}$$

Zieht man hiervon den ebenfalls über West gezählten Dreieckswinkel $A_2\,A_1\,A$, welcher die Differenz $A - A_2$ der in A_1 gemessenen und in dem Winkeljournale enthaltenen Richtungswinkel nach A und A_2 ist, ab, so wird das Azimuth

$$\omega_1 = \alpha' - (A - A_2). \tag{203}$$

Man sieht nun leicht ein, dass die bisherige Betrachtung auch für die Seite $A_1\,A_2$ gilt, wenn vorher nur noch der Bogen b_1 oder sein Gradmass $\mathfrak{b}_1$ bestimmt ist, was aber sofort aus der Proportion $\sin \alpha_1 : \sin \mathfrak{b}_1 = \sin \mu_1 : \sin \alpha$ erhalten wird, indem diese liefert

$$\sin \mathfrak{b}_1 = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha}{\sin \mu_1}. \tag{204}$$

Die Abscisse x_1 und die Ordinate y_1 des Punkts A_1 erhält man aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $A\,A_1\,1$, in welchem die Hypotenuse $A\,A_1 = a_1$ oder α_1 und der Winkel $A_1\,A\,1 = \alpha$ bekannt ist. Nennt man den Winkel, welcher zu dem Bogen x_1 gehört, $\mathfrak{x}_1$, und jenen, welcher dem Bogen y_1 angehört, $\mathfrak{y}_1$, so dienen zur Berechnung von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \mathfrak{x}_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \cos \alpha \text{ und } \sin \mathfrak{y}_1 = \sin \alpha_1 \sin \alpha \tag{205}$$

und folglich zur Bestimmung der Bögen x_1 und y_1 die Formeln:

$$x_1 = \frac{r\,\mathfrak{x}_1}{206\,265} \text{ und } y_1 = \frac{r\,\mathfrak{y}_1}{206\,265} \tag{206}$$

wobei jedoch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ in Secunden ausgedrückt sein müssen.

Die Abscisse $x_2 = A\,2$ und die Ordinate $A_2\,2$ des Punkts A_2 folgen aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $2\,A_2\,P$, in welchem bekannt ist die Hypotenuse $A_2\,P = \mathfrak{b}_2$ und der Winkel $A\,P\,A_2 = \mu_1 + \mu_2$. Es ist somit

$$\operatorname{tg} \mathfrak{x}_2 = \operatorname{tg} \mathfrak{b}_2 \cos(\mu_1 + \mu_2) \text{ und } \sin \mathfrak{y}_2 = \sin \mathfrak{b}_2 \sin(\mu_1 + \mu_2) \tag{207}$$

und folglich, wenn man die Bögen x_2 und y_2 selbst will:

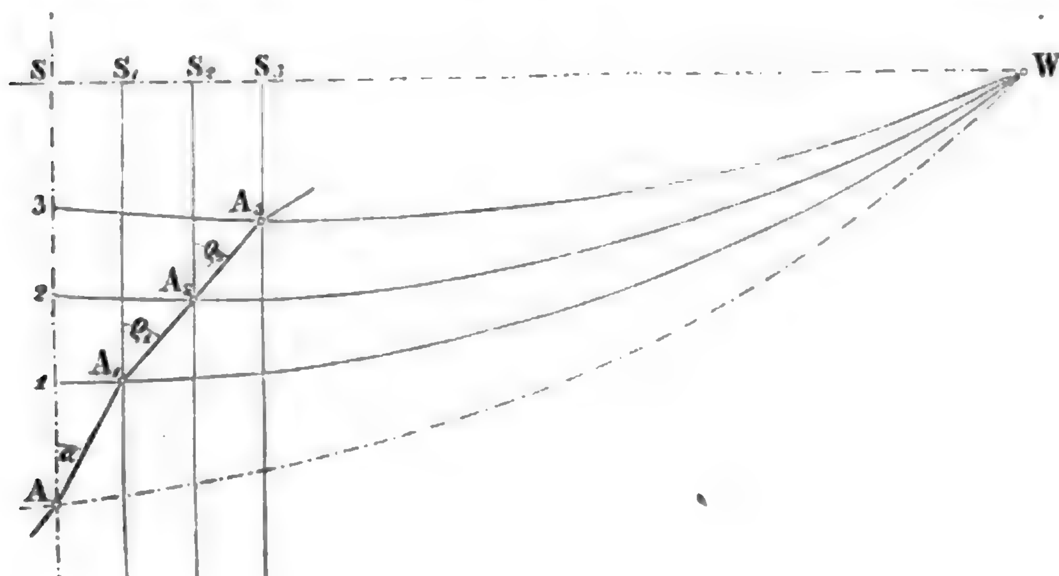
$$x_2 = \frac{r\,\mathfrak{x}_2}{206\,265} \text{ und } y_2 = \frac{r\,\mathfrak{y}_2}{206\,265}. \tag{208}$$

Auf gleiche Weise findet man $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$ und x_3, y_3, $\mathfrak{x}_4$, $\mathfrak{y}_4$ und x_4, y_4 u. s. w. Auch ist klar, dass die Winkel $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ ... die Complemente

der geographischen Breiten der Punkte A_1, A_2, A_3 . . . . vorstellen und dass also diese Breiten selbst gleich $90^0 - \mathfrak{b}_1$, $90^0 - \mathfrak{b}_2$, $90^0 - \mathfrak{b}_3$ etc. wären, wenn keine Rücksicht auf die elliptische Gestalt der Erdmeridiane genommen würde. Diese Rücksicht darf jedoch nicht ausser Acht gelassen werden, wesshalb weiter unten noch besonders von den geographischen Lagen der Netzpunkte die Rede ist. Dagegen stellen die Winkel μ_1, μ_2, μ_3 . . . . die wirklichen Längenunterschiede zwischen A und A_1, A_1 und A_2, A_2 und A_3 etc. vor, da hierauf die elliptische Gestalt der Erdmeridiane fast gar keinen Einfluss hat, wenigstens so lange nicht, als nicht Netze zu berechnen sind, welche die bis jetzt berechneten an Ausdehnung weit übertreffen.

Obwohl die vorstehenden Formeln nicht sehr zusammengesetzt sind, so veranlassen sie doch sehr viel Rechnung, wesshalb man es vorzieht, statt dieser strengen Formeln Näherungsausdrücke anzuwenden, welche einen hinreichenden Grad von Genauigkeit gewähren. Die nachfolgend ent-

Fig. 131.



wickelten sind zuerst bei der Berechnung des bayerischen und dann des württembergischen Hauptnetzes zur Anwendung gekommen. Sie rühren vom Astronomen **Soldner** in München her, und es findet sich dessen Abhandlung darüber vom Jahre 1810 in der schon erwähnten „Bayerischen Landesvermessung" (Seite 263 bis 281) zum ersten Male vollständig abgedruckt.

Es ist keineswegs nothwendig, die Richtungswinkel der Dreieckseiten auf die Mittagslinien ihrer Endpunkte zu beziehen, wie wir bisher gethan haben; man kann vielmehr statt der Meridiane solche Curven wählen, welche dem Hauptmeridian parallel laufen, d. h. auf allen Ordinatenkreisen gleichweit von diesem Meridian abstehen. In der Fig. 131 stellt S A den Hauptmeridian, S_1 A_1 eine durch A_1 und S_2 A_2 eine durch A_2 gehende Richtungscurve vor. Die Richtungswinkel der Seiten A A_1, A_1 A_2; A_2 A_3 etc. sind hier beziehlich α, ϱ_1, ϱ_2 etc. und die zu lösende Aufgabe ist folgende:

Es sind die Coordinaten x_1 und y_1 eines Punkts A_1 nebst der Grösse a_2 und dem Richtungswinkel ϱ_1 der Seite A_1 A_2 gegeben; man sucht erstens

die Coordinaten x_2 und y_2 des Punkts A_2, und zweitens den Richtungswinkel ϱ'' der Seite $A_1 A_2$ in dem Punkte A_2.

Hiernach sind in dem sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 W$ bekannt: die Seite $A_1 W$ = dem Bogen $W A_1$ 1 weniger y_1 oder auf eine Kugel vom Halbmesser 1 reducirt $= 90^0 - \mathfrak{y}_1$, die Seite $A_1 A_2$ = dem Bogen a_2 oder auf eine Kugel vom Halbmesser 1 reducirt $= \mathfrak{a}_2$; und der Winkel $A_2 A_1 W = 90^0 - \varrho_1$. Da der Bogen $A_2 W = 90^0 - \mathfrak{y}_2$ ist, so findet die Gleichung statt:

$$\sin \mathfrak{y}_2 = \cos \mathfrak{a}_2 \sin \mathfrak{y}_1 + \sin \mathfrak{a}_2 \cos \mathfrak{y}_1 \sin \varrho_1$$

und weil $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{a}_2$ nur sehr kleine Theile des Erdumfangs sind, so kann man in dieser Gleichung mit hinreichender Annäherung setzen:

$$\sin \mathfrak{y} = \mathfrak{y} - \frac{1}{6} \mathfrak{y}^3 = \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6 r^3}$$

$$\cos \mathfrak{y} = 1 - \frac{1}{2} \mathfrak{y}^2 = 1 - \frac{y^2}{2 r^2}$$

denn indem man diese Werthe für $\sin \mathfrak{y}$ und $\cos \mathfrak{y}$ einführt, vernachlässigt man erst Grössen, deren Nenner die vierte Potenz vom Erdhalbmesser r enthalten. Führt man die Rechnung durch und setzt zur Abkürzung

$$a_2 \cos \varrho_1 = u,\ a_2 \sin \varrho_1 = v$$

so erhält man zunächst die gesuchte Ordinate

$$y_2 = y_1 + v - \frac{u^2}{2 r^2} \left(y_1 + \frac{1}{3} v \right) \tag{209}$$

und da nach Seite 225 der Ausdruck $y_1 + v = y_1 + a_2 \sin \varrho_1 = \eta_2$ ist, so folgt aus der vorstehenden Gleichung, dass die sphärische Ordinate y_2 aus der ebenen η_2 erhalten wird, wenn man an dieser die von der Erdkrümmung herrührende Verbesserung

$$x = - \frac{u^2}{2 r^2} \left(y_1 + \frac{1}{3} v \right) \tag{210}$$

anbringt. Dabei versteht es sich von selbst, dass x einen positiven Werth erlangt, wenn der Factor $y_1 + \frac{1}{3} v$ negativ ist.

Darf man y_2 als bekannt voraussetzen, so folgt aus dem auf eine Kugel vom Halbmesser 1 reducirten sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 W$, da der Winkel $A_1 W A_2 = \varphi_1 = \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1$ ist, weiter

$$\sin (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = \frac{\sin \mathfrak{a}_2 \cos \varrho_1}{\cos \mathfrak{y}_2}$$

und setzt man auch hier wieder für $\sin (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)$, $\sin \mathfrak{a}_2$, $\cos \mathfrak{y}_2$ die zwei ersten Glieder der ihnen entsprechenden Reihen und entwickelt hieraus den dem Erdhalbmesser r angehörigen Bogen x_2, so ist das Ergebniss

$$x_2 = x_1 + u + \frac{u}{2 r^2} \left(y_2^2 - \frac{1}{3} v^2 \right). \tag{211}$$

Da nun $x_1 + u = x_1 + a_2 \cos \varrho_1 = \xi_2$, so lehrt diese Gleichung, dass die sphärische Abscisse x_2 gleich ist der ebenen ξ_2 nebst einer von der Erdkrümmung herrührenden Verbesserung

$$\lambda = \frac{u}{2 r^2} \left(y_2^2 - \frac{1}{3} v^2 \right) \tag{212}$$

in welcher das Vorzeichen von λ theils von u, d. h. von cos ϱ_1, theils von dem Werthe des in Klammern eingeschlossenen Factors abhängt.

Sucht man endlich aus dem schon zweimal benützten sphärischen Dreiecke A_1 A_2 W den Winkel bei A_2, welcher $= \varrho'' - 90^0$ ist, durch die bekannten Winkel $\mathfrak{a}_2$, ϱ_1, $\mathfrak{y}_1$ auszudrücken und führt abermals die erlaubten Näherungswerthe für sin $\mathfrak{y}$ und cos $\mathfrak{y}$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen schliesslich:

$$\varrho'' = 180^0 + \varrho_1 - \frac{u}{r^2 \sin 1''}\left(y_1 + \frac{1}{2} r\right). \qquad (213)$$

Für ein ebenes Dreiecksnetz ist der Richtungswinkel ω'' der Seite A_1 A_2 am Endpunkte $A_2 = 180^0 + \varrho_1$; daher folgt aus dem vorstehenden Ausdrucke: dass der sphärische Richtungswinkel ϱ'' aus dem ebenen ω'' erhalten wird, wenn man diesen mit der Grösse

$$\tau = -\frac{u}{r_2 \sin 1''}\left(y_1 + \frac{1}{2} r\right) \qquad (214)$$

verbessert, wobei τ sowohl positiv als negativ sein kann.

Zur Erläuterung des Gebrauchs der Formeln (209) bis (213) mögen folgende auf die Punkte A A_1 A_2 A_3 bezügliche Zahlenbeispiele dienen:

1. Erste Seite A $A_1 = a_1 = 9592^t,921$; log $a_1 = 3,981\ 9508$

Richtungswinkel S A $A_1 = \alpha = 169^0\ 12'\ 59'',88$

$$\log r = 6,5155492$$

$$\log \frac{1}{2 r^2} = 6,66787 - 20$$

$$\log \frac{1}{6 r^2} = 6,19075 - 20$$

a) Die Ordinate $y_1 = y_0 + v - \dfrac{u^2 y_0}{2 r^2} - \dfrac{u^2 v}{6 r^2}$

$y_0 =$		$0^t,000$
$+ v = a_1 \sin \alpha =$ . .	+	$1794^t,798$
$- \dfrac{u^2 y_0}{2 r^2} =$		$0^t,000$
$- \dfrac{u v^2}{6 r^2} =$		$0^t,0025$
$y_1 =$	+	$1794^t,796$

b) Die Abscisse $x_1 = x_0 + u + \dfrac{u y_1{}^2}{2 r^2} - \dfrac{u v^2}{6 r^2}$

$x_0 =$		$0^t,000$
$+ u = a_1 \cos \alpha =$ . .	−	$9423^t,527$
$+ \dfrac{u y_1{}^2}{2 r^2} =$	−	$0^t,0014$
$- \dfrac{u v^2}{6 r^2} =$	+	$0^t,0015$
$x_1 =$	−	$9423^t,527$

c) Der Richtungswinkel $\varrho' = 180^0 + \alpha - \frac{u\, y_0}{r^2 \sin 1''} - \frac{u\, v}{2\, r^2 \sin 1''}$

$180^0 = \; . \; . \; . \; . \; . \; + 180^0 \; 0' \; 0''$

$+ \varrho' = \alpha = \; . \; . \; + 169^0 \; 12' \; 59'',88$

$- \frac{u\, y_0}{r^2 \sin 1''} = \; . \; . \; . \; 0^0 \; 0' \; 0''$

$- \frac{u\, v}{2\, r^2 \sin 1''} = \; . \; + \; 0^0 \; 0' \; 0'',16$

$\varrho' = 349^0 \; 13' \; 0'',04$

2. Zweite Seite $A_1 \, A_2 = a_2$; $\log a_2 = 4{,}3136942$

Dreieckswinkel $A \, A_1 \, A_2 =$ . . . . . $132^0 \; 54' \; 27'',70$

Der vorige Richtungswinkel $\varrho' =$ . . $349^0 \; 13' \; 0'',04$

Der neue Richtungswinkel $S_1 \, A_1 \, A_2 = \varrho_1 = 122^0 \; 7' \; 27'',74$

a) Die Ordinate $y_2 = y_1 + v - \frac{u^2\, y_1}{2\, r^2} - \frac{u^2\, v}{6\, r^2}$

$y_1 = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + \; 1794^t,7955$

$+ v = a_2 \sin \varrho_1 = \; . \; + 17439^t,1040$

$- \frac{u^2\, y_1}{2\, r^2} = \; . \; . \; . \; . \; . \; - \; 0^t,0080$

$- \frac{u^2\, v}{6\, r^2} = \; . \; . \; . \; . \; . \; - \; 0^t,0324$

$y_2 = + \; 19233^t,859$

b) Die Abscisse $x_2 = x_1 + u + \frac{u\, y_2^{\,2}}{2\, r^2} - \frac{u\, v^2}{6\, r^2}$

$x_1 = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; - \; 9423^t,527$

$+ u = a_2 \cos \varrho_1 = \; . \; . \; - \; 10949^t,870$

$+ \frac{u\, y_2^{\,2}}{2\, r^2} = \; . \; . \; . \; . \; . \; - \; 0^t,188$

$- \frac{u\, v^2}{6\, r^2} = \; . \; . \; . \; . \; . \; + \; 0^t,052$

$x_2 = - \; 20373^t,533$

c) Der Richtungswinkel $\varrho'' = 180^0 + \varrho_1 - \frac{u\, y_1}{r^2 \sin 1''} - \frac{u\, v}{2\, r^2 \sin 1''}$

$180^0 = \; . \; . \; . \; . \; . \; + 180^0 \; 0' \; 0''$

$+ \varrho_1 = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + 122^0 \; 7' \; 27'',74$

$- \frac{u\, y_1}{r^2 \sin 1''} = \; . \; . \; + \; 0^0 \; 0' \; 0'',377$

$- \frac{u\, v}{2\, r^2 \sin 1''} = \; . \; . \; + \; 0^0 \; 0' \; 1'',833$

$\varrho'' = 302^0 \; 7' \; 29'',95$

3. Dritte Seite $A_2 \, A_3 = a_3$; $\log a_3 = 4{,}5361063$

Dreieckswinkel $A_1 \, A_2 \, A_3 =$ . . $194^0 \; 49' \; 29'',6$

Der vorige Richtungswinkel $\varrho'' = 302^0 \; 7' \; 29'',95$

Der neue Richtungswinkel $\varrho_2 = 136^0 \; 56' \; 59'',55$

a) Die Ordinate $y_3 = y_2 + v - \frac{u^2\, y_2}{2\, r^2} - \frac{u^2\, v}{6\, r^2}$

$$y_2 = \ldots\ldots\ldots + 19233^t{,}859$$
$$+ v_3 = a_3 \sin \varrho_2 = \ldots + 23460^t{,}746$$
$$- \frac{u^2\, y_2}{2\, r^2} = \ldots\ldots - \quad 0^t{,}564$$
$$- \frac{u^2\, v}{6\, r^2} = \ldots\ldots - \quad 0^t{,}220$$
$$y_3 = + 42693^t{,}821$$

b) Die Abscisse $x_3 = x_2 + u + \frac{u\, y_3{}^2}{2\, r^2} - \frac{u\, v^2}{6\, r^2}$

$$x_2 = \ldots\ldots\ldots - 20373^t{,}533$$
$$+ u = a_3 \cos \varrho_2 = \ldots - 25109^t{,}600$$
$$+ \frac{u\, y_3{}^2}{2\, r^2} = \ldots\ldots - \quad 2^t{,}130$$
$$- \frac{u\, v^2}{6\, r^2} = \ldots\ldots + \quad 0^t{,}214$$
$$x_3 = - 45485^t{,}049$$

c) Der Richtungswinkel $\varrho''' = 180^0 + \varrho_2 - \frac{u\, y_2}{r^2 \sin 1''} - \frac{u\, v}{2\, r^2 \sin 1''}$

$$180^0 = \ldots + 180^0\ 0'\ 0'',$$
$$+ \varrho_2 = \ldots\ldots + 136^0\ 56'\ 59'',55$$
$$- \frac{u\, y_2}{r^2 \sin 1''} = \ldots + \quad 0^0\ 0'\ 9'',272$$
$$- \frac{u\, v}{2\, r^2 \sin 1''} = \ldots + \quad 0^0\ 0'\ 5'',655$$
$$\varrho''' = 316^0\ 56'\ 54'',48.$$

Wie unbedeutend die Verbesserungen x, λ, τ sind, ergibt sich aus dem eben berechneten Beispiele; denn wenn die ebenen Coordinaten mit η und ξ bezeichnet werden, so ist bei der ersten Dreieckseite $A\,A_1$:

$$\eta_1 = + \quad 1794^t{,}798 \quad \text{und} \quad x = - 0^t{,}0025$$
$$\xi_1 = - \quad 9423{,}527 \quad \text{„} \quad \lambda = + 0^t{,}0001$$
$$\varrho' = \quad 349^0\ 12'\ 59'',88 \quad \text{„} \quad \tau = + 0'',16;$$

bei der zweiten Dreieckseite $A_1\,A_2$:

$$\eta_2 = + \quad 19233^t{,}899 \quad \text{und} \quad x = - 0^t{,}0404$$
$$\xi_2 = - \quad 20373^t{,}397 \quad \text{„} \quad \lambda = - 0^t{,}136$$
$$\varrho'' = \quad 302^0\ \ 7'\ 27'',74 \quad \text{„} \quad \tau = + 2'',21;$$

bei der dritten Dreieckseite $A_2\,A_3$:

$$\eta_3 = + \quad 42694^t{,}605 \quad \text{und} \quad x = - \quad 0^t{,}784$$
$$\xi_3 = - \quad 45483^t{,}133 \quad \text{„} \quad \lambda = - \quad 1^t{,}916$$
$$\varrho''' = \quad 316^0\ 56'\ 59'',55 \quad \text{„} \quad \tau = + \ 14'',93.$$

Dieselbe Ueberzeugung gewährt das Beispiel, welches Hansen in seiner Instruction für die thüringische Landesvermessung nach folgenden Formeln

berechnet hat. Will man nämlich die bereits auf Seite 227 berechneten ebenen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 .... und η_1, η_2, η_3, η_4 .... auf die kugelförmige Erdoberfläche reduciren, so hat man erst folgende Hilfsgrössen zu berechnen:

$$\varepsilon_2 = \varrho' (\eta_2 \xi_1 - \xi_2 \eta_1)$$
$$\varepsilon_3 = \varrho' (\eta_3 \xi_2 - \xi_3 \eta_2)$$
$$\varepsilon_4 = \varrho' (\eta_4 \xi_3 - \xi_4 \eta_3) \text{ etc.,}$$

wobei $\varrho' = 1 : 2\,r^2$, und für das berührte Beispiel $\log \varrho' = 6{,}66844 - 20$ ist.

Sind diese Hilfsgrössen berechnet, so wird

$x_1 = \xi_1$

$x_2 = \xi_2 - \varepsilon_2 \eta_2 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\eta_2 + \eta_1)$

$x_3 = \xi_3 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \eta_3 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\eta_2 + \eta_1) + \frac{1}{3} \varepsilon_3 (\eta_3 + \eta_2)$.

$x_4 = \xi_4 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \eta_4 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\eta_2 + \eta_1) + \frac{1}{3} \varepsilon_3 (\eta_3 + \eta_2) + \frac{1}{3} \varepsilon_4 (\eta_4 + \eta_3)$ etc.

$y_1 = \eta_1$

$y_2 = \eta_2 + \varepsilon_2 \xi_2 - \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\xi_2 + \xi_1)$

$y_3 = \eta_3 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \xi_3 - \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\xi_2 + \xi_1) - \frac{1}{3} \varepsilon_3 (\xi_3 + \xi_2)$

$y_4 = \eta_4 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \xi_4 - \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\xi_2 + \xi_1) - \frac{1}{3} \varepsilon_3 (\xi_3 + \xi_2) - \frac{1}{3} \varepsilon_4 (\xi_4 + \xi_3)$ etc.

Werden für ξ und η die auf Seite 227 angeführten Werthe gesetzt, so erhält man

$\varepsilon_2 = + 0{,}00002481$, $\varepsilon_3 = - 0{,}00003022$, $\varepsilon_4 = + 0{,}00004746$,

und hiermit die

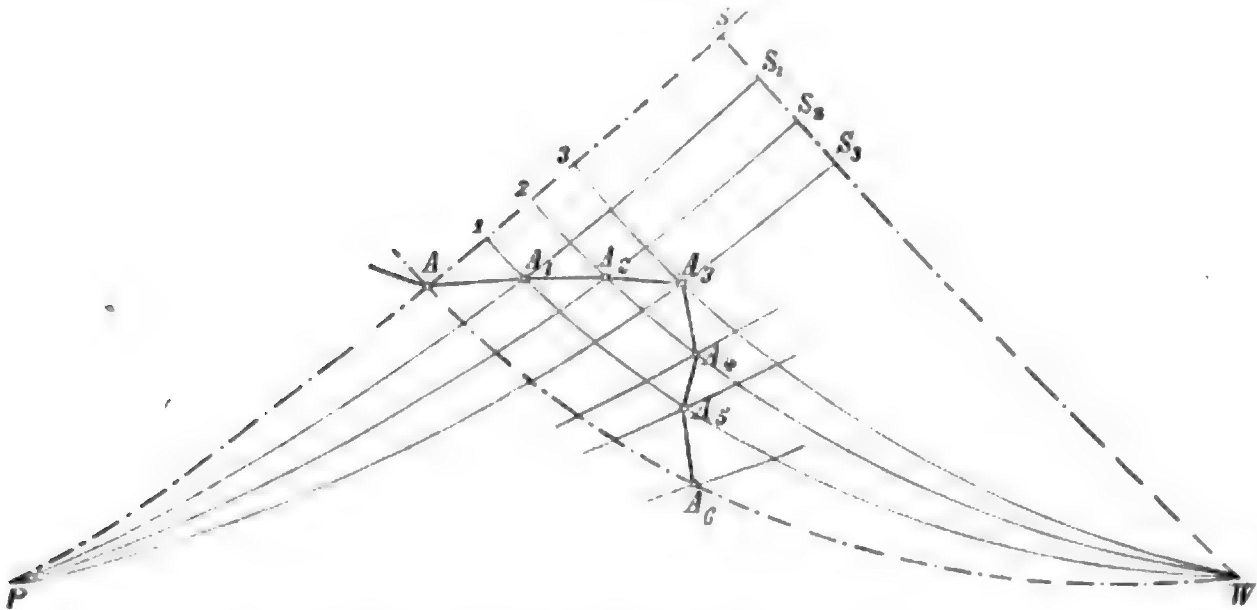
Reduction zu $\xi_2 = + 0^t{,}442$, also $x_2 = - 32668^t{,}24$
" " $\xi_3 = + 0^t{,}064$, " $x_3 = - 50850^t{,}50$
" " $\xi_4 = + 1^t{,}119$, " $x_4 = - 46020^t{,}06$ etc.,
" " $\eta_2 = - 0^t{,}261$, " $y_2 = - 38308^t{,}90$
" " $\eta_3 = - 0^t{,}017$, " $y_3 = - 39782^t{,}21$
" " $\eta_4 = - 0^t{,}694$, " $y_4 = - 56033^t{,}11$ etc.

Die Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte dritter Ordnung geschieht ohne Anwendung der Verbesserungen wegen der Erdkrümmung, und es kann diese Berechnung keine Schwierigkeit machen, da jedes Dreieck dritter Ordnung sich an eine Seite zweiter Ordnung anschliesst und für deren beide Enden die Coordinaten und Richtungswinkel bekannt sind. Ist ein Punkt dritter Ordnung von mehreren Seiten zweiter Ordnung aus eingeschnitten worden, so kann man seine Coordinaten mehrmals berechnen, was auch der Controle wegen nicht unterlassen werden darf. Weichen die Coordinatenwerthe nur äusserst wenig von einander ab, so genügt es meistens, diese Abweichungen durch die arithmetischen Mittel der Coordinatenwerthe auszugleichen; wollte man aber strenger verfahren, so müsste die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen werden, worüber in den betreffenden Werken näherer Aufschluss zu suchen ist.

7. Die geographische Lage der Netzpunkte und Seiten.

§. 111. Die in §. 110 entwickelten Formeln Nr. 200 bis Nr. 208 enthalten bereits eine Auflösung der vorliegenden Aufgabe; bei wirklichen Ausrechnungen bedient man sich aber jener Formeln in der Regel nicht, sondern gebraucht Näherungsausdrücke, welche bequemer zu handhaben sind. Dergleichen Ausdrücke sollen hier entwickelt werden, und zwar mit Bezug auf dieselbe Fig. 130, welche den früheren Entwickelungen zu Grunde lag, und aus strengen Formeln, welche zuerst aufzustellen sind. Die zu lösende Aufgabe kann nunmehr so ausgedrückt werden:

Fig. 130.



A u f der Erdoberfläche seien zwei Punkte A und A_1 in der Art gegeben, dass man von A die geographische Breite (φ) und Länge (λ), von A_1 seine kürzeste Entfernung a_1 von A, und von dem Bogen A A_1 das Azimuth α in dem Punkte A kennt: es soll die geographische Breite (φ') und Länge (λ') des Punkts A_1 nebst dem Azimuth (α') der Seite A A_1 in dem Punkte A_1 bestimmt werden.

Wie bisher nehmen wir auch jetzt die Fläche, auf der das Netz liegt, als eine Kugel vom Halbmesser r an. Soll demnach der auf dieser Kugel gegebene Bogen A $A_1 = a_1$ in Secunden ausgedrückt und $= \mathfrak{a}_1$ gesetzt werden, so geschieht dieses durch die Gleichung r $\mathfrak{a}_1 = 206265\, a_1$; es ist also $\mathfrak{a}_1$ bekannt. In dem sphärischen Dreiecke A A_1 P, das durch die Seite A A_1 und die beiden Meridiane von A und A_1 gebildet wird, ist ausser $\mathfrak{a}_1$ auch die Seite A P oder $\mathfrak{b} = 90^0 - \varphi$ und der Winkel A_1 A P $= 180^0 - \alpha$ bekannt.

Setzen wir nun wie früher den Winkel A P $A_1 = \mu_1$, den Winkel A A_1 P $= \beta_1 = \alpha' - 180^0$, und die Seite P $A_1 = \mathfrak{b}_1 = 90^0 - \varphi'$, so liefern einige bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie die Gleichungen:

$$\cos\varphi\ \ \text{tg}\,\varphi' = \sin\varphi\cos\mu_1 - \sin\mu_1\,\text{cotg}\,\alpha$$
$$\sin\alpha\,\text{cotg}\,\mu_1 = \cos\varphi\,\text{cotg}\,a_1 + \sin\varphi\cos\alpha.$$

Berechnet man nach dem Vorgange von Gauss[1] den Hilfswinkel ψ aus der Gleichung

$$\text{tg}\,\psi = \text{tg}\,a_1\cos\alpha \qquad (215)$$

und führt ψ als bekannte Grösse in die folgenden Entwickelungen ein, so erhält man zunächst aus der vorletzten Gleichung

$$\text{tg}\,\mu_1 = \text{tg}\,\alpha\sin\psi\sec(\varphi - \psi) \qquad (216)$$

und hiermit aus der ersten Grundgleichung

$$\text{tg}\,\varphi' = \cos\mu_1\,\text{tg}\,(\varphi - \psi). \qquad (217)$$

Führt man noch einen zweiten Hilfswinkel χ ein, welcher aus

$$\text{tg}\,\chi = \sin\alpha\sin a_1\,\text{tg}\,(\varphi - \psi) \qquad (218)$$

berechnet wird; setzt man ferner die algebraische Winkelsumme

$$\varphi - \psi - \varphi' = \sigma \qquad (219)$$

zieht tg φ' von tg $(\varphi - \psi)$ ab und berücksichtigt, dass $\cos\varphi'\sin\mu_1 = \sin a_1\sin\alpha$, so folgt nach kurzer Entwickelung

$$\sin\sigma = \text{tg}\,\chi\,\text{tg}\,{}^1\!/_2\,\mu_1\cos(\varphi - \psi). \qquad (220)$$

Zur Berechnung des Azimuths $\alpha' = 180^0 + \beta_1$ dient zunächst folgende aus den Neper'schen Analogien entspringende Gleichung:

$$\text{tg}\,{}^1\!/_2\,(\alpha - \beta_1)\cos{}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi) = \text{tg}\,{}^1\!/_2\,\mu_1\sin{}^1\!/_2\,(\varphi' + \varphi).$$

Entwickelt man cotg $(\alpha - \beta_1)$ und zieht cotg χ ab, so wird

$$\sin\chi\sin(a - \beta_1)\,[\text{cotg}\,(\alpha - \beta_1) - \text{cotg}\,\chi] = \sin(\alpha - \beta_1 - \chi).$$

Setzt man den Winkel

$$\alpha - \beta_1 - \chi = \tau \qquad (221)$$

und eliminirt mit Hilfe der vorausgehenden Gleichungen aus dem Ausdrucke für $\sin\tau$ alle Grössen bis auf α, a_1 und ψ, so ergibt sich:

$$\sin\tau = \sin\alpha\,\text{tg}\,{}^1\!/_2\,a_1\sin\psi. \qquad (222)$$

Ist der Hilfswinkel τ berechnet, so erhält man aus (221) den Winkel

$$\beta_1 = \alpha - \chi - \tau \qquad (223)$$

und damit das Azimuth

$$\alpha' = \pm 180^0 + \alpha - \chi - \tau. \qquad (224)$$

Liefert diese Gleichung das gesuchte Azimuth der Linie A A_1 in dem Punkte A_1, so erhält man aus Gleichung (199) die Breite jenes Punkts gleich

$$\varphi' = \varphi - \psi - \sigma \qquad (225)$$

und aus Gleichung (220) den Längenunterschied μ_1 zwischen A und A_1. Diese Formeln sind streng richtig, aber die Bestimmung der in ihnen vorkommenden kleinen Bögen aus den Logarithmen der Sinuse und Tangenten erheischt eine mühsame Interpolation, wesshalb man sie nicht unmittelbar anwendet, sondern mittelbar dadurch, dass man die trigonometrischen Functionen in Reihen entwickelt, wie im Nachstehenden an einigen dieser Formeln gezeigt wird. Setzt man nämlich

$$a_1\cos\alpha = m \text{ und } a_1\sin\alpha = n$$

[1] Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Göttingen 1844.

und berücksichtigt, dass, wenn a_1 als Grösse erster Ordnung gilt, bis auf Grössen fünfter Ordnung genau

$$\text{tg}\,\psi = \psi \sin 1'' \,(1 + \tfrac{1}{3}\,\psi^2 \sin^2 1'')$$

geschrieben werden darf, so folgt aus der Gleichung (222), wenn man für $\text{tg}\,a_1$ einen ähnlichen Werth substituirt:

$$\psi\,(1 + \tfrac{1}{3}\,\psi^2 \sin^2 1'') = m\,(1 + \tfrac{1}{3}\,a_1{}^2 \sin^2 1'').$$

Da nach (222) auch sehr nahe $\varphi = a_1 \cos \alpha = m$, so darf man innerhalb der bezeichneten Genauigkeitsgrenze $\psi^3 = m^3$ und desshalb

$$\varphi = m\,[1 + \tfrac{1}{3}\,(a_1{}^2 - m^2) \sin^2 1'']$$

setzen. Nun ist aber $m^2 + n^2 = a_1{}^2$, folglich $a_1{}^2 - m^2 = n^2$ und daher

$$\psi = m\,(1 + \tfrac{1}{3}\,n^2 \sin^2 1''). \qquad (226)$$

Drückt man diese Gleichung logarithmisch aus, wodurch an Bequemlichkeit der Rechnung gewonnen wird, so folgt

$$\log \psi = \log m + \log\,(1 + \tfrac{1}{3}\,n^2 \sin^2 1'').$$

Bezeichnet M den Modul des Logarithmensystems, also hier, wo briggische Logarithmen angewendet werden, die Zahl 0,43429448 ...., so ist nach der bekannten Reihe für $\log\,(1 + z)$ genau genug

$$\log\,(1 + \tfrac{1}{3}\,n^2 \sin^2 1'') = \tfrac{1}{3}\,M\,n^2 \sin^2 1''$$

und folglich, wenn das Product

$$\tfrac{1}{12}\,M \sin^2 1'' = k \text{ gesetzt und } \log k = 7{,}9397528 - 20$$

berechnet wird, so beträgt die an dem Logarithmus von m anzubringende Verbesserung $4\,k\,n^2$ und es ist schliesslich

$$\log \psi = \log m + 4\,k\,n^2. \qquad (227)$$

Aus der Gleichung (216), welche den Längenunterschied μ_1 liefert, folgt, wenn man wieder mit der früheren Genauigkeitsgrenze

$$\text{tg}\,\mu_1 = \mu_1 \sin 1'' \,(1 + \tfrac{1}{3}\,\mu_1{}^2 \sin^2 1'')$$
$$\sin \psi = \psi \sin 1'' \,(1 - \tfrac{1}{6}\,\psi^2 \sin^2 1'')$$

setzt, für ψ seinen Werth aus der Gleichung (226) einführt und das Product $\tfrac{1}{18}\,n^2\,\psi^2 \sin^4 1''$ weglässt,

$$\mu_1 = m\,\text{tg}\,\alpha \sec\,(\varphi - \psi)\,(1 + \tfrac{1}{3}\,n^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6}\,m^2 \sin^2 1'') - \tfrac{1}{3}\,\mu_1{}^2 \sin^2 1''.$$

Wird zur Abkürzung

$$m\,\text{tg}\,\alpha \sec\,(\varphi - \psi) = n \sec\,(\varphi - \psi) = u$$

geschrieben und berücksichtigt, dass $\mu_1{}^3 = u^3$ genommen werden darf, so erhält man zunächst

$$\mu_1 = u\,[1 + \tfrac{1}{3}\,(n^2 - u^2) \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6}\,m^2 \sin^2 1'']$$

und hierauf (da $n^2 - u^2 = -v^2$ ist, wenn $n\,\text{tg}\,(\varphi - \psi) = v$ gesetzt wird) den zur Berechnung von μ_1 geeigneten Ausdruck:

$$\mu_1 = u\,(1 - \tfrac{1}{3}\,v^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6}\,m^2 \sin^2 1'') \qquad (228)$$

und diese Gleichung geht, wenn man sie logarithmisch ausdrückt und das Product k beizieht, in folgende über:

$$\log \mu_1 = \log u - 2\,k\,m^2 - 4\,k\,v^2. \qquad (229)$$

Wird die Gleichung (220), welche den Winkel σ liefert, so geschrieben:

$$\sin \sigma = \sin a_1\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\mu_1 \sin \alpha \sin\,(\varphi - \psi);$$

werden hierauf folgende Werthe substituirt:

$$\sin \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \sin 1'' (1 - \tfrac{1}{6} \mathfrak{a}_1{}^2 \sin^2 1'')$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mu_1 = \tfrac{1}{2} \mu_1 \sin 1'' (1 + \tfrac{1}{12} \mu_1{}^2 \sin^2 1'')$$
$$\sin (\varphi - \psi) = v : u$$

und wird schliesslich berücksichtigt, dass die Grösse σ in Bezug auf $\mathfrak{a}_1$ selbst schon von der zweiten Ordnung ist, und dass also $\sin \sigma = \sigma \sin 1''$ gesetzt werden darf, da das zweite Glied der Reihe für $\sin \sigma$ schon Grössen sechster Ordnung enthält; so findet man nach kurzer Entwickelung:

$$\sigma = \tfrac{1}{2} n v \sin 1'' (1 - \tfrac{1}{6} \mathfrak{a}_1{}^2 \sin^2 1'' + \tfrac{1}{12} \mu_1{}^2 \sin^2 1'') \frac{\mu_1}{u}.$$

Nimmt man den Werth von $\mu_1 : u$ aus der Gleichung (228), setzt $\mu_1{}^2 = u^2 = v^2 + n^2 = v^2 + \mathfrak{a}_1{}^2 - m^2$, und vollzieht die angezeigten Operationen und Reductionen, so wird

$$\sigma = \tfrac{1}{2} v n \sin 1'' [1 - \tfrac{1}{12} \sin^2 1'' (\mathfrak{a}_1{}^2 + 3 m^2 + 3 v^2)] \qquad (230)$$

und wenn man diese Gleichung wieder logarithmisch ausdrückt und das constante Product k beizieht:

$$\log \sigma = \log (\tfrac{1}{2} v n \sin 1'') - k \mathfrak{a}_1{}^2 - 3 k m^2 - 3 k v^2. \qquad (231)$$

In gleicher Weise kann man aus den Gleichungen (221) und (222) die Werthe von χ und τ, sowie von $\log \chi$ und $\log \tau$ bestimmen; wir überlassen jedoch die Entwickelung derselben dem eigenen Fleisse des Lesers und setzen bloss die Resultate hierher:

$$\chi = v (1 - \tfrac{1}{6} \mathfrak{a}_1{}^2 \sin^2 1'') \qquad (232)$$
$$\log \chi = \log v - 2 k \mathfrak{a}_1{}^2 - 4 k v^2 \qquad (233)$$
$$\tau = \tfrac{1}{2} m n \sin 1'' (1 + \tfrac{5}{12} \mathfrak{a}_1{}^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2} m^2 \sin^2 1'') \qquad (234)$$
$$\log \tau = \log (\tfrac{1}{2} m n \sin 1'') + 5 k \mathfrak{a}_1{}^2 - 6 k m^2. \qquad (235)$$

Sind nach den vorausgehenden Gleichungen die Grössen ψ, σ, χ, τ bestimmt, so findet man aus Gleichung (225) die Breite φ', aus Gleichung (224) das Azimuth α' und aus Gleichung (228) den Längenunterschied μ_1, also alle Grössen, welche die vorliegende Aufgabe als zu suchende bezeichnet.

Die so gefundenen Längenunterschiede, Breiten und Azimuthe beziehen sich alle auf eine Kugelfläche vom Halbmesser r, während die mathematische Oberfläche der Erde ein Umdrehungsellipsoid ist. Es käme also darauf an, zu zeigen, wie die Grössen μ_1, φ' und α' gefunden werden, wenn man ihrer Bestimmung ein Ellipsoid zu Grunde legte, dessen Dimensionen nach Bessel in Tafel Nr. I des Anhangs angegeben sind; dem Zwecke dieses Buchs genügt es jedoch, in dieser Hinsicht lediglich auf die ausgezeichneten Arbeiten von Gauss [1] und Bessel [2] zu verweisen und einige Ergebnisse der hierher gehörigen Rechnungen anzuführen.

Was zunächst die **Azimuthe** der Dreieckseiten betrifft, so ist zu bemerken, dass deren Werthe für die Kugel auch für das Sphäroid gelten, da die Unterschiede selbst bei den grössten Landesvermessungen oft kaum

[1] Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher 1825. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1844.

[2] Gradmessung in Ostpreussen, Berlin 1838. Astronomische Nachrichten, herausgegeben von Schumacher, Nr. 86.

$^1/_{100}$ Secunde betragen. Um diese Behauptung wenigstens theilweise zu begründen, führen wir folgende numerische Berechnung eines Beispiels von Gauss an.

In dem hannover'schen Dreiecksnetze ist das Dreieck Brocken-Hohehagen-Inselsberg eines der grössten und vom mittleren Parallelkreise des Landes am weitesten entfernt. Die Logarithmen der in Toisen gegebenen Dreieckseiten sind:

Hohehagen-Inselsberg = 4,6393865,
Inselsberg-Brocken = 4,7353929,
Brocken-Hohehagen = 4,5502669,

und die von Gauss berechneten Reductionen, wie sie mit ihren Vorzeichen zu den Azimuthen auf dem Sphäroid addirt werden müssten, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten, folgende:

Brocken-Inselsberg = + 0,″00055,
Brocken-Hohehagen = + 0, 00196,
Hohehagen-Brocken = − 0, 00238,
Hohehagen-Inselsberg = − 0, 00332,
Inselsberg-Hohehagen = + 0, 00428,
Inselsberg-Brocken = − 0, 00083.

Demnach müssen die auf dem Sphäroid zwischen geodätischen Linien gemessenen Dreieckswinkel wie folgt abgeändert werden, um die zwischen grössten Kreisbögen liegenden Winkel auf der Kugel zu erhalten:

Winkel Brocken um + 0,″00141,
„ Hohehagen „ − 0, 00094,
„ Inselsberg „ − 0, 00511.

Auch der Unterschied zwischen den **geographischen Längen** auf der Kugel und dem Sphäroid ist im Allgemeinen nur sehr klein, und es besteht zwischen beiden die Beziehung

$$\mu_1 = \gamma\, \mu \tag{236}$$

wobei μ_1 die Länge auf der Kugel, μ jene auf dem Ellipsoid und γ einen Factor bezeichnet, der sich aus folgenden Gleichungen, in denen φ die Breite des Normalpunkts vorstellt, ergibt:

$$\gamma = \frac{1}{\cos \zeta} \tag{237}$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \varepsilon \,.\, \cos^2 \varphi \tag{238}$$

$$\sin \varepsilon = e \tag{239}$$

$$\varepsilon = 4^0\, 41'\, 9'',9826. \tag{240}$$

Ist beispielsweise $\varphi = 52^0\, 42'\, 2'',532$, so wird der Hilfswinkel

$$\zeta = 1^0\, 43'\, 26'',804$$

$$\log \gamma = 0{,}0001966.$$

Hat man nun für einen Ort, dessen Breite und Länge von der des Normalpunkts nur höchstens 5^0 bis 6^0 verschieden ist, den Längenunterschied auf der Kugel

$$\mu_1 = 2^0\, 16'\, 10'' = 8170''$$

gefunden, so erhält man den Längenunterschied μ auf dem Ellipsoid aus der Gleichung

$$\log \mu = \log \mu_1 - \log \gamma = 3{,}9120255,$$

welche $\mu = 8166'',305 = 2^0\ 16'\ 6'',305$ liefert. Die Differenz $\mu_1 - \mu$ beträgt somit nur 3,7 Secunden.

Bedeutender ist die Abweichung zwischen den geographischen Breiten auf der Kugel und dem Ellipsoid. Wie man die einen auf die anderen in der einfachsten Weise reduciren kann, hat Gauss in seinen schon mehrmals angeführten „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" gezeigt, auf die wir desshalb verweisen. Ebendaselbst hat er aber auch eine Tafel mitgetheilt, welche alle Rechnungen in dieser Beziehung erspart, indem sie die einander entsprechenden Breiten auf der Kugel und dem Sphäroid zwischen 46⁰ 10′ und 58⁰ 40′ enthält. Wir haben diese Tafel unter Nr. XVIII im Anhange aufgenommen und dazu nur noch zu bemerken, dass die erste Columne die Breiten auf der Kugel und die zweite jene auf dem Sphäroid angibt.

8. Verbindung der Messtischblätter mit dem Dreiecksnetze.

§. 112. Ist die Triangulation des Landes vollendet, so besteht die nächste Arbeit in der Eintheilung der aufzunehmenden Fläche in Vierecke von solcher Ausdehnung, dass jedes derselben in dem Massstabe der Aufnahme ein Messtischblatt von $1^1/_2{}'$ bis 2′ Seitenlänge nahezu ausfüllt. Diese unter sich zusammenhängenden Vierecke bilden im Gegensatze des trigonometrischen Netzes das graphische Netz und es bestehen dieselben entweder aus Quadraten, Rechtecken oder Paralleltrapezen, welche sich an den Meridian und das Perpendikel (beziehungsweise den Parallelkreis) des Normalpunkts der Aufnahme anschliessen. Die Form der Netzvierecke hängt lediglich von den Bestimmungen der Direction der Landesvermessung ab; welche Form aber auch gewählt werden mag, so kommt es doch immer darauf an, die Begrenzungslinien der Vierecke auf die Detailblätter[1] und innerhalb derselben die auf sie treffenden Netzpunkte genau aufzutragen, damit der Geometer auf dem Felde den Messtisch oder seine Operationslinien so gut als möglich orientiren kann. Wir werden die Lösung dieser Aufgabe für zwei Formen des graphischen Netzes geben, nämlich:

a) für eine Abtheilung der Terrainoberfläche nach Paralleltrapezen, welche (wie in Preussen und Sachsen-Gotha) aus Abschnitten von Meridianen und Parallelkreisen gebildet sind, und

b) für eine Eintheilung der Landesfläche in Quadrate, welche (wie in Bayern und Württemberg) aus Abschnitten von Curven gebildet werden, die dem Meridian und Perpendikel des Normalpunkts nahezu parallel laufen.

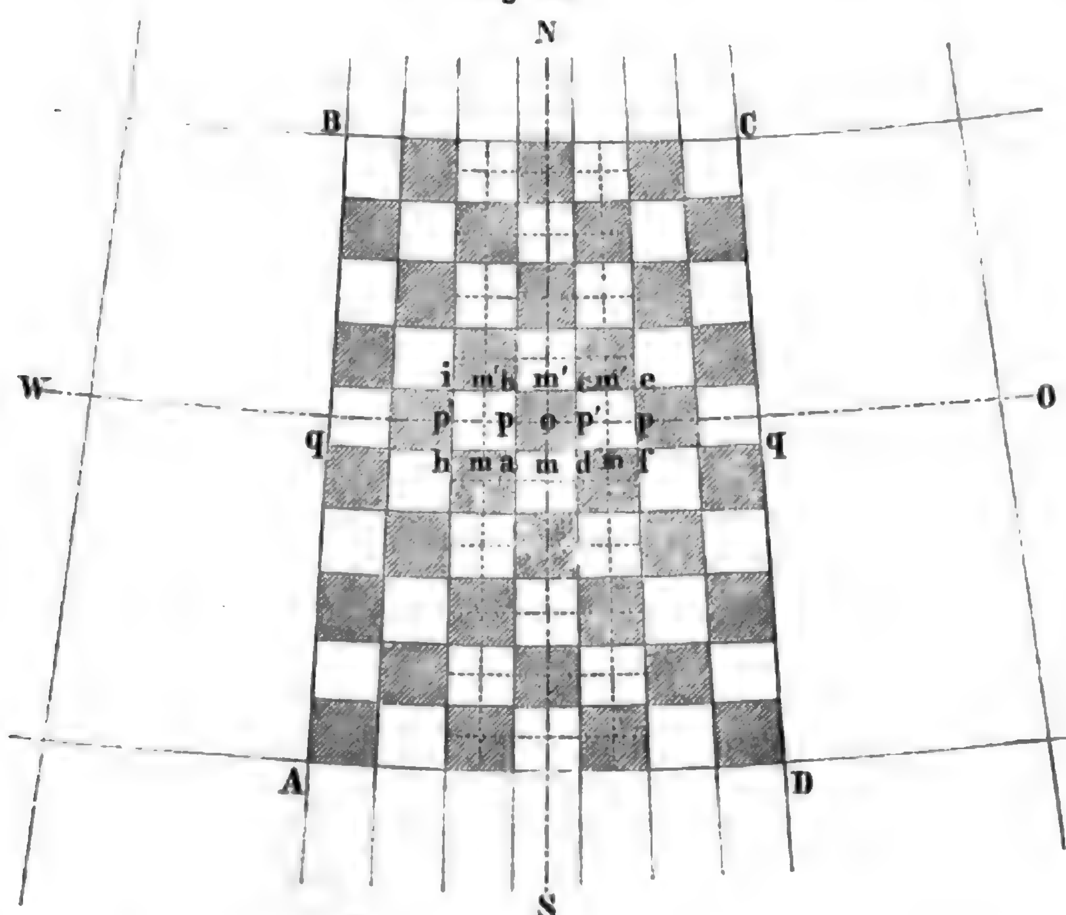
§. 113. Aufgabe. Es sollen auf Grund einer voraus-

[1] Wenn in der Folge manchmal der Ausdruck »Messblatt« gebraucht wird, so ist derselbe mit »Detailblatt« gleichbedeutend und folglich auch für die Aufnahmen mit dem Theodolithen gültig.

gegangenen Triangulirung die Messblätter für die Detailaufnahme vorbereitet werden, wenn das graphische Netz aus Abschnitten von Meridianen und Parallelkreisen gebildet wird.

In Preussen und Sachsen-Gotha geschieht die topographische Vermessung im Massstabe von 1 : 25000; man hat daher zu dem graphischen Netze Vierecke gewählt, welche in der Richtung von Osten nach Westen von zwei Meridianabschnitten begrenzt werden, die 6 Minuten der geographischen Breite umfassen, während sie in der Richtung von Süden nach Norden aus zwei Abschnitten von Parallelkreisen bestehen, die einem Längenunterschiede von 10 Minuten entsprechen. Auf diese Weise wird ein Stück der Erdoberfläche, welches einen Grad Länge und Breite umfasst, auf 60 Blättern

Fig. 132.



dargestellt. Die Abschnitte der Meridiane und Parallelkreise sind zwar in aller Strenge krumme Linien, aber so lange diese Abschnitte sich nur über 6 und 10 Minuten Breite und Länge ausdehnen, können sie unbedenklich als gerade Linien angesehen werden.

Die Höhen und Breiten der einzelnen Blätter müssen aus den bekannten Dimensionen des Erdsphäroids und den geographischen Längen und Breiten der Blattmittelpunkte berechnet werden. Will man, dass auch die Parallelkreise, welche ganzen Breitengraden angehören, als Mittellinien der Netzvierecke erscheinen, so muss man von einem Normalpunkte ausgehen, dessen Breite ein Vielfaches von 6 Minuten ist, wobei man aus anderen Gründen gut thut, diesen Punkt soviel als möglich in der Mitte des zu vermessenden

Landes anzunehmen. Eine ähnliche Rücksicht kann man bezüglich der Länge dieses Punkts eintreten lassen, welche demnach ein Vielfaches von 10 Minuten sein müsste. Auf den Meridian und das Perpendikel dieses Normalpunkts sind alle Coordinaten der Netzpunkte zu reduciren, wenn sie nicht ursprünglich darauf bezogen wurden. Wir nehmen an, dass diese Reduction schon geschehen sei, und dass $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ etc. die für den Normalpunkt geltenden Coordinaten der Netzpunkte A_1, A_2, A_3 etc. vorstellen. Ist die geographische Länge des Normalpunkts z. B. = 28° 20′ und seine Breite = 50° 36′ gegeben, so sind die den Mitten der Messtischblätter entsprechenden geographischen Lagen folgende:

Breiten von Süd nach Nord:	Längen von West nach Ost:
50° 36′; 50° 42′; 50° 48′; 50′ 54′ etc.	28° 20′; 28° 30′; 28° 40′; 28° 50′ etc.
Breiten von Nord nach Süd:	Längen von Ost nach West:
50° 36′; 50° 30′; 50° 24′; 50° 18′ etc.	28° 20′; 28° 10′; 28° 0′; 27° 50′ etc.

Um die Abmessungen der Netzvierecke kennen zu lernen, sind dieselben beispielsweise für die Breite von 50° bis 51° in der nachfolgenden von Hansen berechneten Tabelle in preussischen Fussen zusammengestellt. Die Blattdimensionen ergeben sich selbstverständlich durch Division mit 25000.

Geograph. Breite.	Höhe des Vierecks.	Breite des Vierecks.	Geograph. Breite.	Höhe des Vierecks.	Breite des Vierecks.
		31754′	50° 30′	29531′	31358′
50° 0′	29529′	31650′	50° 36′	29532′	31292′
50° 6′	29530′	31624′	50° 42′	29532′	31226′
50° 12′	29530′	31558′	50° 48′	29533′	31160′
50° 18′	29530′	31492′	50° 54′	29533′	31092′
50° 24′	29531′	31424′	51° 0′	29534′	31026′

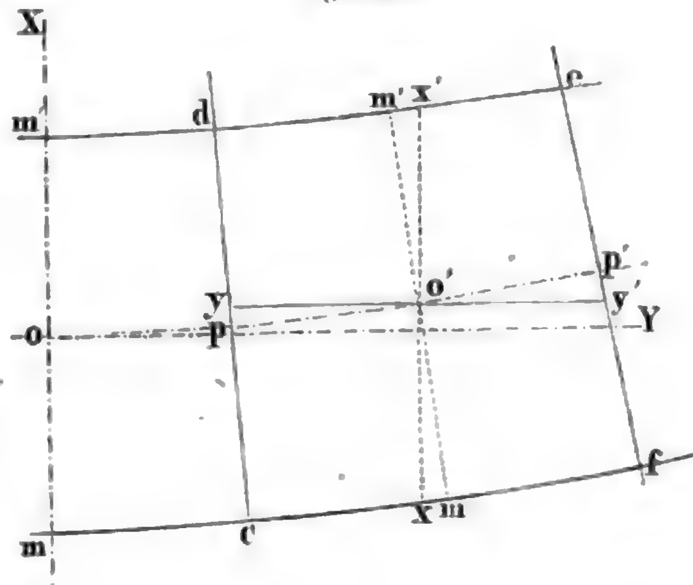
Nachdem diese Dimensionen berechnet sind, hat man auf jedes mit Papier bespannte Messtischblatt zunächst den ihm zugehörigen mittleren Meridian und die Begrenzungen mit feinen Tuschlinien zu zeichnen, was mit genauen Massstäben und Stangenzirkeln so sorgfältig als möglich geschieht. Es wird zu dem Ende jedes Blatt durch eine von Süden nach Norden laufende Linie (mm′) halbirt, diese Linie wird gleich der berechneten Blatthöhe gemacht, an ihren Endpunkten werden Senkrechte zu ihr errichtet, auf diesen trägt man die halben Blattbreiten und zwar an der Nordseite die kleineren (m′b = m′c) und an der Südseite die grösseren (ma = md) ab, und endlich verbindet man die Eckpunkte (a, b, c, d) durch gerade Linien.

Sind alle Blätter so weit zubereitet, so kommt es darauf an, ob die einzelnen Netzpunkte mittels ihrer Coordinaten oder ihrer geographischen Längen und Breiten in die Blätter eingetragen werden sollen. Ist letzteres der Fall, so theilt man jedes Netzviereck (abcd) an der Südseite (ad) und an der Nordseite (bc) in 10, an der Ost- und Westseite aber in je 6 gleiche

Theile und verbindet die Theilungspunkte so durch gerade Linien, dass man 60 kleine Vierecke erhält, wovon jedes eine Minute Länge und Breite umfasst. In diesen kleinen Vierecken werden alsdann die durch ihre geographischen Längen und Breiten ausgedrückten Netzpunkte mittels senkrechter Abstände, oder, wenn man will, durch fortgesetzte Theilung der Vierecke aus Meridian- und Parallelkreisabschnitten bestimmt. Hat man es dagegen unterlassen, die geographischen Längen und Breiten der Netzpunkte zu berechnen, so muss man, wie bei der thüringischen Landesvermessung geschieht, in jedem Messtischblatte die in der Mitte seines Meridianabschnitts entspringenden Coordinatenaxen dieses Blatts einzeichnen, was auf folgende Weise geschieht.

Für die Blätter, deren mittlerer Meridian mit dem Hauptmeridian zusammenfällt, ist selbstverständlich der mittlere Meridian (m m′) die Abscissenaxe und die Senkrechte (pp′) in seiner Mitte (o) die Ordinatenaxe. Auf allen Blättern aber, welche östlich oder westlich vom Hauptmeridian liegen, weicht die Abscissenaxe von dem mittleren Meridian und folglich die Ordinatenaxe von dem mittleren Parallelkreise ab; denn die Seitenmeridiane convergiren gegen den Hauptmeridian und die Parallelkreise stehen auf ihnen senkrecht, während die Abscissenaxen dem Hauptmeridian und die Ordinatenaxen dessen Perpendikel parallel laufen. Die beigedruckte Fig. 133, in welcher m m′ die Meridiane, p p′ die Parallelkreise, x x′ die Abscissen- und y y′ die Ordinatenaxen vorstellen, macht dieses anschaulich, und man entnimmt daraus leicht, dass, um die Axen x x′ zu erhalten, auf allen Blättern der Ostseite des Hauptmeridians oben die Abweichung m′x′ rechts und unten dieselbe Abweichung = m x links von m m′ anzutragen ist, während auf allen Blättern der Westseite des Hauptmeridians m′x′ links und m x rechts von m m′ liegen muss. Wie gross die Abweichungen m x = m′x′ für die einzelnen Blätter sind, lässt sich aus den Dimensionen des Erdsphäroids berechnen. Wir wollen indess auf diese Rechnungen hier nicht näher eingehen, da wir bei den Kartenprojectionen umständlicher davon zu reden haben, sondern lediglich bemerken, dass für jene vom Hauptmeridian gerechnete Länge von 10 Minuten die Abweichung der x Axe = 33′, für 20 Minuten = 66′, für 30 Minuten = 99′, für 40 Minuten = 133′, für 50 Minuten = 166′ und für 60 Minuten = 199′ ist. Entspricht demnach der Abstand o o′ der Blattmitten 10 Minuten, so ist $m'x' = \frac{33'}{25000} = \frac{3300'''}{25000}$

Fig. 133.



$= 0''',13$, bei dem östlichen (rechtseitigen) Blatte rechts, bei dem westlichen (linkseitigen) Blatte aber links und $mx = 0''',13$ bei dem östlichen Blatte links, bei dem westlichen aber rechts vom Meridian $m m'$ aufzutragen.

Es bleibt nun noch übrig, zu zeigen, wie die Coordinaten der Dreieckspunkte in die nunmehr auch mit den Axen versehenen Detailblätter eingetragen werden; dieses Eintragen setzt jedoch voraus, dass man die Coordinaten der Blattmittelpunkte kenne. Da indessen diese Punkte nicht von der Triangulirung abhängen, sondern auf beliebigen Annahmen beruhen, so kann man sie im Voraus ein für allemal berechnen und in einer Tabelle zusammenstellen. Einen Theil einer solchen von Hansen berechneten Tabelle theilen wir am Ende dieser Seite mit dem Bemerken mit, dass die in der Ueberschrift vorkommenden Längenunterschiede 0, $\pm$ 10 und $\pm$ 20 Minuten sich auf den Hauptmeridian der Messung beziehen, und dass die Coordinaten in preussischen Ruthen ausgedrückt sind.

Was den Gebrauch dieser Tafel betrifft, so ist derselbe folgender. Hat man die Coordinaten des einzutragenden Dreieckspunkts, so findet man damit das Messtischblatt, in welches er fällt, indem man in der Tafel die Coordinatenwerthe aufsucht, welche den seinigen am nächsten kommen. Sind z. B. die Coordinaten eines solchen Punkts

$$x = + 12734^0,94 \text{ und } y = - 2783^0,12,$$

so liegen diesen Werthen am nächsten die Coordinaten

$$x' = + 11808^0,79 \text{ und } y' = - 3159^0,04,$$

welche zu der geographischen Breite $\varphi = 50^0\ 12'$ und zu dem östlichen Längenunterschiede $\lambda = 10'$ gehören. Der Punkt fällt somit auf das Blatt, dessen Mitte diese Breite und Länge hat. Stellt man hierauf die Coordinatenunterschiede

$$x - x' = + 926^0,15 \text{ und } y - y' = + 375^0,92$$

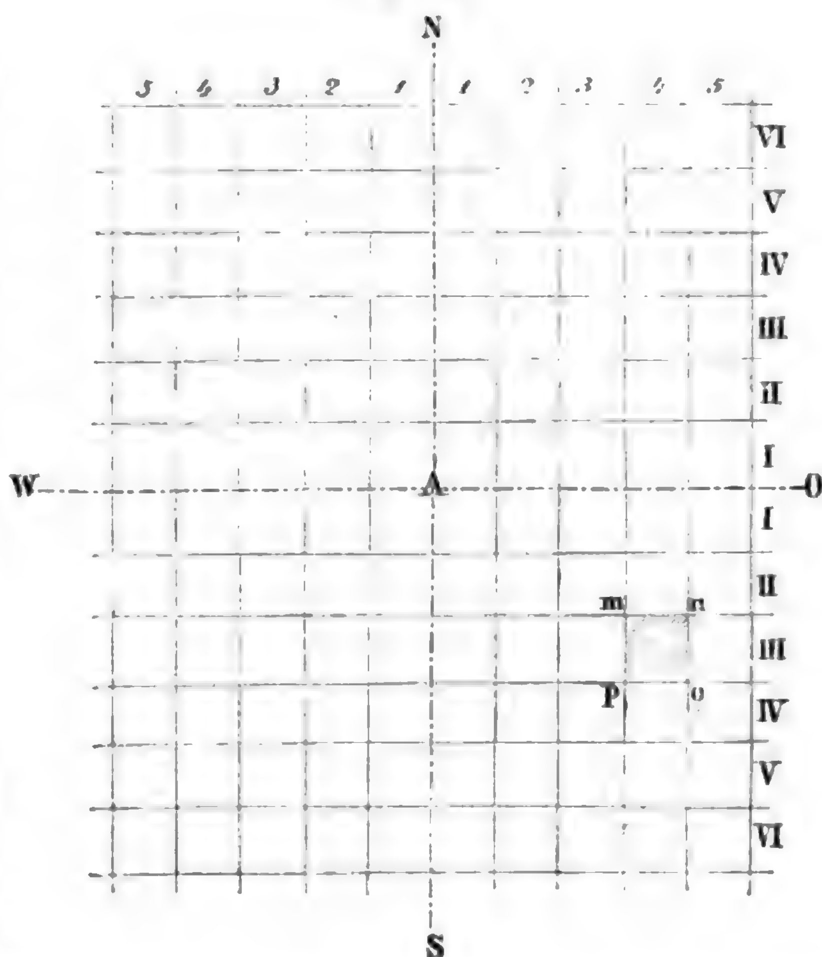
Geograph. Breite φ.	Längenunterschied = 0.		Längenunterschied = $\pm$ 10'.		Längenunterschied = $\pm$ 20'.	
	x	$\pm$ y	x	$\pm$ y	x	$\pm$ y
51⁰12'	— 17720,04	0	— 17723,52	3092,60	— 17733,98	6185,18
51 6	14766,57	0	14770,06	3099,27	14780,53	6198,53
51 0	11813,15	0	11816,64	3105,93	11827,14	6211,86
50 54	8859,78	0	8863,28	3112,59	8873,79	6225,18
50 48	5906,47	0	5909,97	3119,24	5920,50	6238,49
50 42	— 2953,21	0	2956,72	3125,90	2967,27	6251,79
50 36	0	0	— 3,52	3132,55	— 14,08	6265,08
50 30	+ 2953,15	0	+ 2949,62	3139,18	+ 2939,06	6278,35
50 24	5906,26	0	5902,62	3145,80	5892,13	6291,60
50 18	8859,32	0	8855,78	3152,42	8845,17	6304,84
50 12	11812,34	0	11808,79	3159,04	11798,17	6318,07
50 6	14765,30	0	14761,75	3165,65	14751,11	6331,29
50 0	+ 17718,21	0	+ 17714,66	3172,25	+ 17704,00	6344,50

her, so ist die Länge x — x' südlich und y — y' westlich von der Mitte des Blatts auf den in dasselbe eingetragenen Axen abzuschneiden und durch Perpendikel der Punkt, den man sucht, zu bestimmen.

§. 114. **Aufgabe. Die Messblätter für die Detailaufnahme eines Landes in dem Falle vorzubereiten, wo das graphische Netz aus Quadraten besteht, deren Seiten dem Hauptmeridian und dessen Perpendikel parallel laufen.**

Ein graphisches Netz von Quadraten mit 8000' Seite ist in Bayern und eines mit 4000' Seite in Württemberg zur Anwendung gekommen. In dem erstgenannten Lande beträgt der Massstab der Detailmessung (mit geringen Ausnahmen) 1 : 5000 und in letzterem 1 : 2500; in beiden Ländern erhalten folglich die Messblätter Seiten von 16 Decimalzoll Länge. Da das württembergische Masssystem im Wesentlichen mit dem bayerischen übereinstimmt, so werden wir die vorliegende Aufgabe lösen, indem wir lediglich das in Bayern beobachtete Verfahren zur Vorbereitung der Messtischblätter für die Detailaufnahme beschreiben.

Fig. 134.



Stellt der Punkt A in Fig. 134 den Normalpunkt der Messung (nördl. Frauenthurm), S N dessen Meridian und O W das Perpendikel desselben vor, so wird zunächst die ganze Landesoberfläche in vier Theile zerlegt, welche durch Südwest (S W), Nordwest (N W), Nordost (N O) und Südost (S O) bezeichnet werden. Theilt man hierauf den Meridian SN in lauter gleiche Theile von 8000' Länge und zieht durch die Theilungspunkte grösste Kreise, welche auf SN senkrecht stehen, so wird jedes Viertel in **Schichten** zerlegt, welche fast durchgehends gleich breit sind, da die Ordinatenkreise (s. §. 95) auf die Breite des Landes nur äusserst wenig convergiren. Diese Schichten werden mit römischen Ziffern bezeichnet, wie aus der Figur zu entnehmen ist. Theilt man ferner jeden Ordinatenkreis vom Meridian ab in lauter gleiche Theile von 8000' Länge und verbindet die Theilungspunkte durch gerade Linien, so wird jede Schichte in Vierecke zerlegt, welche

nahezu Quadrate sind und auf die in der Figur angegebene Weise durch arabische Ziffern (Nummern) bezeichnet werden. Will man nun irgend ein Viereck (Messtischblatt, Steuerblatt) benennen, so geschieht diess durch Angabe des Viertels, der Schichte und der Nummer. Das schraffirte Blatt mnop z. B. wird genannt und auch überschrieben: SO. III. 4.

Nach dieser geometrischen Eintheilung der Oberfläche des Landes stellen die Detailblätter Theile der Kugelfläche vor, welche in der Richtung von Ost nach West stets gleich breit sind, in der Richtung von Süd nach Nord aber eine etwas kleinere Höhe als 8000 Fuss haben, da die Ordinatenkreise convergiren und sich im Aequator schneiden. Diese Verschiedenheit der Höhe wächst mit dem Abstande der Blätter vom Münchener Meridian und beträgt für ein Blatt, dessen Nummer = n ist, 0,0005344 n^2 Fuss.[1] Ein Blatt also, das die Nummer 100 hat, von München somit im Mittel 804000 Fuss östlich oder westlich entfernt ist, hat eine Höhe von 8000′ — 5,344 = 7994,656 Fuss. Die Differenz von 5′,344 = 534‴,4 beträgt aber im Massstabe von 1 : 5000 nur 0‴,106 oder nahezu 1 Zehntel Linie, was in der Zeichnung des Vierecks kaum zu bemerken ist. Wegen dieses geringen Unterschieds — der noch dazu der grösste ist, da weder die östlichen noch die westlichen Grenzen des Landes mehr als 804000 Fuss vom Münchener Meridian abliegen — kann man wohl alle Netzvierecke als Quadrate bezeichnen, wenn sie es auch in aller Strenge nicht sind.

Soll nun ein trigonometrischer Punkt, dessen Coordinaten

$$x = +124824',5 \text{ und } y = -93218',3$$

sind, wobei die positive Axe der x der südliche Theil (AS) des Meridians und die positive Axe der y der westliche Theil (AW) des Perpendikels ist, aufgetragen werden, so ist zunächst das Blatt zu bestimmen, in das er fällt. Dieses Blatt liegt aber offenbar in dem südöstlichen Viertel, und zwar in der 12. Nummer der XVI. Schichte; seine Bezeichnung ist demnach SO. XVI. 12. Man findet nämlich die Schichte, wenn man die Abscisse, und die Nummer, wenn man die Ordinate durch 8000′ dividirt und die Ganzen des Quotienten um 1 vermehrt.

[1] Zu diesem Ausdrucke gelangt man nach Soldner wie folgt: Da nämlich die östlichen und westlichen Seiten der Tischblätter dem Meridian (AN) des Normalpunkts parallel laufen, so können sie als Theile von Parallelkreisen zu diesem Meridian betrachtet werden. Denkt man sich nun durch die die Höhen der Tischblätter bestimmenden, je 8000 Fuss von einander entfernten Theilungspunkte des Hauptmeridians und die zu WO parallele Axe Ebenen gelegt, so ist klar, dass diese Höhen überall an der Axe gleiche Winkel umschliessen, und sich desshalb verhalten wie die Halbmesser der Parallelkreise, auf denen sie liegen. Heisst die Ordinate, welche einem Tischblatte entspricht, O, so ist sie in Theilen des Halbmessers $= \frac{O}{r}$ und der Halbmesser des zugehörigen Parallelkreises ist $r \cos \frac{O}{r}$. Heisst s die Höhe des der Ordinate O entsprechenden Tischblatts, so verhält sich offenbar 8000 Fuss zu s Fuss wie r zu $r \cos \frac{O}{r}$ oder wie 1 zu $\cos \frac{O}{r}$, d. h. es ist

$$s = 8000 \,.\, \cos \frac{O}{r} = 8000 \,.\, \cos \frac{n \,.\, 8000}{r} = 8000 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{8000}{r}\right)^2 n^2\right) = 8000 - 0{,}0005344\, n^2$$

und folglich der Unterschied $8000 - s = 0{,}0005344\, n^2$ Fuss.

Demgemäss erhält man im vorliegenden Falle

$$\frac{x}{8000} = \frac{124824'.5}{8000'} = 15{,}6; \text{ also die Schichte} = \text{XVI},$$

$$\frac{y}{8000} = \frac{93218'.3}{8000'} = 11{,}6, \text{ mithin die Nummer} = 12.$$

Stellt in der Fig. 135 das Viereck abcd das Blatt SO. XVI. 12. vor, so ist die Abscisse des Punkts d oder

$$AB = Cd = 15 \,.\, 8000 = 120000'$$

und die Ordinate desselben Punkts d oder

$$AC = Bd = 11 \,.\, 8000 = 88000'.$$

Fig. 135.

Es sind folglich auf der westlichen Seite und vom nördlichen Rande (da) des Blatts gegen den südlichen (cb) hin noch

$$124824',5 - 120000' = 4824',5 = de$$

aufzutragen, um die Abscisse des gegebenen Punkts

$$Ce = x = +\,124824',5$$

zu erhalten, und auf der nördlichen Seite (da) vom westlichen Rande (dc) gegen den östlichen (ab)

$$93218',3 - 88000' = 5218',3 = di$$

abzuschneiden, um durch die Parallelen zu ad und cd den gesuchten Punkt p zu finden. Es versteht sich von selbst, dass die Abmessungen de und di durch ihre Ergänzungen ec und ai controlirt werden, und dass man die Parallelen ef, ik nur durch die Punkte f und k zieht, welche ebenso auf den Quadratseiten einzumessen sind, wie e und i.

Sind die Abscissen der aufzutragenden Punkte sehr gross, so bedürfen sie wegen der Convergenz der Ordinatenkreise noch einer kleinen Reduction. Nennt man diese Reduction δ, die Ordinate y, den Erdhalbmesser r, und bezeichnet u den Rest, welcher sich bei der Bestimmung der Schichte eines Blatts ergibt, nachdem man die Ganzen des Quotienten gefunden hat, so ist

$$\delta = \frac{u^2 y^2}{2 r^2} \tag{241}$$

und diese Grösse wird von der Abscisse u, die nach der Lage des Blatts von der Ecke an auf der östlichen oder westlichen Grenzlinie nach Norden oder Süden hin aufzutragen ist, abgezogen, so dass man also statt u die Länge

$$u - \delta = u - \frac{u^2 y^2}{2 r^2}$$

abzumessen hat, um die Abscisse des trigonometrischen Punkts auf dem ihm angehörigen Blatte zu erhalten. Diese Reductionen δ sind freilich sehr

klein, wie das folgende Beispiel zeigt, müssen aber doch berücksichtigt werden, wenn die Ordinate y gross ist, d. h. wenn das Blatt weit vom Hauptmeridian abliegt. Berechnet man δ für den Punkt p, der dem vorigen Beispiele zu Grunde lag, so ist hier

$$u = x - 15 . 8000 = 4824',5 = 482^0,45$$
$$y = - 93218',3 = - 9321^0,83$$
$$\log r = 6,3402033; \log \frac{1}{2r^2} = 0,01856 - 13;$$

folglich, wenn man substituirt und ausrechnet, $\delta = 0,00437$ Ruthen $= 0,0437$ Fuss. Würde die Abscisse x bleiben, y_1 aber 10mal so gross sein als y, so erhielte man selbstverständlich für δ_1 die 100fache Grösse des vorigen Werths, also $\delta_1 = 4,37$ Fuss. Diese Reduction entspräche somit einem Blatte, dessen Nummer

$$n = \frac{932183'}{8000'} = 117$$

wäre, und welches über 36 Meilen vom Hauptmeridian entfernt läge. In dem Massstabe von 1 : 5000 ist aber die absolute Grösse von 4,37 Fuss $= 0',00087 = 0''',087$, somit kleiner als $^1/_{10}$ Linie. Es sind demnach auch auf den entferntesten Detailblättern die Reductionen δ ganz unbedeutend.

9. Die Detailmessung der Bodenfläche.

§. 115. Die Aufnahme der Einzelnheiten der Bodenfläche eines Landes zerfällt in zwei besondere Verrichtungen, nämlich in die Bestimmung der Richtpunkte und Richtungslinien, und in die Vermessung der einzelnen Parzellen. Mit dem ersteren Geschäfte haben sich nach den in mehreren Ländern üblichen Titeln die „Obergeometer," mit dem letzteren die „Geometer" zu befassen, während die unter Nr. 1 bis 6 betrachteten Arbeiten, welche sich auf die Anlage und Berechnung des Dreiecksnetzes beziehen, den „Trigonometern," die Bestimmungen der geographischen Lage des Normalpunkts und des Azimuths einer Dreieckseite aber dem „Astronomen" des Landes übertragen werden. Hier ist fast nur von dem Geschäfte der Obergeometer die Rede, da die Arbeiten der Geometer schon im Abschnitte II, C besprochen wurden. Nur das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische kommt beiden zu.

Die bisherige Vorbereitung der Messblätter, wenn sie nach Nr. 8 von den Obergeometern vollzogen ist, reicht weder zur Orientirung des Messtisches auf dem Felde, noch zum Eintragen der Abscissenlinien hin, weil bei einem Massstabe der Aufnahme von 1 : 5000 von den Punkten erster, zweiter, dritter Ordnung selten mehr als einer auf ein Blatt trifft, während viele Blätter gar keinen enthalten. Es müssen also ausser den schon bestimmten Netzpunkten noch so viele neue abgesteckt, eingemessen und auf die Blätter übergetragen werden, dass der Geometer im Stande ist, behufs der Parzellarmessung seinen Messtisch oder seine Abscissenlinien vollständig zu orientiren.

Zur einfachen Orientirung des Messtisches genügen zwar zwei Punkte (A, B) des Felds, welche in verjüngter Entfernung (a, b) auf dem Blatte bezeichnet sind; aber die Prüfung der Aufstellung erfordert ausser diesen zwei Punkten entweder noch einen dritten Punkt (C, c) auf dem Felde und dem Messtische, oder aber eine Visirrichtung (ef) zwischen zwei anderen Punkten (E, F), die zwar ausserhalb des Blattbezirks liegen dürfen, wovon aber doch stets einer von den beiden ersten Punkten (A, B) aus sichtbar sein muss.

Wird zur Aufnahme der Einzelnheiten des Terrains gar kein Messtisch verwendet, so muss die trigonometrische Bestimmung von Terrainpunkten so weit fortgesetzt werden, dass ihre gegenseitige Verbindung eine hinreichende Anzahl von Abscissenlinien gewährt, an welche man mittels Ordinaten alle übrigen Punkte antragen kann. Bei der Landesvermessung in Schwarzburg-Sondershausen z. B. werden mit Hilfe des Theodolithen so viele Punkte bestimmt, dass auf je 12 bis 14 Morgen einer trifft.

Wo nun an den zur Orientirung oder zum Auftragen des Details erforderlichen drei Punkten oder zwei Abscissenlinien Mangel ist, müssen noch mehr Punkte bestimmt werden, und diese Bestimmungen können offenbar nur von dem trigonometrischen Netze ausgehen, da sie Nichts als eine weitere Fortsetzung dieses Netzes sind. So lange die hierauf bezüglichen Arbeiten bloss darin bestehen, neue auf dem Felde bezeichnete Punkte durch Vorwärtsabschneiden mit dem Theodolithen zu bestimmen, ist hier weiter Nichts mehr zu bemerken; sind aber die trigonometrischen Punkte, wie dieses namentlich bei denen dritter Ordnung häufig der Fall ist, unzugänglich, so dass kein Vorwärtsabschneiden stattfinden kann: so hat man eine der nachfolgenden Aufgaben zu lösen.

§. 116. Aufgabe. Mit Hilfe der bekannten Lage dreier unzugänglichen Punkte des Felds die unbekannte Lage eines gegebenen vierten Punkts von dessen Stelle aus zu bestimmen.

Die verschiedenen graphischen Lösungen dieser sogenannten „Pothenot-schen Aufgabe“ wurden schon im §. 76 betrachtet; hier haben wir es mit ihrer analytischen Auflösung zu thun, welche, wie die graphische, ausser der bekannten Lage der drei gegebenen Punkte nur die Messung zweier Winkel von dem vierten zu bestimmenden Punkte aus erfordert.

Es seien (Fig. 136) A, B, C die drei Punkte des Felds, deren Coordinaten x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 in Bezug auf die Abscissenaxe O S und die darauf senkrechte Ordinatenaxe O W gegeben sind, und D stelle den Punkt des Felds vor, dessen Coordinaten x und y gesucht werden. Da man die Coordinaten der drei Eckpunkte des Dreiecks A B C kennt, so sind auch dessen Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, sowie seine Winkel A, B, C und die Neigungswinkel der Seiten gegen die Abscissenaxe, nämlich $S'AB = \gamma$, $S'AC = \beta$, $S''BC = \alpha$ als bekannt anzusehen, weil man sie aus den Coordinaten leicht berechnen kann.

Setzt man die unbekannte Länge der Linie A D = d und deren Neigungswinkel S' A D gegen die Abscissenaxe = δ, so ist leicht einzusehen, dass

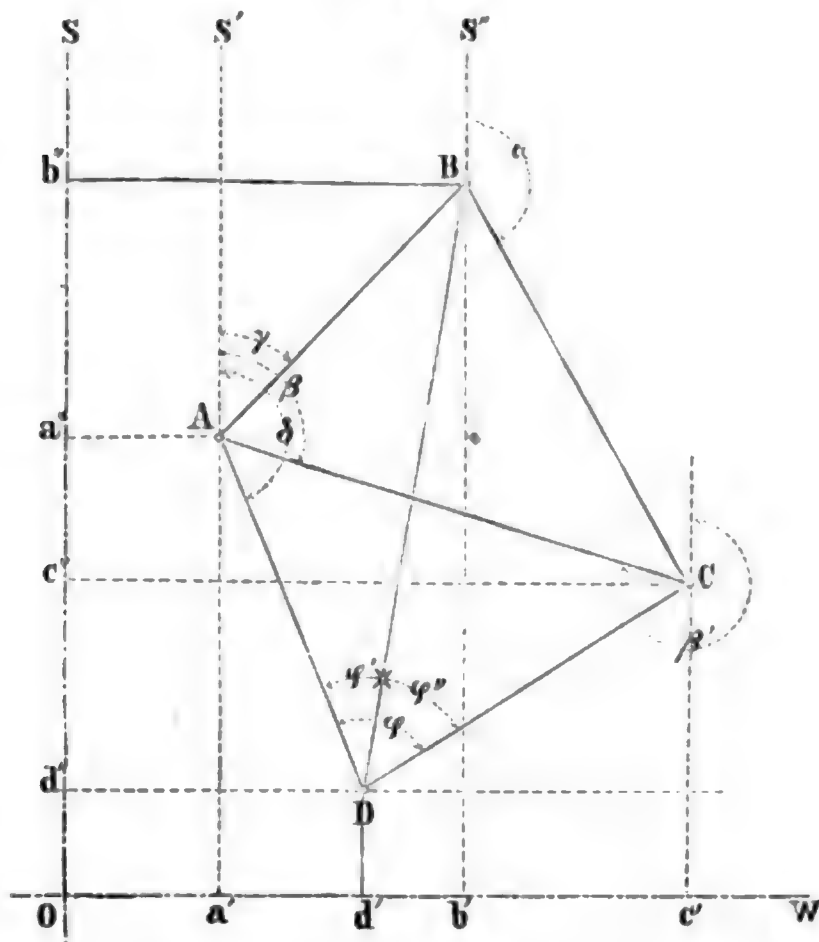
$$x = x_1 + d \cos \delta \tag{242}$$

$$y = y_1 + d \sin \delta \tag{243}$$

ist und folglich nur die zwei Unbekannten d, δ zu bestimmen sind. Nun folgt aber aus den beiden Dreiecken D A B und D A C sehr einfach

$$\frac{c \sin \varphi}{b \sin \varphi'} = \frac{\sin [\delta - (\beta - \varphi)]}{\sin [\delta - (\gamma - \varphi')]}$$

Fig. 136.



und wenn man den Hilfswinkel μ aus der Gleichung

$$\frac{c \sin \varphi}{b \sin \varphi'} = \operatorname{tg} \mu$$

berechnet und $\beta - \varphi = \varepsilon$, $\gamma - \varphi' = \varepsilon'$ setzt:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \mu}{1 - \operatorname{tg} \mu} = \frac{\sin (\delta - \varepsilon') + \sin (\delta - \varepsilon)}{\sin (\delta - \varepsilon') - \sin (\delta - \varepsilon)}$$

oder nach den bekannten Umformungen:

$$\operatorname{tg} (45^0 + \mu) = \cot \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon') \cdot \operatorname{tg} [\delta - \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon')]$$

woraus für $\delta - \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon') = \zeta$ weiter folgt:

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} (45^0 + \mu) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon'). \tag{244}$$

Ist hieraus ζ berechnet, so erhält man

$$\delta = \zeta + \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon') \tag{245}$$

und hiemit aus D A B und D A C zwei Werthe von d, nämlich

$$d = \frac{b \sin(\delta - \varepsilon)}{\sin \varphi} = \frac{c \sin(\delta - \varepsilon')}{\sin \varphi'}. \qquad (246)$$

Um die vorliegende Aufgabe numerisch zu lösen, wird man aus den gegebenen Coordinaten zuerst die zwei Seiten b, c und ihre Neigungswinkel mittels der Formeln:

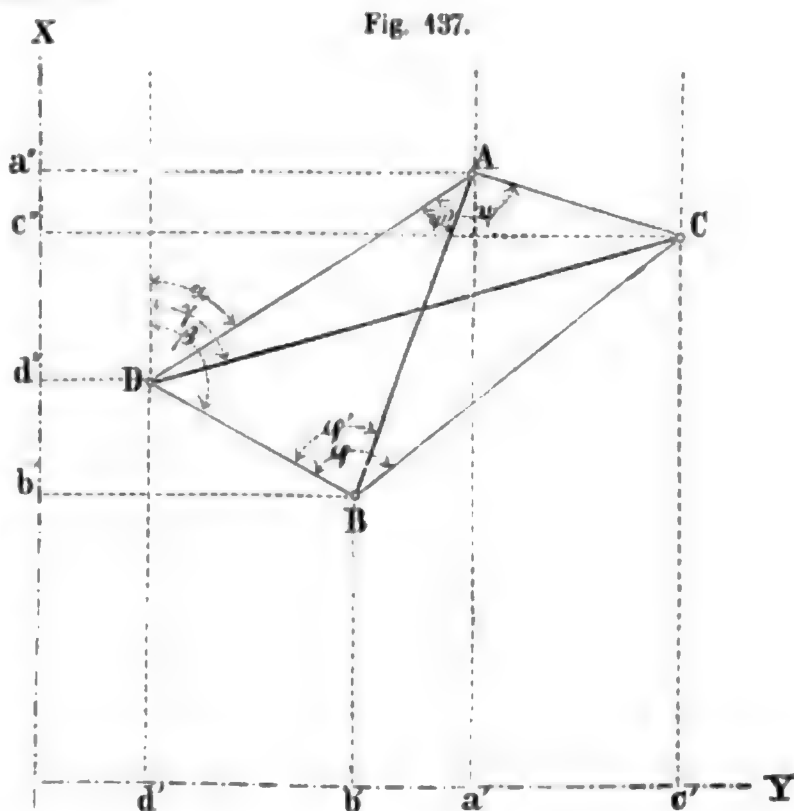
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \qquad b = \frac{y_3 - y_1}{\sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad c = \frac{y_2 - y_1}{\sin \gamma}$$

und hierauf mit Hilfe der gemessenen Winkel φ und φ' die Differenzen $\beta - \varphi = \varepsilon$, $\gamma - \varphi' = \varepsilon'$ und mit diesen Grössen den Hilfswinkel μ berechnen. Damit erhält man aus Gleichung (244) den Winkel ζ, mit diesem nach Gleichung (245) den Winkel δ, hiemit nach Gleichung (246) die Seite d, und, wenn auch diese gefunden ist, nach den Gleichungen (242) und (243) die gesuchten Coordinaten x und y. Dass bei diesen Rechnungen die algebraischen Vorzeichen gehörig zu berücksichtigen sind, bedarf wohl kaum der Erinnerung.[1]

§. 117. **Aufgabe. Von zwei unzugänglichen Punkten des Felds kennt man die Coordinaten, und zwei andere Punkte sind auf dem Felde gegeben; man soll deren Lage durch blosse Winkelmessung bestimmen.**

Fig. 137.



Diese Aufgabe, welche man die des „unzugänglichen Abstands“ nennen könnte, wird, wie schon in §. 77 bemerkt, nach dem Astronomen und Geodäten Hansen in Gotha benannt, weil er sie im Jahre 1841 in Nr. 419 der astronomischen Nachrichten von Schumacher trigonometrisch gelöst und als neu bezeichnet hat. Diese Bezeichnung beruht auf einem Irrthume, den wir schon früher berichtigt haben und der noch weiter durch die Auflösung der

[1] Wer auf die Ausgleichung der bei Lösung der Pothenot'schen Aufgabe vorkommenden Beobachtungsfehler die Methode der kleinsten Quadrate anwenden will, findet darauf bezügliche Anleitung und Zahlenbeispiele in folgenden Schriften: Gauss, Astron. Nachr. I. Bd. Nr. 6 (1823); Gerling, die Pothenot'sche Aufgabe in practischer Beziehung, 1840; Helmert, die Ausgleichungsrechnungen, 1872; Jordan, Taschenbuch der practischen Geometrie, 1873.

vorliegenden Aufgabe von Hartmann in den Astronom. Nachrichten vom Jahre 1829 (Bd. 7, S. 239) bestätigt wird.

Der Nutzen der vorliegenden Aufgabe in der practischen Geometrie ist vielleicht nicht minder gross als jener der Pothenot'schen Aufgabe, da sie aus der bekannten Lage von nur zwei unzugänglichen Punkten die unbekannte Lage von zwei zugänglichen finden lehrt.

Bezeichnen (in Fig. 137) C, D die bekannten, A, B die unbekannten Punkte; sind ferner die Coordinaten von A, B, C, D der Reihe nach x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4; setzt man die Längen der Linien $A D = a$, $B D = b$, $C d = c$ und ihre Neigungswinkel gegen die Axe der x in dem Punkte D nach einander $= \alpha, \beta, \gamma$, und heissen endlich die in A und B beobachteten und in der Figur angedeuteten Horizontalwinkel φ, φ' und ψ, ψ': so ergeben sich aus den drei Dreiecken A C D, C B D, A B D folgende vier Gleichungen:

$$a \sin \psi = c \sin (\psi + \gamma - \alpha)$$
$$b \sin \varphi = c \sin (\varphi + \beta - \gamma)$$
$$a \sin \psi' = b \sin \varphi'$$
$$\beta - \alpha = 180^0 - (\varphi' + \psi'),$$

welche gerade hinreichen, die vier unbekannten Grössen a, b, α, β zu bestimmen. Hat man aber diese, so ist für die Punkte A und B

$$x_1 = x_4 + a \cos \alpha \;,\; y_1 = y_4 + a \sin \alpha \tag{247}$$
$$x_2 = x_4 + b \cos \beta \;,\; y_2 = y_4 + b \sin \beta \tag{248}$$

und folglich Alles gefunden, was man sucht.

Setzt man die bekannte Differenz $\beta - \alpha = 2\delta$ und die noch unbekannte Summe $\beta + \alpha = 2\sigma$, so findet man hieraus

$$\alpha = \sigma - \delta \text{ und } \beta = \sigma + \delta,$$

und setzt man ferner die bekannten Winkel

$$\psi + \gamma + \delta = \zeta \text{ und } \varphi - \gamma + \delta = \eta,$$

so nehmen die zur Bestimmung der noch übrigen drei unbekannten Grössen a, b, σ dienenden drei Gleichungen folgende Form an:

$$\begin{aligned} a \sin \psi &= c \sin (\zeta - \sigma) \\ b \sin \varphi &= c \sin (\eta + \sigma) \\ a \sin \psi' &= b \sin \varphi'. \end{aligned} \tag{249}$$

Dividirt man die erste durch die zweite und nimmt den Werth von a : b aus der dritten, so fallen alle Entfernungen weg und man erhält:

$$\frac{\sin \varphi' \sin \psi}{\sin \varphi \sin \psi'} = \frac{\sin (\zeta - \sigma)}{\sin (\eta + \sigma)}.$$

Setzt man die bekannte erste Seite dieser Gleichung $= \operatorname{tg} \mu$, so gelangt man durch dasselbe Verfahren, welches im vorigen Paragraph beobachtet wurde, zu der Gleichung

$$\operatorname{tg} [\sigma + \tfrac{1}{2} (\eta - \zeta)] = \operatorname{tg} (45^0 - \mu) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\eta + \zeta),$$

aus welcher somit σ gefunden werden kann. Denn setzt man $\operatorname{tg} [\sigma + \frac{1}{2} (\eta - \zeta)] = \operatorname{tg} \omega$, so ist ω als bekannt anzusehen und daher

$$\sigma = \omega + \tfrac{1}{2} (\zeta - \eta). \tag{250}$$

Mit σ sind aber auch α und β gefunden, indem

$$\alpha = \sigma - \delta$$

$$\text{und } \beta = \sigma + \delta$$

ist; weiter folgt dann aus den Gleichungen (249)

$$a = \frac{c \sin(\zeta - \sigma)}{\sin \psi} \tag{251}$$

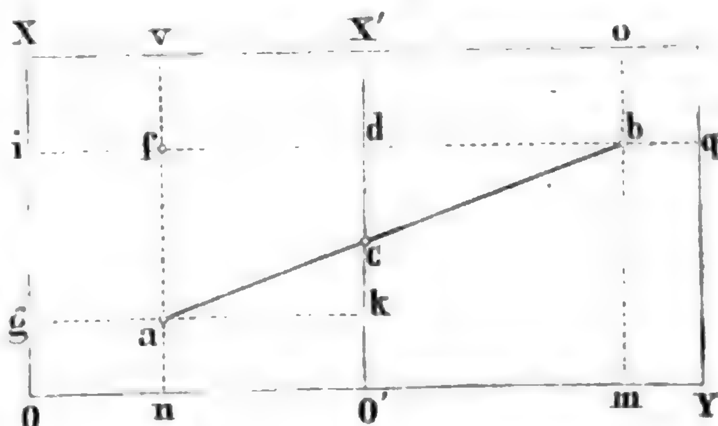
$$b = \frac{c \sin(\eta + \sigma)}{\sin \varphi}. \tag{252}$$

Führt man diese Werthe von a, b, α, β in Gleichung (247) und (248) ein, so ergeben sich leicht die gesuchten Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2.

Der oben benützte Ausdruck für tg μ nimmt die Form $0/0$ an, wenn die zwei Punkte A und B gleichzeitig auf der Linie C D liegen; denn in diesem Falle ist der Winkel $\psi = \varphi = 180^0$ und folglich sin $\psi = 0$. Man muss also zu vermeiden suchen, dass A und B auf C D oder auch nur sehr nahe an C D liegen. Liegt jedoch nur einer der unbekannten Punkte auf der Linie C D, so geben die entwickelten Formen ohne Anstand die Lage der beiden Punkte A und B. Es versteht sich von selbst, dass man aus den Coordinaten von A und B die Länge A B berechnen und diese Coordinaten wieder als gegeben ansehen kann, um zwei andere unbekannte Punkte daraus zu bestimmen.[1]

§. 118. **Aufgabe. Auf zwei aneinanderstossenden Messblättern sind zwei trigonometrische Punkte A, B unter a, b eingetragen; man soll die Orientirungslinie zwischen diesen Punkten berechnen und auftragen** (Fig. 138).

Fig. 138.



Sind die Coordinaten des Punkts a in Bezug auf die Axen O X, O Y = x_1, y_1, und die des Punkts b in Bezug auf die Axen O′ X′, O′ Y = x_2, y_2 gegeben, so handelt es sich darum, den Abstand O′ c = x zu bestimmen, um auf dem einen Blatte die Orientirungslinie a c, welche durch B, b geht, und auf dem anderen Blatte die Richtung b c, welche durch A, a geht, auftragen und bei der Aufstellung des Messtisches benützen zu können.

Zieht man durch b die Linie b i senkrecht zu O′ X′ und O X, durch a

[1] Wer die Methode der kleinsten Quadrate auf die Pothenot'sche Aufgabe anzuwenden versteht, wird keine Schwierigkeit in deren Uebertragung auf das nach Hansen benannte Problem finden; übrigens ist in der Schrift: Franke, die Dreiecksnetze vierter Ordnung, 1871, S. 143 und 191 ein nach unserer Lösung der vorliegenden Aufgabe behandeltes Zahlenbeispiel nebst Ausgleichungsrechnung enthalten.

aber a v parallel zu O′ X′ und O X, so entstehen zwei rechtwinklige ähnliche Dreiecke a b f und c b d, in denen, wenn man O O′ = O′ X′ = l setzt,

$$a f = x_2 - x_1, \; f b = l - y_1 + y_2, \; d b = y_2$$

bekannt ist; man kann folglich

$$c d = \frac{x_2 - x_1}{l - y_1 + y_2} \cdot y_2$$

berechnen. Hat man aber c d, so ist c d + c O′ = x_2 und daher

$$x = c O' = x_2 - c d = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{l - y_1 + y_2} \cdot y_2. \tag{253}$$

Trägt man die Länge x von O′ auf der Seite O′ X′ der beiden Blätter ab, so ist c und damit auf dem einen Blatte a c, auf dem anderen b c bestimmt. Als Controle der Zeichnung ist anzuwenden, dass man von X_1 aus die Länge l — x abschneidet. So wie die Richtungen a c, b c zwischen den Punkten A, a und B, b berechnet und aufgetragen wurden, lassen sich zwischen irgend zwei anderen Punkten Absehlinien herstellen; die dabei vorkommenden Rechnungen und Zeichnungen sind aber in allen Fällen (auch wenn die Punkte auf nicht aneinanderstossenden Blättern liegen) so einfach, dass wir sie unbedenklich dem Leser selber überlassen können. Hinsichtlich der Richtungslinien ist nur noch zu bemerken, dass man sie so scharf und so lang als möglich zieht und ihre Bezeichnung ausserhalb der Randlinien des Messblatts anbringt.

Dritter Abschnitt.

Verticalmessungen.

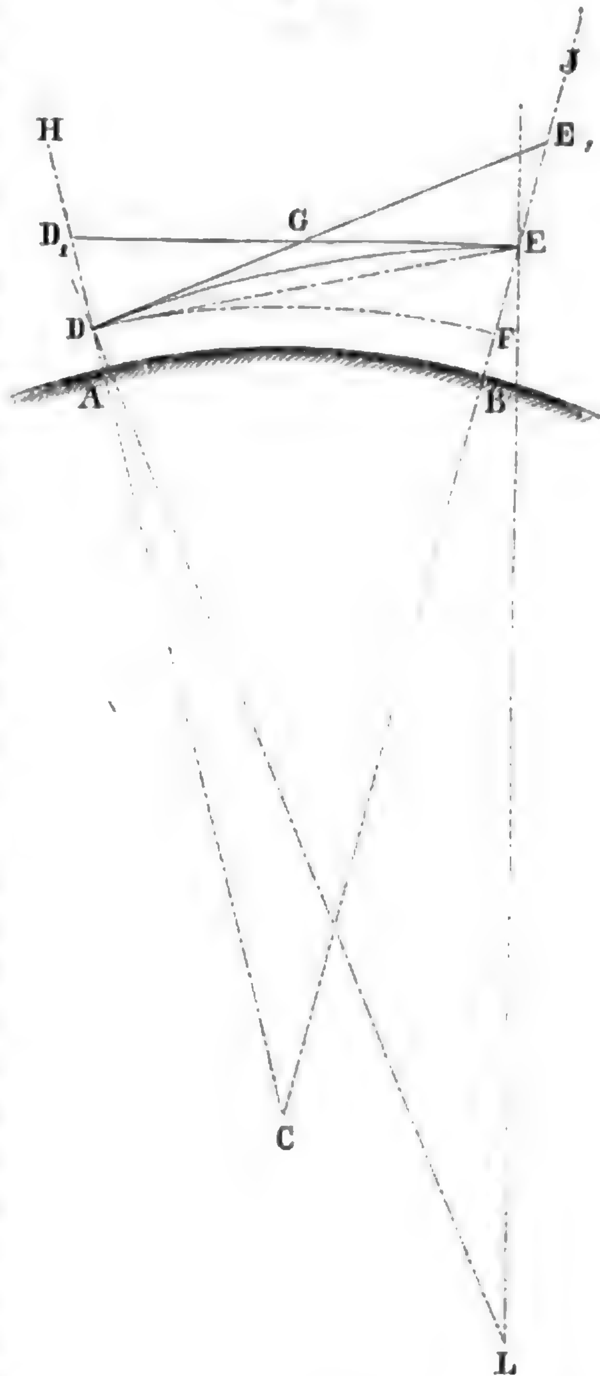
A. Messung der Verticalwinkel.

§. 119. Aufgabe. Den Einfluss der atmosphärischen Strahlenbrechung auf die Messungsresultate im Allgemeinen zu bestimmen.

So lange die Schenkel der zu messenden Verticalwinkel nicht eine bedeutende Länge haben, also der beobachtete Punkt von dem Standorte des Beobachters nicht sehr weit entfernt ist, sind die in den §§. 150, 151, 154, 166 des I. Bands angegebenen Verfahrungsweisen zur Bestimmung jener Winkel vollständig ausreichend; überschreitet jedoch die gegenseitige Entfernung der zwei Punkte, zwischen denen eine genaue Verticalmessung vorzunehmen ist, die Grösse von ungefähr 500 Meter, so muss an den nach der früheren Anleitung gefundenen Winkeln eine Verbesserung (Δz) angebracht werden, welche von der atmosphärischen Strahlenbrechung herrührt und desshalb die Refraction heisst.

Mit dieser Strahlenbrechung hat es folgende Bewandtniss. Stellt man sich nämlich die Atmosphäre der Erde ganz ruhig und mit einerlei Temperatur begabt vor, so werden sich die concentrischen Luftschichten, in welche man sich die Atmosphäre zerlegt denken kann, nach ihren specifischen Gewichten über einander lagern und diese Gewichte werden nach einer leicht zu bestimmenden geometrischen Reihe von unten nach oben abnehmen. Ein Lichtstrahl nun, der von einem hochgelegenen Punkte der Atmosphäre herabkommt, wird in immer dichtere Luftschichten gelangen und folglich von Schichte zu Schichte eine Brechung erleiden, welche ihn immer mehr von seiner geraden Bahn ablenkt und diese in eine gegen die Erde concave Curve verwandelt. In der Fig. 139 stellt E D diese, den ungleich hoch gelegenen Punkten D und E angehörige Lichtcurve vor, während D C und E C die durch D und E gehenden Erdhalbmesser sind. Ein in D befindliches Auge empfängt das von E kommende Licht in der Richtung D G, welche die Curve E D in D berührt, und versetzt desshalb die Lage des Punkts E in diese Richtung (nach E_1); ein Auge aber, das sich in E befindet, sieht den Punkt D, von dem die Curve D E ausgeht, in der Richtung E G des letzten Curvenelements (in D_1). Die Höhe des Punkts D_1 ist grösser als die von D, und die von E_1 grösser als die von E: folglich besteht die Wirkung der Strahlenbrechung in der Atmosphäre darin, dass sie alle Gegenstände höher erscheinen lässt, als sie liegen, und folglich alle Zenithwinkel zu klein und alle Höhenwinkel zu gross macht. Der Winkel, um welchen man einen anvisirten Punkt über seiner wahren Lage sieht, heisst der Refractionswinkel oder auch kurz: die Refraction. Für den leuchtenden Punkt E und den Beobachtungsort D ist dieser Winkel $\varDelta z = EDE_1$ und für D und E die Refraction $\varDelta z_1 = DED_1$. Liegt der leuchtende Punkt innerhalb der Erdatmosphäre, geht also das Licht von einem irdischen Gegenstande aus und durchdringt es nur einen Theil dieser Atmosphäre,

Fig. 139.



so nennt man die Summe aller hierbei vorkommenden Brechungen die **terrestrische Refraction**; ist aber ein Himmelskörper das leuchtende Object, so geht das von ihm kommende Licht durch die ganze Erdatmosphäre und die Summe aller Brechungen heisst dann die **astronomische Refraction**. Beide Refractionen sind somit nur quantitativ, nicht qualitativ von einander verschieden.

Befände sich die Atmosphäre der Erde wirklich in dem einfachen Zustande, den wir bis jetzt angenommen haben, so liesse sich die Gleichung der Lichtcurve DE und damit auch der Betrag der Refraction in den Punkten D und E streng bestimmen. Dieser Zustand der Atmosphäre ist aber nicht vorhanden, und es können sogar Fälle eintreten, in welchen die an der Erdoberfläche stärkere Erwärmung der Luft bewirkt, dass die unteren Luftschichten dünner sind als die oberen: in diesem Falle wird die Lichtcurve convex gegen die Erdfläche und folglich die Refraction negativ. Zwischen dem negativen und positiven Werth gibt es selbstverständlich auch einen gleich Null, und dieser tritt ein, wenn in Folge der ungleichen Erwärmung die Luftschichten, durch welche das Licht geht, gleich dicht werden. Für diese verwickelten Verhältnisse ist eine genaue Bestimmung der Refractionsgrösse unmöglich; für einfachere Voraussetzungen aber kann sie mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden.

Man kann nun entweder für einen mittleren Zustand der Atmosphäre das Gesetz der Temperatur- und Dichtigkeits-Aenderung als gegeben voraussetzen, oder man kann gleich so weit gehen, wie es bis jetzt fast allgemein noch geschieht, dass man die Lichtcurve DE als einen sehr flachen Kreisbogen, welcher gegen die Erdoberfläche concav ist, annimmt.

§. 120. **Aufgabe. Die Grösse der terrestrischen Strahlenbrechung nach der bisher üblichen Weise zu bestimmen.**

Auf Grund der eben angeführten (allerdings willkührlichen und daher unwissenschaftlichen) Annahme, dass die Lichtcurve ein sehr flacher Kreisbogen sei, kann man wie folgt einen Ausdruck für den Refractionswinkel Δz finden. Bezeichnet nämlich

r_0 den Erdhalbmesser DC in dem Beobachtungspunkte D,
r_1 den Erdhalbmesser EC in dem leuchtenden Punkte E,
R den Halbmesser DL der Lichtcurve ED,
C den Mittelpunktswinkel DCE und
L den Mittelpunktswinkel DLE,

so ist, da die Länge der Curve DE von ihrer Horizontalprojection DF ausserordentlich wenig verschieden ist und dieser folglich gleich gesetzt werden kann,

$$r_0 C = R L$$

und da ferner $L = 2(EDE_1) = 2(\Delta z)$, so findet man

$$\Delta z = \frac{r_0 C}{2R} = k C \qquad (254)$$

wobei k das Verhältniss von $r_0 : 2R$ vorstellt und der Refractionscoefficient oder die Refractionsconstante[1] heisst.

Diese Constante wird dadurch bestimmt, dass man in den beiden Punkten D und E, deren Horizontalabstand (arc. DF) bekannt ist, gleichzeitig die Zenithwinkel der Linie DE misst und aus der Beziehung, welche zwischen diesen Winkeln und dem Winkel Δz stattfindet, den letzteren berechnet. Gleichzeitig werden die Zenithwinkel desshalb gemessen, weil man alsdann annehmen zu dürfen glaubt, es sei $\Delta z_1 = \Delta z$.

Der Theodolith in D gibt in Folge der Strahlenbrechung nicht den wahren Zenithwinkel $HDE = Z$, sondern den scheinbaren $HDE_1 = z$; es ist aber $Z = z + \Delta z$. Ebenso erhält man in E statt des wahren Zenithwinkels $JED = Z_1$ den scheinbaren $JED_1 = z_1$; es ist aber wieder $Z_1 = z_1 + \Delta z$.

Aus der Figur findet man leicht, wenn man die beiden Aussenwinkel Z und Z_1 des Dreiecks DCE mit dessen inneren Winkeln vergleicht:

$$2(\Delta z) = 180^0 + C - z - z_1. \tag{255}$$

Da aber nach Gleichung (254) auch $2(\Delta z) = 2kC$, so erhält man folglich die gesuchte Constante

$$k = \frac{180^0 + C - z - z_1}{2C}. \tag{256}$$

Aus vielfachen Beobachtungen, von verschiedenen Astronomen und Geodäten in verschiedenen Ländern und zu verschiedenen Jahres- und Tageszeiten, jedoch bei ruhiger und klarer Luft[2] gemacht, erhielt man folgende Werthe von k:

Lambert	fand	$k = 0{,}0625$;	Bessel	fand	$k = 0{,}0685$;
Tob. Mayer	„	$k = 0{,}0625$;	Struve	„	$k = 0{,}0618$;
Gauss	„	$k = 0{,}0653$;	Coraboeuf	„	$k = 0{,}0642$.

Die meisten Franzosen nehmen nach Laplace und Delambre $k = 0{,}08$ und die Engländer sogar $k = 0{,}10$ an. In Deutschland benützt man in der Regel den von Gauss angegebenen Coefficienten, welcher von dem Bessel'schen nur sehr wenig abweicht. Am besten verfährt man aber, wenn man die Verticalmessungen so einrichtet, dass die Refraction in dem Resultate gar nicht mehr vorkommt. Wie man dieses bewirken kann, wird in der Folge an mehreren Stellen gezeigt.

Nach Gauss beträgt die mittlere Unsicherheit des Werths von k bei ruhiger und klarer Luft den achten Theil seiner eigenen Grösse, so dass demnach bei solcher Beschaffenheit der Atmosphäre der wahre Werth von k zwischen 0,0735 und 0,0571 liegt; andere Beobachter fanden jedoch die Schwankungen der Refractionsconstanten viel grösser, wie schon die von den Franzosen und Engländern angewendeten Werthe zeigen, und wie ins-

[1] Häufig wird auch das Verhältniss $r_0 : R = k$ gesetzt; in diesem Falle ist also die Refractionsconstante doppelt so gross als hier.

[2] An einem sehr heissen stürmischen Tage fand Delambre $k = -0{,}0035$ und bei schlechtem Wetter $k = -0{,}0351$.

besondere auch aus den Messungen von Baeyer hervorgeht, der „bei ruhiger Luft und angenehmer Temperatur“ einen grössten Werth von k = 0,1334 und „bei empfindlicher Kälte und ziemlich heftigem Winde“ einen kleinsten Werth von k = 0,0415 erhielt. (Man vergleiche auch den Schluss des §. 122.)

§. 121. **Aufgabe. Die Grösse der terrestrischen Strahlenbrechung nach neueren Aufstellungen über die physicalische Constitution der Atmosphäre zu bestimmen.**

Um die Grösse der Strahlenbrechung zu berechnen, muss man deren Differentialgleichung kennen und diese, nach Einführung des Gesetzes über die Aenderung der Dichtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe, integriren. Die Differentialgleichung der atmosphärischen Strahlenbrechung, von Laplace vollständig entwickelt, steht fest für alle Zeiten, während über die Abnahme der Dichtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe verschiedene Hypothesen aufgestellt sind, wodurch die Integration der genannten Differentialgleichung mehr oder weniger erschwert wird und das Ergebniss derselben verschieden ausfällt. Es ist hier nicht der Ort, alle diese Hypothesen zu kritisiren und die Integrationen, welche sie veranlassen, darzustellen: wir beschränken uns hier darauf, erstens die Differentialgleichung der Strahlenbrechung nach Laplace vorzuführen, zweitens unsere auf Beobachtungen gestützte Aufstellung über die physicalische Constitution zu erörtern, und drittens die Ergebnisse unserer Untersuchungen über die terrestrische Refraction zusammenzustellen.

Bezeichnet nämlich (mit Bezug auf Fig. 139):

- r die Strahlenbrechung (E G E′) für die scheinbare Zenithdistanz $z = HDE'$,
- r_0 den Krümmungshalbmesser der Erde (C D) am Beobachtungsorte,
- x die Höhe (E F) eines Punkts der Atmosphäre über dem Orte D,
- h die ganze Atmosphärenhöhe, vom Meere an gerechnet,
- y das Verhältniss der Höhe x zur Höhe h,
- m das Verhältniss von h zu r_0, also my das von x zu r_0,
- s das Verhältniss der Höhe x zur Entfernung $r_0 + x$,
- ϱ die Dichtigkeit der Luft in der Höhe x über dem Meere,
- ϱ_0 die Dichtigkeit der Luft am Meeresspiegel und
- α die Refractionsconstante der Luft,

so ist (wenn man die einander entsprechenden Buchstaben einführt) nach Laplace's Mécanique céleste, T. IV, p. 246:

$$dr = -\frac{\alpha \sin z}{1-\alpha} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho_0} \cdot \frac{1-s}{\sqrt{\cos^2 z + (2s - s^2)\sin^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho}\right)}} \tag{a}$$

Um diese Gleichung integriren zu können, müssen ϱ und s in x oder y ausgedrückt werden. Ist dieses der Fall, dann wird offenbar die terrestrische Refraction gleich dem Integral von dr zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = x$, und die astronomische Refraction gleich dem Integral von dr zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = h$.

Der Verfasser dieses Buchs hat in seiner Schrift: „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen“ etc. (München, 1862) unter anderem auch eine Relation zwischen Temperatur, Druck, Dichtigkeit und Höhe der Atmosphäre aufgestellt, welche auf einer grossen Zahl von Beobachtungen verschiedener Forscher beruht. Diese Relation heisst nach S. 97 der genannten Schrift:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{1-\frac{1}{k}} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{k-1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{k'} \tag{b}$$

und es bezeichnen darin für zwei Punkte einer durch den ganzen Luftraum reichenden Verticallinie:

h, h' die zugehörigen Atmosphärenhöhen,
Θ, Θ' die absoluten (d. h. von — 272,⁰8 C an gezählten) Temperaturen,
p, p' die entsprechenden Pressungen und
ϱ, ϱ' die Dichtigkeiten der Luft an jenen Punkten, sowie
k, k' zwei aus Beobachtungen zu bestimmende Exponenten.

Aus einer grossen Zahl von Messungen ergaben sich die Mittelwerthe von $k = 1{,}2035 - 0{,}017 \cos 2\psi$ (wobei ψ die geographische Breite des Beobachtungsorts ist) und von $k' = 1{,}023$. Gestattet man eine kleine Abweichung von diesen Werthen, so kann $k = 1{,}2$ und $k' = 1$ gesetzt werden, wodurch die vorstehende Relation in folgende übergeht:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{h'}{h}. \tag{c}$$

Hiernach sind bei einem mittleren Zustande der Atmosphäre und unter 45⁰ Breite die absoluten Temperaturen, die sechsten Wurzeln der Pressungen und die fünften Wurzeln der Dichtigkeiten der Luft den Atmosphärenhöhen an den Beobachtungsorten proportional.

Auf Grund dieser Annahme hat der Verfasser in den Nummern 1478 bis 1480 der „Astronomischen Nachrichten“ die astronomische Refraction berechnet und selbst für die Zenithdistanzen zwischen 85⁰ und 90⁰ bis auf einzelne Secunden mit den Bessel'schen Tafeln übereinstimmend gefunden, was bis jetzt bei keiner anderen Aufstellung über die physicalische Constitution der Atmosphäre gelungen ist, und woraus der Schluss gezogen werden muss, dass keine dieser Aufstellungen der Wahrheit so nahe kommt, als die vorstehende Relation.

Um in der Differentialgleichung (a) die Functionen ϱ und s in x oder y auszudrücken, hat man zunächst nach dem Gesetze (c) und den auf Seite 258 aufgeführten Bezeichnungen das Verhältniss

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{h - x}{h}\right)^5 = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^5 = (1 - y)^5 \tag{d}$$

zu setzen, woraus durch Differentiiren, da ϱ_0 constant ist, folgt

$$\frac{d\varrho}{\varrho_0} = -5\left(1 - \frac{x}{h}\right)^4 \cdot \frac{dx}{h} = -5\,(1 - y)^4\, dy \tag{e}$$

Ferner ist nach der Annahme auf Seite 258:

$$s = \frac{x}{r_0 + x} = \frac{x}{\left(r_0\left(1 + \frac{x}{r_0}\right)\right)} = \frac{m y}{1 + m y}. \qquad \text{(f)}$$

Werden die Werthe (e) und (f) in (a) eingesetzt und einige ganz unbedeutende Vernachlässigungen gestattet, so wird schliesslich die zur Integration geeignete Differentialgleichung der Refraction:

$$d r = \frac{5 \alpha \sin z (1 - y)^4 d y}{(1 - \alpha) \sqrt{\cos^2 z + 2 m y - 2 \alpha [1 - (1 - y)^5]}}. \qquad \text{(g)}$$

Führt man statt der Veränderlichen y die Veränderliche u ein, welche mit y durch die Gleichung

$$u = -(1 - y)$$

verbunden ist, und setzt ferner

$$\frac{5 \alpha \sin z}{1 - \alpha} = q \quad , \quad \cos^2 z = a \quad , \quad 2 m = b \quad ,$$

so geht die Differentialgleichung der Strahlenbrechung über in

$$d r = \frac{q u^4 d u}{\sqrt{a + b(1 + u) - 2 \alpha (1 + u^5)}} \qquad \text{(h)}$$

und es ist nun die terrestrische Strahlenbrechung entweder

$$r = q \int_0^y \frac{(1 - y)^4 . d y}{\sqrt{a + b y - 2 \alpha [1 - (1 - y)^5]}} \qquad \text{(i)}$$

oder aber

$$r = q \int_{-1}^u \frac{u^4 d u}{\sqrt{(a + b) + b u - 2 \alpha (1 + u^5)}} \qquad \text{(k)}$$

Könnte man die hier angezeigten Integrale in endlicher Form herstellen, so wäre die terrestrische Refraction gefunden, und würde man zwischen den Grenzen 0 und 1, beziehungsweise — 1 und 0 integriren, so ergäbe sich die astronomische Refraction. In dem vorliegenden Falle aber bleibt nichts übrig als durch Reihen zu integriren, und es erscheint für diesen Zweck als das Einfachste, den Ausdruck $a + b + b u = U$ zu setzen und

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b) + b u - 2 \alpha (1 + u^5)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{U}} + \frac{\alpha (1 + u^5)}{\sqrt{U^3}} + \frac{3 \alpha^2 (1 + u^5)^2}{2 \sqrt{U^5}} + \frac{5 \alpha^3 (1 + u^5)^3}{2 \sqrt{U^7}} + \ldots \qquad \text{(l)}$$

zu entwickeln und somit r in so viele Theile r', r'', r''', r'''' .... zu zerlegen, als die vorstehende Reihe Glieder hat. Diese Theile sind leicht in geschlossener Form zu erhalten, da (unter ν eine ganze positive Zahl und unter μ einen beliebigen Bruch verstanden) nur Integrale von der Form $\int u^{\nu} U^{-\mu} d u$ vorkommen. In der oben genannten, aus den „Astronomischen Nachrichten" besonders abgedruckten Abhandlung des Verfassers über die

atmosphärische Strahlenbrechung sind die Werthe von r', r'', r''', r'''' sowohl für die astronomische als für die terrestrische Refraction entwickelt; wir wollen jedoch weder diese Entwickelungen noch ihre Ergebnisse hier darstellen, da sie für die practische Anwendung zu umständlich sind, sondern darauf ausgehen, für die terrestrische Strahlenbrechung einen Näherungsausdruck zu finden.

Dieser ergibt sich aus der Differentialgleichung der Lichtcurve, wenn diese auf Polarcoordinaten bezogen wird, deren Axe das Loth des Beobachtungsorts und deren Pol der Erdmittelpunkt ist. Bezeichnet man den im Bogenmasse ausgedrückten Centriwinkel zwischen Beobachtungsort und leuchtenden Gegenstand mit φ und behält alle bisherigen Bezeichnungen bei, so erhält die in der Mécanique céleste, T. IV, Nr. 11 entwickelte Differentialgleichung folgende Gestalt:

$$d\varphi = \frac{m \sin z \, . \, dy}{\sqrt{a + (a+1)\, by - 2\alpha\, [1 - (1-y)^5]}}. \qquad \text{(m)}$$

Hieraus findet man durch Integration mittels Reihen folgenden Ausdruck für die Amplitude φ, nämlich

$$\varphi = m t y \left(1 - \tfrac{1}{2}\, p y + \tfrac{1}{2}\,(p^2 - 2 p_1)\, y^2 - \tfrac{1}{8}\,(5 p^3 - 6\, p_1)\right.$$
$$\left.(1 + 3p)\, y^3 + \ldots .\right) \qquad \text{(n)}$$

wobei die Buchstaben t, v, p und p_1 folgende Bedeutung haben:

$$t = \operatorname{tang} z,\; v = \frac{5\,\alpha}{m},\; p = \frac{m\,(\cos^2 z + 1 - v)}{\cos^2 z},\; p_1 = \frac{2 m v}{3 \cos^2 z}. \qquad \text{(o)}$$

Kehrt man die Reihe (n) um, so ergibt sich

$$x = m\, r_0\, y = r_0\, \varphi \left(\cot z + \frac{\cos^2 z + 1 - v}{2 \sin^2 z}\, \varphi + \frac{2\, v \cot z}{3\, m \sin^2 z}\, \varphi^2 \right.$$
$$\left. + \frac{v\,(p - 3) \cot^2 z}{6\, m^2 \sin^2 z}\, \varphi^3 + \ldots .\right). \qquad \text{(p)}$$

Diese letztere Formel bildet die Grundlage zur Berechnung der trigonometrischen Höhenmessungen, und es bedarf das aus ihr hervorgehende Resultat keiner Verbesserung wegen der Strahlenbrechung mehr, da die Höhe x (FE in Fig. 139) aus der Gleichung der Lichtcurve (ED) abgeleitet ist. Es genügt für diesen Zweck vollkommen, ausser r_0, φ und z noch die Werthe von α und m zu kennen, welche der Lage des Beobachtungsorts, der Temperatur und dem Drucke der Luft entsprechen und weiter unten näher bestimmt werden.

Durch Verbindung der Gleichungen (g) und (m) erhält man die Relation:

$$d r = (1 + m y)\,(1 - y)^4 \,.\, v\, d\varphi \qquad \text{(q)}$$

Entwickelt man die Potenz $(1 - y)^4$, setzt für y seinen Werth in φ aus Gl. (p) und vernachlässigt in dem Factor $1 + my$ das zweite Glied my, welches höchstens 0,00075 beträgt, gegen 1, so findet man schliesslich

$$r = v\,\varphi\, [1 - 2 p_0\, \varphi + (2 - \tfrac{2}{3}\, p)\, p_0^2\, \varphi^2 - (1 + p_1 - \tfrac{2}{3}\, p)\, p_0^3\, \varphi^3 + \ldots .] \qquad \text{(r)}$$

wobei v, p, p_1 die oben (o) angezeigte Bedeutung haben und $m\,p_0 = \cot z$ ist. Setzt man für φ seinen Werth aus Gl. (n) ein, so wird

$$r = m\,v\,t\,y\,[1 - \tfrac{1}{2}(4 + p)\,y + \tfrac{1}{6}(12 + 8p + 3p^2 - 6p_1)\,y^2 - \tfrac{1}{6}(8 + 12p + 12p^2 + 5p^3 - 6p_1(5 + 3p)\,y^3 + \ldots]. \qquad (s)$$

Dieser Ausdruck ist jedoch für $z = 90^0$ nicht brauchbar, während der vorhergehende in allen bei Höhenmessungen vorkommenden Fällen angewendet werden kann.

Was den Werth von v anbelangt, so ist derselbe nach den mit (o) bezeichneten Formeln $= \frac{5\,\alpha}{m}$, wobei α die Refractionsconstante und m das Verhältniss von h zu r_0 bezeichnet. Die Grösse α ist nur für eine bestimmte Temperatur und einen bestimmten Druck der Luft constant, und es ist nach Bessel's Bestimmungen für die Temperatur

$$\tau_0 = 48^0{,}75\ F = 7^0{,}44\ R = 9^0{,}31\ C$$

und für den Barometerstand

$$\beta_0 = 29''{,}6 \text{ engl} = 27''\ 9'''{,}22 \text{ Par} = 751^{mm}{,}71$$

die mittlere Refractionsconstante

$$\alpha_0 = 0{,}00027895, \quad \log \alpha_0 = 6{,}4455264 - 10.$$

Den mittleren Werth von m hat der Verfasser in der oben genannten Abhandlung (Astron. Nachrichten, Nr. 1479, S. 228, Formel 73) auf Grund seiner Entwickelungen über die Atmosphärenhöhe in der Art bestimmt, dass für die eben genannten Werthe von τ_0, β_0 und für die geographische Breite von Königsberg ($\psi_0 = 54^0\ 52'\ 50''$):

$$m_0 = 0{,}007464 \quad , \quad \log m_0 = 7{,}8729716 - 10$$

ist. Demnach ist der den Werthen τ_0 , β_0 und ψ_0 entsprechende mittlere Werth von v oder

$$v_0 = \frac{5\,\alpha_0}{m_0} = 0{,}186865.$$

Der Werth von α ist von der Dichtigkeit der Luft abhängig und daher nur so lange constant, als sich Temperatur und Barometerstand nicht ändern; für den Barometerstand β und die Lufttemperatur τ ist nämlich

$$\alpha = \frac{1 + \varepsilon\,\tau_0}{1 + \varepsilon\,\tau} \cdot \frac{\beta}{\beta_0} \cdot \alpha_0 \qquad (t)$$

wenn mit ε der Ausdehnungscoefficient der Luft für 1^0 Temperaturänderung bezeichnet wird. Da

$$\frac{1 + \varepsilon\,\tau_0}{1 + \varepsilon\,\tau} = \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \tau_0}{\frac{1}{\varepsilon} + \tau} = \frac{272^0{,}8\ C + \tau_0}{272^0{,}8\ C + \tau} = \frac{\Theta_0}{\Theta} \qquad (u)$$

so kann man auch

$$\alpha = \frac{\Theta_0}{\Theta} \cdot \frac{\beta}{\beta_0}\,\alpha_0 = \varrho \cdot \alpha_0 \qquad (v)$$

schreiben, wenn man unter Θ, Θ_0 absolute Temperaturen und unter ϱ die Luftdichtigkeit bei der Temperatur τ und dem Barometerstande β versteht.

Der Werth von m hängt mit der Atmosphärenhöhe zusammen, und

da diese Höhe sich nicht bloss mit der Luftdichtigkeit sondern auch (wegen der Abplattung der Atmosphäre) mit der geographischen Breite ändert, so würde die jedesmalige Berechnung von m etwas umständlich werden, wenn man den Einfluss der Breite nicht trennen und gesondert im Voraus berechnen könnte. Der Verfasser hat zu diesem Behufe in seiner Abhandlung über die terrestrische Strahlenbrechung (Astr. Nachr. Nr. 1589, S. 72) nachstehende Tafel hergestellt, welche die den geographischen Breiten von 0 bis 90⁰ entsprechenden Werthe von m_0 liefert.

ψ	log m_0	m_0	ψ	log m_0	m_0
90⁰	7,854 99	0,007 163	45⁰	7,883 83	0,007 653
80	856 46	185	44	884 98	673
70	861 09	262	43	886 32	697
65	863 52	303	42	887 45	717
60	868 56	383	41	888 75	740
55	873 51	473	40	889 84	759
54	874 61	492	39	890 91	778
53	875 73	511	38	892 14	800
52	876 62	527	37	893 06	817
51	877 82	547	36	894 35	840
50	878 98	563	35	895 31	857
49	879 95	584	30	899 77	939
48	880 92	601	20	910 40	0,008 135
47	881 90	619	10	916 66	253
46	882 87	636	0	919 07	300

Man ersieht daraus, dass die Aenderung des Werths von m_0 vom Pole (0,007163) bis zum Aequator (0,008300) nur gering ist, und dass sie bei Untersuchungen, welche auf Strecken von geringer Ausdehnung nach der Breite vorgenommen werden, kaum in Betracht kommt, da dieselbe für 1⁰ Breitenunterschied nur 15 bis 17 Einheiten der siebenten Decimale beträgt. Mit der Luftdichtigkeit ändert sich m in der Weise, dass es derselben umgekehrt proportional ist, wonach

$$m = \frac{\Theta}{\Theta_0} \cdot \frac{\beta_0}{\beta} \, m_0 = \frac{m_0}{\varrho} \tag{w}$$

ist und m_0 den der geographischen Breite ψ entsprechenden, in der eben erwähnten Tafel enthaltenen Werth hat. Mit den eben entwickelten Werthen von α und m wird allgemein jener von

$$v = \frac{5\,\alpha}{m} = \left(\frac{\Theta_0\,\beta}{\Theta\,\beta_0}\right)^2 \cdot \frac{5\,\alpha_0}{m_0} = \varrho^2 \cdot v_0 \tag{x}$$

d. h. die Grösse v ändert sich mit dem Quadrate der Luftdichtigkeit, und bloss mit dieser, so lange der Beobachtungsort in der Höhe des Meeres liegt, wie bisher immer angenommen wurde. Verlegen wir aber den Beobachtungsort in die Höhe x_1 über dem Meere und bezeichnen wir die

daselbst herrschende Luftdichtigkeit mit ϱ_1 (wobei τ_1 die Temperatur und β_1 der Barometerstand), so ist offenbar

$$\alpha_1 = \varrho_1 \ \alpha_0 = \frac{\Theta_0}{\Theta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_0} \cdot \alpha_0$$

$$m_1 = \frac{h - x_1}{r_0 + x_1} = \frac{1 - y_1}{1 + m_0 \ y_1} \cdot m_0$$

und mit Anwendung unserer Aufstellung über die Constitution der Atmosphäre (Gl. c Seite 259):

$$v_1 = \frac{5 \alpha_1}{m_1} = \frac{1 + m_0 \ y_1}{(1 - y_1)^6} \cdot \varrho_1 {}^2 \cdot v_0 = (1 + m_0 \ y_1) \ (1 - y_1)^4 \ v_0. \quad (y)$$

Da man den äusserst kleinen Werth $m_0 \ y_1$ gegen 1 vernachlässigen darf, so folgt hieraus, dass der Werth von v_1 in einer gegebenen Höhe x_1 über dem Meere dem Biquadrate der daselbst verbleibenden Atmosphärenhöhe umgekehrt proportional ist.

§. 122. Vergleichung des älteren und des neueren Ausdrucks der terrestrischen Strahlenbrechung.

Nach den älteren Anschauungen ist die terrestrische Refraction, wenn man darunter den Winkel E G E' = 2 E D E' (Fig. 139) versteht und denselben mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet:

$$\mathfrak{r} = 2 \ k \ \varphi = \mathfrak{v} \ \varphi$$

wobei k und folglich auch $\mathfrak{v}$ constante Grössen sind (§. 120); nach unserer Aufstellung und Entwickelung hat derselbe Winkel den Werth

$$r = v \ \varphi \ (1 - 2 \ p_0 \ \varphi + (2 - \tfrac{2}{3} \ p) \ p_0 {}^2 \ \varphi^2 - (1 + p_1 - \tfrac{2}{3} \ p) \ p_0 {}^3 \ \varphi^3 + \ldots),$$

worin den Buchstaben v, p, p_0, p_1 die im vorigen Paragraph angegebenen Werthe zukommen. Nennen wir das Verhältniss sowohl von $\mathfrak{r}$ als von r zu φ den Coefficienten der terrestrischen Strahlenbrechung und setzen

$$\frac{\mathfrak{r}}{\varphi} = 2 \, k, \ \frac{r}{\varphi} = 2 \ (k) \quad (z)$$

$$1 - 2 \ p_0 \ \varphi + (2 - \tfrac{2}{3} \ p) \ p_0 {}^2 \ \varphi^2 - \ldots = V$$

so ist $2 \, k = \mathfrak{v}$, $2 \ (k) = v \ V$, woraus wir zunächst entnehmen, dass (k) von einem mehrgliedrigen Ausdrucke abhängt, in welchem die Grössen φ, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{z}$ vorkommen, und dann, dass dieser Werth dem mit Temperatur, Luftdruck, geographischer Breite und Höhe des Beobachtungsorts veränderlichen Werthe von v proportional ist. Somit ändert sich auch der Werth von (k) mit dem Biquadrate der über dem Beobachtungspunkte verbleibenden Atmosphärenhöhe (Gl. y).

Für diesen Satz haben die trigonometrischen Höhenmessungen der russischen transkaukasischen Messkammer eine entscheidende Bestätigung geliefert. Nach Gl. (y) verhalten sich nämlich unter sonst gleichen Umständen die terrestrischen Coefficienten zweier Stationen nahezu wie die vierten Potenzen der über diesen Stationen verbleibenden Atmosphärenhöhen. Wenn demnach eine Station 100^m und eine andere 4000^m über Meer und jede unter 40^0 n. Breite liegt; wenn ferner auf der Station I eine Temperatur von $10^0,3$ R. und ein Barometerstand von $751^{mm},71$ beobachtet wurde; und

wenn endlich zwischen jeder Station und dem Object die Amplitude 26′ 40″ und die Zenithdistanz 88° 54′ 40″ beträgt: so berechnet sich der Coefficient $2\,(k)_1$ der unteren Station wie folgt. Es ist

$$\begin{array}{llll} \log m_0 = 7{,}88984 & \log p_0 = 0{,}38807 \\ \log v_0 = 9{,}25465 & \log p = 1{,}24786 \\ \log (1-y_1) = 9{,}99914 & \log p_1 = 0{,}40526 \\ \log \varrho_1 = 9{,}99453 & \log \varphi = 7{,}88969 \\ \log m_1 = 7{,}89014 & \log p_0\,\varphi = 8{,}27776 \\ \log v_1 = 9{,}24888 & \log V_1 = 9{,}98169 \end{array}$$

und somit

$$2\,(k)_1 = 0{,}17005;\ k_1 = 0{,}08502 \qquad (\alpha)$$

Für die obere Station wird nach unserer Theorie der Coefficient

$$2\,(k)_2 = \frac{1 + m_0\,y_2}{1 + m_0\,y_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdot \left(\frac{1 - y_2}{1 - y_1}\right)^4,$$

wobei der Werth V_2 von dem V_1 nur darin verschieden ist, dass den Werthen von p_0, p_1, p ein anderes m zu Grunde liegt. Es wird nämlich für V_2:

$$m = \frac{h - x_2}{r_0 + x_2} = \frac{23707}{3265853} = 0{,}0072591,$$

$\log p_0 = 0{,}41803$, $\log p_1 = 0{,}01874$, $\log p = 1{,}26815$, $\log V_2 = 9{,}98013$.

Da in dem vorliegenden Falle die Atmosphärenhöhe $h = 25760$ Toisen, $100^m = 51{,}'3$ und $4000^m = 2053{,}'3$, so wird

$$\log y_1 = 7{,}29663,\ \log y_2 = 8{,}90145$$

$$\log \left(\frac{1 - y_2}{1 - y_1}\right)^4 = \log \left(\frac{23707}{25709}\right)^4 = 9{,}85917$$

$$\log \frac{1 + m_0\,y_2}{1 + m_0\,y_1} = \log \frac{1{,}000015}{1{,}000618} = 9{,}99974$$

$$2\,(k)_2 = 0{,}12244;\ k_2 = 0{,}06122. \qquad (\beta)$$

Vergleichen wir nun mit den berechneten Werthen von $(k)_1$ und $(k)_2$ das Resultat der Erfahrung, welches die russische Messkammer im Kaukasus erlangt und Oberst Stebnizki dem Verfasser unter dem 16./28. April 1865 brieflich mitgetheilt hat. Hr. Stebnizki schrieb: „Die Berechnung der Data der kaukasischen Triangulation ist noch nicht ganz beendigt; demohnerachtet erhielten wir mehrere sehr interessante Resultate: so fanden wir, dass der Coefficient der Refraction mit der Höhe abnimmt, und dass er z. B. auf der Höhe von 100 Metern 0,085 und auf der Höhe von 4000 Metern 0,058 beträgt.“ Man entnimmt hieraus die fast vollständige Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe von $(k)_1$ und $(k)_2$, die man häufiger als ihre Vielfachen $2\,(k)_1$ und $2\,(k)_2$ unter dem Coefficienten der Strahlenbrechung begreift, und so lange darunter begreifen kann, als man die Voraussetzung eines kreisförmig gebogenen Lichtstrahls, für welchen $E\,D\,E' = D\,E\,D' = \frac{1}{2}\,E\,G\,E'$ ist (Fig. 139), zulässt.

Zeigt das vorstehende Beispiel, wie stark die Aenderung des soge-

nannten Coefficienten der Refraction mit der Höhe werden kann, so lässt sich an einem anderen Beispiele leicht übersehen, wie viel diese Aenderung an der nämlichen Stelle in Folge einer Dichtigkeits-Aenderung der Luft zu betragen vermag. Man braucht zu dem Ende nur die Aenderung von v zu betrachten, welche der des Coefficienten proportional ist. Nach Seite 262 ist der mittlere Werth von v oder

$$v_0 = 0{,}186865.$$

Lässt man die Temperatur von 9°,31 C, welche v_0 entspricht, in — 25° C und den Barometerstand von 751 mm,71 in 760 mm übergehen, so ändert sich die Luftdichtigkeit von 1 in 1,15095 ab und es wird

$$v = 0{,}24755.$$

Steigt dagegen die Temperatur auf + 30° C, während der Barometerstand auf 730 mm sinkt, so geht die Luftdichtigkeit von 1 in 0,90473 über und es wird

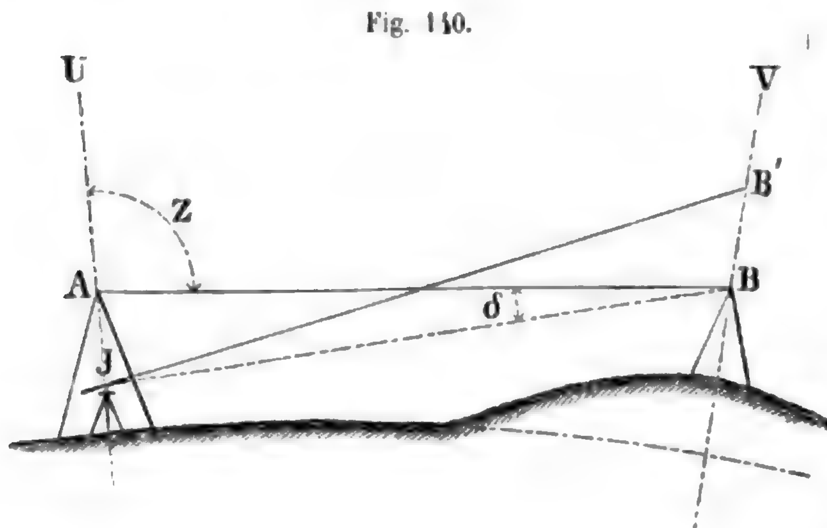
$$v = 0{,}15296.$$

Da der Coefficient (k) nahezu ½ v ist, so begreift man jetzt die Schwankungen in den Angaben für den Werth desselben: die hier vorgeführten Beispiele umfassen die Werthe 0,12377, 0,09343, 0,085, 0,07648, 0,061 und entsprechen somit den in §. 120 angeführten Werthen von k.

§. 123. Aufgabe. Die Reduction der Verticalwinkel auf den wahren Scheitelpunkt vorzunehmen.

Bei dem früher beschriebenen Verfahren, den Zenithwinkel einer Linie zu messen, wurde vorausgesetzt, dass die Drehaxe des Verticalkreises des Theodolithen in einem Endpunkte der Linie liege. Dieses ist aber in der Regel nicht möglich, und es steht (wenn kein Heliotropenlicht angewendet wird) entweder das Instrument über oder unter dem genannten Endpunkte. Dieser Umstand veranlasst einen kleinen Fehler im Zenithwinkel, welcher berücksichtigt werden muss. Die Verbesserung des letzteren nennt man dessen Reduction auf den wahren Scheitel.

Fig. 140.



Nimmt man, wie in Fig. 140 geschehen, an, dass, um den Zenithwinkel U A B = Z zu finden, der Verticalkreis unterhalb A im Punkte J aufgestellt sei, so wird man zuerst den scheinbaren Zenithwinkel U J B' = z und hieraus den wahren für den Punkt J = U J B = z + Δ z erhalten. Der gesuchte Zenithwinkel ist aber

$$Z = z + \Delta z + \delta \tag{257}$$

wenn $ABJ = \delta$ gesetzt wird. Aus dem Dreiecke ABJ folgt, wenn $AJ = h$ und $AB = b$ gegeben ist:

$$\sin\delta = \frac{h}{b}\sin(z + \Delta z)$$

und da δ jedenfalls sehr klein ist, also $\sin\delta : \sin 1'' = \delta'' : 1''$ gesetzt werden darf,

$$\delta = \frac{h \sin(z + \Delta z)}{b \sin 1''}. \tag{258}$$

Läge der Punkt über A, so würde, wie leicht einzusehen,

$$Z = z + \Delta z - \delta$$

sein, δ aber seinen absoluten Werth behalten, wenn h und b unverändert bleiben und Z nicht viel von 90^0 abweicht.

§. 124. Aufgabe. Die Kimmtiefe oder die Depression des Meereshorizonts zu bestimmen.

Nach §. 166 des I. Bands wird auf dem Meere oder in dessen Nähe mit dem Spiegelsextanten oder dem Spiegelkreise der Höhenwinkel eines Gestirns dadurch gemessen, dass man die Bilder des Meereshorizonts und Gestirns zur Deckung bringt: bezeichnet also in Fig. 141 der Punkt A den Sextanten, S das Gestirn und B die in der Verticalebene A S liegende äusserste sichtbare Stelle des Meeresspiegels, so liefert der Sextant, wenn man von der atmosphärischen Strahlenbrechung absieht, den Winkel $SAB = w$.

Fig. 141.

Dieser Winkel ist aber der gesuchte Höhenwinkel noch nicht; denn erstens ist der Schenkel A B nicht horizontal, und zweitens sieht man die Punkte B und S in Folge der Strahlenbrechung der Luft höher als sie sind. Nimmt man an, dass S in S' und B in B' erscheint, so liest man auf dem Sextanten den Winkel $S'AB' = w'$ ab, während der Winkel $SAH = u$ mit dem horizontalen Schenkel A H gesucht wird. Setzt man den Winkel SAS', welcher die nach Tab. Nr. XIX zu bestimmende astronomische Strahlenbrechung vorstellt, $= \varrho'$, den Winkel BAB' oder die terrestrische Strahlen-

brechung $\Delta z = \varrho$, und den Winkel H A B = v, so ist offenbar der gesuchte Höhenwinkel

$$u = w' - \varrho' - (v - \varrho). \tag{259}$$

Der Winkel H A B' = $v - \varrho = \delta$ stellt nun die **Kimmtiefe** oder die **Depression des Meereshorizonts** vor, und es lässt sich dieselbe in folgender Weise bestimmen.

Nach der Construction der Figur sind die Dreiecke A C H, A B C, A B H alle rechtwinklig und einander ähnlich, folglich ist auch der Winkel H A B = v = A C B = C, und somit die Kimmtiefe

$$\delta = v - \varrho = (1 - k)\, C \tag{260}$$

da nach §. 120 der Winkel $\varrho = \Delta z = k\,C$ ist. Nun ist, wenn b = B D und r = D C, der Mittelpunktswinkel

$$C = 206\,265'' \frac{b}{r}$$

und aus der ebenen Geometrie ist bekannt, dass

$$A\,B^2 = A\,D\,(2\,r + A\,D)$$

oder, wenn man A D = h, A B = e und 2 r für 2 r + h setzt:

$$e^2 = 2\,r\,h. \tag{261}$$

Die Länge e darf man gleich dem Bogen B D = b und somit den Winkel

$$C = 206\,265'' \cdot \frac{e}{r} = 206\,265'' \cdot \sqrt{\frac{2\,h}{r}}$$

setzen; folglich wird nach Gl. (260) die Kimmtiefe

$$\delta = 206\,265''\,(1 - k) \sqrt{\frac{2\,h}{r}}. \tag{262}$$

Für k = 0,0653 und r = 3 266 608 Toisen wird

$$\delta = 150,''85 \sqrt{h}$$

demnach für h = 4 Toisen $\delta = 301'',7 = 5,03$ Minuten. Wäre für diese Höhe des Instrumenten-Standpunkts die Ablesung auf dem Spiegelsextanten $= w' = 33^0\,40'$ gewesen, so würde nach Tab. Nr. XIX die astronomische Refraction $\varrho' = 1'\,26'',5$ und folglich der gesuchte Höhenwinkel

$$u = w' - \varrho' - (v - \varrho) = 33^0\,33'\,31'',8$$

sein. Da in dem vorliegenden Falle ein Stern beobachtet wurde, so fällt die Höhenparallaxe, und da der Winkelschenkel $A\,B = e = \sqrt{2rh} = \sqrt{26\,132\,864} = 5112$ Toisen, also sehr lang ist, so fällt auch die Schiefenparallaxe weg, welche ausserdem an dem Winkel u noch anzubringen wären.

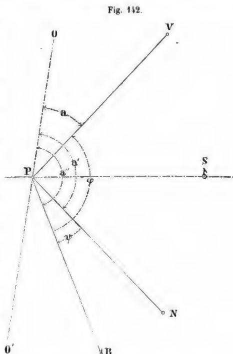
§. 125. **Aufgabe. Die Mittagslinie eines Orts und das Azimuth einer gegebenen Geraden annähernd zu bestimmen.**

Genaue Bestimmungen der Mittagslinie oder des Meridians eines Orts sind nur durch astronomische Hilfsmittel ausführbar; der Geodät muss aber oft die Richtung der Mittagslinie eines Punkts ohne jene Hilfsmittel herstellen. Ist — wie gewöhnlich in solchen Fällen — keine grosse Schärfe der Bestimmung gefordert, so kann er seinen Zweck auf folgende Weise durch

Beobachtung gleicher oder correspondirender Sonnenhöhen, d. i. durch Messung horizontaler und verticaler Winkel erreichen.

Er stellt nämlich einen vollständig berichtigten Theodolithen an einem heiteren Tage mehrere Stunden vor Mittag über dem Punkte P (Fig. 142), durch den die Mittagslinie gehen soll, centrisch und horizontal auf, versieht hierauf das Ocular des Fernrohrs mit einem Sonnenglase und stellt das Fadenkreuz auf die Sonnenscheibe so ein, dass es z. B. deren oberen Rand in der Mitte schneidet. Ohne an dem Instrumente das Geringste zu ändern, liest er die Nonien des Horizontal- und Verticalkreises ab und bemerkt sich die Zeit der Beobachtung nach seiner Taschenuhr. Die Ablesungen auf dem Horizontalkreise seien a und $180^0 + a$, die auf dem Verticalkreise v und $180^0 + v$, und die Beobachtung habe m Stunden vor Mittag stattgefunden. Nun bleibt das Instrument verdeckt und unberührt stehen, bis gegen die m^te Stunde nach dem Mittage, um welche man die Alhidade des Horizontalkreises löst und mit dem noch wie am Vormittage geneigten Fernrohre der Sonne folgt, bis das Fadenkreuz wieder auf die obere Mitte des Sonnenrands einsteht. Ist dieses der Fall, so liest man wieder die zwei Nonien des Horizontalkreises ab. Diese Ablesungen seien $= a'$ und $180^0 + a'$. Dreht man nun die Alhidade des Horizontalkreises so weit nach der Linken zurück, dass die Ablesungen der Nonien $= \frac{1}{2}(a + a')$ und $180^0 + \frac{1}{2}(a + a')$ werden und steckt in der Richtung der Absehlinie ein Signal aus, so bezeichnet dieses mit dem Standpunkte des Instruments die gesuchte Mittagslinie. Denn wenn als bekannt angenommen wird: erstens, dass der wahre Mittag eines Punkts der Erde in dem Augenblicke stattfindet, wo die Meridianebene dieses Punkts durch die Mitte der Sonne geht; zweitens, dass die Richtung nach der Sonne in dem Augenblicke, wo sie im Meridian steht oder culminirt, die Mittagslinie bezeichnet; und drittens, dass die Sonnenhöhe in gleichen Zeitabständen vom wahren Mittage gleich gross ist: so

Fig. 142.



folgt von selbst, dass die gesuchte Mittagslinie P S (Fig. 143) den Horizontalwinkel V P N, welcher aus der vor- und nachmittägigen Beobachtung gleicher Sonnenhöhen hervorging, halbiren muss; ist aber dieses der Fall und bezeichnet P O den Halbmesser des Limbus, welcher durch dessen Nullpunkt geht, so entsprechen die Winkel O P V und O P N den Ablesungen a und a' des Nonius I, und es muss folglich auch die Ablesung am ersten Nonius = $\frac{1}{2}$ (a + a') sein, wenn die Absehlinie des Fernrohrs in der Mittagslinie liegen soll. Der Nonius II liefert selbstverständlich bei den Einstellungen auf V, N, S Ablesungen, welche genau oder sehr nahe 180° mehr oder weniger betragen, als die am ersten Nonius.

Hat man die Richtung der Mittagslinie P S gefunden, so ergibt sich sofort das Azimuth einer durch den Standpunkt des Instruments gehenden Richtung P R, indem man das Theodolithenfernrohr auf den Punkt R einstellt, an den Nonien des Horizontalkreises abliest und aus diesen Ablesungen den Horizontalwinkel S P R berechnet. War die Ablesung bei der Einstellung auf das Object R auf dem Nonius I = a'' und auf dem Nonius II = 180° + a'', so ist das gesuchte Azimuth S P R = a'' — $\frac{1}{2}$ (a + a'). Mit diesem Azimuth sind selbstverständlich die Azimuthe aller um P herum liegenden Punkte bekannt, sobald man deren Richtungswinkel gemessen hat.

Wäre es aus irgend einem Grunde nicht möglich, den Theodolithen behufs der Aufsuchung der Mittagslinie den ganzen Tag hindurch stehen zu lassen, so muss man Vormittags den Winkel R P V = a'' — a = φ und Nachmittags bei der vormittägigen Neigung (v) des Fernrohrs den Winkel R P N = ψ messen und alsdann den Winkel R P S = $\frac{1}{2}$ ($\varphi + \psi$) an R P antragen, was durch Einstellung des Nonius I auf eine Ablesung, welche um $\frac{1}{2}$ ($\varphi + \psi$) kleiner ist als die bei der Visur nach R, geschieht.

Die vorstehende Bestimmungsweise der Mittagslinie fordert nur desshalb eine Zeitbeobachtung, damit man am Nachmittage zur rechten Zeit wieder am Platze ist, um die Sonnenhöhe, auf welche das Fernrohr eingestellt ist, nicht unbenützt vorübergehen zu lassen. Da jedoch die gewöhnlichen Uhren nur die mittlere oder bürgerliche Zeit und also nicht den wahren Mittag anzeigen, wodurch man hinsichtlich der nachmittägigen Beobachtungszeit leicht irre geführt werden kann, so ist es nöthig, sich vorher über die an dem Beobachtungstage stattfindende Zeitdifferenz zu unterrichten und dieselbe zu beachten.

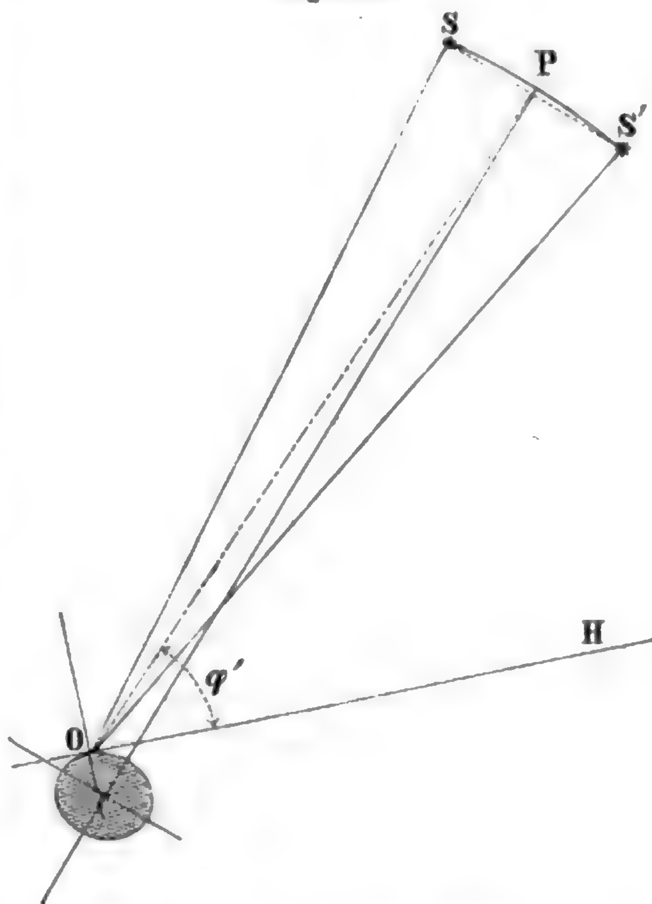
§. 126. **Aufgabe. Die Polhöhe oder geographische Breite eines gegebenen Orts der Erde annähernd zu bestimmen.**

Unter der **Polhöhe** eines Orts versteht man den Höhenwinkel der Verbindungslinie desselben mit dem Himmelspole (einem in der Richtung der Erdaxe unendlich weit entfernten Punkte). Da nun jene Linie mit der Erdaxe parallel zu nehmen ist, so kann man auch sagen: die Polhöhe ist der Neigungswinkel der scheinbaren Horizontalebene eines Orts gegen die Erdaxe. Vergleicht man damit die geographische Breite, welche der Neigungswinkel der Verticallinie eines Orts gegen die Aequatorebene ist (Bd. I, §. 4):

so sieht man sofort ein, dass die Polhöhe und Breite eines und desselben Orts der Grösse nach gleich sind, und dass man demnach die Breite durch die Polhöhe bestimmen kann.

Alle Methoden, die Polhöhe eines Orts mit grösster Genauigkeit zu messen, erfordern einen vorzüglichen astronomischen Apparat (feine Winkelmessinstrumente, Chronometer, Hilfstafeln etc.); wenn man diesen aber nicht besitzt, so kann man mittels eines Theodolithen oder Spiegelkreises durch blosses Messen von Höhenwinkeln die Polhöhe für viele Zwecke (nur nicht für den Normalpunkt einer Landesvermessung) ausreichend genau finden. Würden sich nämlich in den Verlängerungen der Erdaxe, also an den Himmelspolen Fixsterne befinden, so könnte man, je nach der Lage des Orts, dessen Polhöhe gesucht wird, den einen oder den anderen anvisiren, und man brauchte folglich nur den Höhenwinkel dieser Visirlinie zu messen, um die gesuchte Polhöhe zu erhalten. Es gibt aber keine Fixsterne, die gerade so gelegen sind. Dagegen können wir uns auf der nördlichen Halbkugel der Erde des Polarsterns bedienen, welcher dem nördlichen Pole der Himmelskugel am nächsten steht und durch das bekannte Sternbild des grossen Bären leicht aufzufinden ist, da er in der Verlängerung der durch die beiden hinteren Sterne jenes Bilds gehenden Linie liegt und sich durch seine Grösse und Helligkeit von den nächsten Sternen auszeichnet. In Folge der Axendrehung der Erde kommt der Polarstern (S. Fig. 143) täglich zweimal in die Ebene eines jeden Meridians, also auch des Orts O, dessen Polhöhe gesucht wird. Das Zusammentreffen mit der erweitert gedachten Meridianebene eines Orts nennt man die Culmination des Sterns für diesen Meridian und man unterscheidet eine obere und eine untere Culmination (S, S′). Stellt man nun einen Theodolithen über dem Punkte O horizontal und so auf, dass sich die Absehlinie in der Meridianebene dieses Punkts bewegt, und beobachtet man für die obere Culmination den Höhenwinkel S O H $= \varphi_1$ und für die untere den Winkel S′ O H $= \varphi_2$, so lässt sich aus diesen Winkeln derjenige Höhenwinkel φ' berechnen, welcher den Winkel S O S′ halbirt und dessen geneigter Schenkel O P (wegen der ausserordentlichen Entfernung des Punkts P) der Erdaxe

Fig. 143.

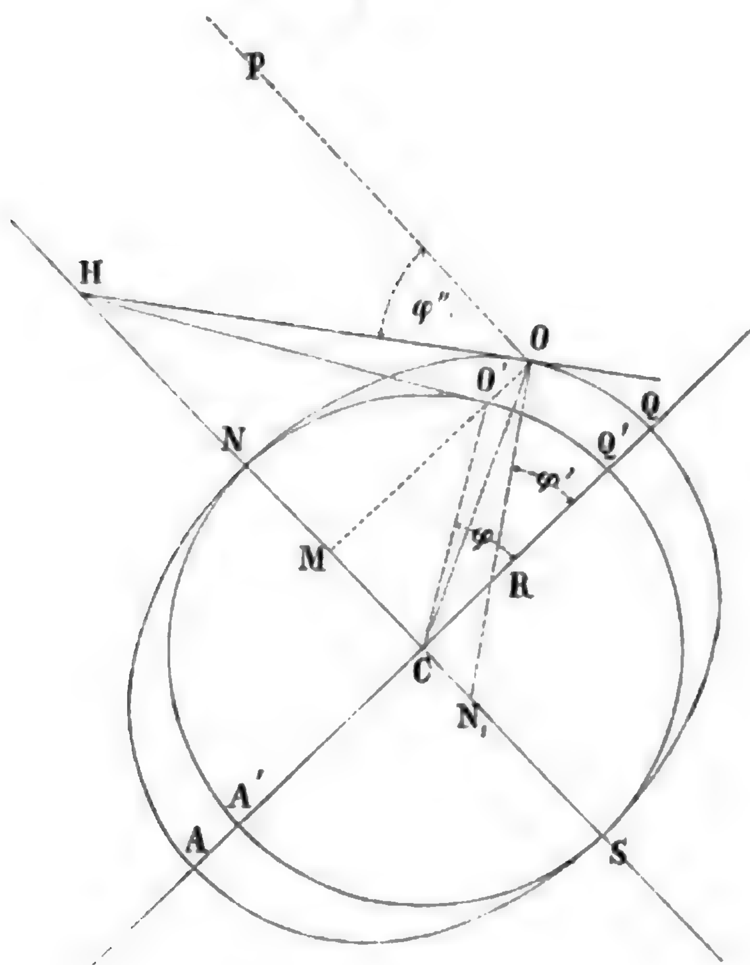


parallel ist: dieser Winkel ist aber die gesuchte Polhöhe und, wie man sofort einsieht, gleich

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{263}$$

vorausgesetzt, dass jeder der gemessenen Höhenwinkel φ_1 und φ_2 schon seine Verbesserung wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung erhalten hat. Man liest nämlich in Folge dieser Strahlenbrechung für die obere Culmination nicht unmittelbar den Winkel φ_1, sondern einen etwas grösseren γ_1 und für die untere Culmination nicht φ_2, sondern γ_2 ab. Bezeichnet nun ϱ_1 die Refraction für γ_1 und ϱ_2 die Refraction für γ_2, so ist $\varphi_1 = \gamma_1 + \varrho_1$ und $\varphi_2 = \gamma_2 + \varrho_2$ zu setzen. Diese astronomischen Refractionen, welche sich nicht wie die terrestrischen nach den in den §§. 121 und 122 entwickelten Formeln $r = 2\,k\,\varphi$ oder $r = 2\,(k)\,\varphi$ berechnen lassen, findet man für den vorliegenden Zweck genau genug aus der Tafel Nr. XIX, welche dem Anhange beigefügt ist und einen Bestandtheil der Bessel'schen Refractionstafeln bildet. Es versteht sich, dass man die Winkel φ_1 und φ_2 oder zunächst γ_1 und γ_2 auch mit einem Spiegelkreise oder Sextanten bestimmen kann, sobald man nur die Zeiten der Culminationen des Polarsterns kennt.

Fig. 144.



Der Winkel φ', den man auf diese Weise erhält, ist gleich dem Winkel der Normale des Punkts O mit der Aequatorebene und heisst die scheinbare oder elliptische Polhöhe des Punkts O, weil er durch die scheinbare Horizontallinie dieses Punkts erhalten wird und der Neigung der Normale des elliptischen Erdmeridians in jenem Punkte gleich ist. Diese Normale geht aber nur für die Breiten 0° und 90° durch den Mittelpunkt der Erde, in allen übrigen Fällen nicht. Will man nun die Breiten durch Winkel messen, welche alle ihre Scheitel in dem Erdmittelpunkte haben, so muss man nach Fig. 144, in welcher A N Q S den Meridian von O und A Q den Schnitt der Aequatorebene vorstellt, statt der Normale O N_1 den Halbmesser O C und statt des Winkels O R Q $= \varphi'$ den Winkel O C Q $= \psi$ setzen. Dieser Winkel heisst

die wahre oder geocentrische Polhöhe von O und ist offenbar um den Winkel C O $N_1 = \beta$ kleiner als die scheinbare Polhöhe φ', d. h. es ist

$$\psi = \varphi' - \beta. \tag{264}$$

Die Verbesserung β kann nach Bohnenberger auf folgende Weise gefunden werden. Beschreibt man mit der kleinen Halbaxe C N = b des elliptischen Meridians O Q S A N einen in der Ebene dieses Meridians liegenden Kreis N O' S A', errichtet die Ordinate O M senkrecht zu S N, und zieht in dem Schnittpunkte O' eine Tangente O' H an den Kreis, so schneidet diese nach bekannten Sätzen der Curvenlehre die Tangente O H der Ellipse in dem Punkte H der verlängerten kleinen Axe S N und es ist, wenn man O' C zieht:

$$\begin{aligned} O\,H\,M &= M\,O\,N_1 = O\,R\,Q = \varphi' \\ O'\,H\,M &= M\,O'\,C = O'\,C\,Q = \varphi \\ \operatorname{tg} O\,H\,M : \operatorname{tg} O'\,H\,M &= O\,M : O'\,M = C\,Q : C\,N \\ \operatorname{tg} M\,O'\,C : \operatorname{tg} M\,O\,C &= O\,M : O'\,M = C\,Q : C\,N. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen mit einander und berücksichtigt, dass O' H M = M O' C = φ, O H M = φ', M O C = ψ, C Q gleich der grossen Halbaxe a und C N gleich der kleinen Halbaxe b des Erdmeridians ist, so folgt

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi' = m \operatorname{tg} \varphi' \tag{265}$$

wobei das Verhältniss von $b^2 : a^2 = m$ gesetzt wurde.

Es ist somit $\beta = \varphi' - \psi = \varphi' - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (m \operatorname{tg} \varphi')$, und wenn man diese Gleichung differenziirt:

$$d\,\beta = d\,\varphi' - \frac{m\,d\,\varphi'}{(1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \varphi') \cos^2 \varphi}.$$

Setzt man das Verhältniss von $(a^2 - b^2) : (a^2 + b^2) = v$, so wird

$$d\,\beta = \frac{2\,v\,d\,\varphi'\,(v + \cos 2\,\varphi')}{1 + v^2 + 2\,v \cos 2\,\varphi'}$$

und wenn man den Bruch, womit $2\,v\,d\,\varphi'$ multiplicirt ist, in die Reihe $\cos 2\varphi' - v \cos 4\,\varphi' + v^2 \cos 6\,\varphi' - \ldots$ auflöst und vorstehende Gleichung integrirt, so folgt

$$\beta = v \sin 2\,\varphi' - \tfrac{1}{2} v^2 \sin 4\,\varphi' + \tfrac{1}{3} v^3 \sin 6\,\varphi' \ldots \tag{266}$$

Will man diesen in Theilen des Halbmessers bestimmten Winkel β, welcher die Neigung der Verticallinie zu dem Erdhalbmesser eines Orts O vorstellt, in Secunden ausdrücken, so muss man ihn noch mit der Anzahl Secunden, welche auf einen Bogen von der Länge des Halbmessers treffen, nämlich mit 206 265″ multipliciren. Hiernach wird, mit Weglassung des zweiten und dritten Glieds des Ausdrucks für β, in dem vorliegenden Falle genau genug:

$$\beta = 206\,265'' \, v \sin 2\,\varphi' \tag{267}$$

und wenn man bedenkt, dass

$$v = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + a\,b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a - b}{a}$$

sehr nahe der Abplattung der Erde, also = $^1/_{300}$ ist, so folgt

$$\beta = 687'' . \sin 2\varphi' \tag{268}$$

Für $\varphi' = 45^0$ ist $\sin 2\varphi' = \sin 90^0 = 1$ und daher der grösste Werth von $\beta = 11'27''$, woraus zu entnehmen, dass diese Verbesserung auch bei kleineren und grösseren Breiten nicht vernachlässigt werden darf.

B. Trigonometrische Höhenmessungen.

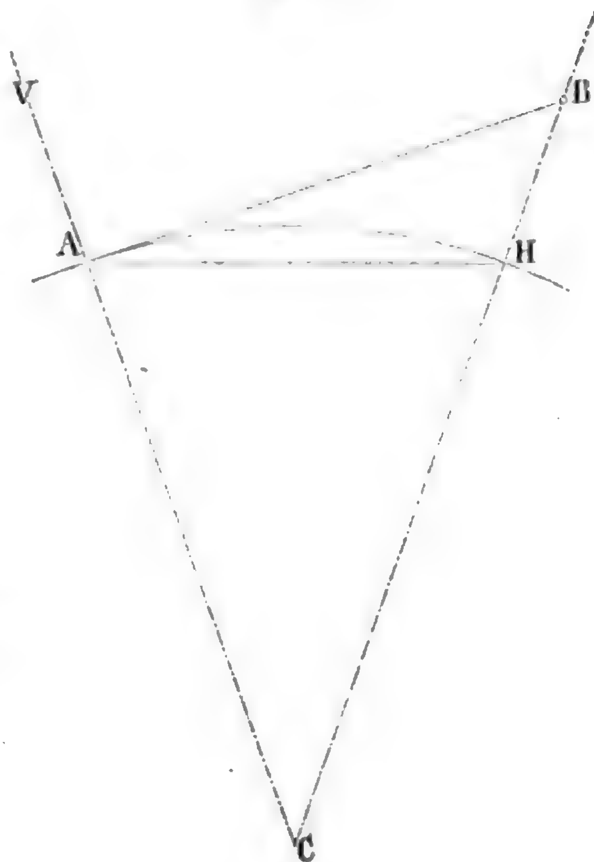
§. 127. Die trigonometrische Höhenmessung besteht darin, dass man die zu bestimmende Höhe mit zwei in der nämlichen Verticalebene liegenden Linien zu einem Dreiecke vereinigt, in welchem drei Stücke (worunter eine Seite) durch mittel- oder unmittelbare Messung gefunden werden können, und dass man aus diesen Daten die gesuchte Höhe nach den bekannten Regeln der Trigonometrie berechnet.

Man theilt die Lehre von diesen Messungen gewöhnlich in zwei Abschnitte, von denen der eine die Höhenbestimmungen aus grossen Entfernungen behandelt. Als kleine Entfernungen werden hierbei diejenigen angesehen, welche keine Rücksicht auf Strahlenbrechung und Erdkrümmung erfordern, und als grosse jene, welche diese Rücksicht erheischen. Wir werden diese Eintheilung nicht machen, sondern sofort die Aufgaben behandeln, welche grosse Entfernungen zwischen dem Höhenobjecte und dem Beobachtungsorte voraussetzen, da in der Lösung dieser Aufgaben auch die Lösung der übrigen enthalten ist.

Das gegenwärtige Capitel liesse sich überhaupt ganz kurz abmachen, wenn man bloss auf die neuere Theorie der Strahlenbrechung Rücksicht nehmen wollte, indem dann nur die Formel (p) in §. 121 zu discutiren wäre, wie es auch in §. 132 geschieht; da jedoch der bisherigen Gewohnheit der Geodäten einige Rechnung zu tragen ist, so werden zuerst die alten Entwickelungen und dann erst die neuen gegeben, mit dem Beifügen, dass beide annähernd gleiche Resultate liefern, wenn man in den alten Formeln unseren Refractions-Coefficienten 2 (k) aus §. 122 statt der in §. 120 angeführten unveränderlichen Constanten 2k einsetzt.

§. 128. **Aufgabe. Die Sehne eines grössten Kreisbogens der Erde, welcher den Horizontalabstand zweier trigonometrischen Punkte misst, durch den Bogen und den Erdhalbmesser auszudrücken.**

Sind A und B (Fig. 145) zwei Punkte der Erdoberfläche und stellt der Kreisbogen AH den wahren Horizont von A und BC eine Verticallinie vor, so ist der Bogen AH der Horizontalabstand der Punkte A und B. Diesen letzteren Abstand könnte man berechnen, wenn in dem schiefwinkeligen Dreiecke ABH die Seite AH und zwei Winkel bekannt wären; es handelt sich also hier, wie in vielen anderen Fällen der trigonometrischen Höhenbestimmungen, um die Berechnung der Sehne AH = s aus dem Bogen AH = b, wenn der Halbmesser AC = r bekannt ist und vorausgesetzt



wird, dass der Bogen b höchstens 8 bis 10 Meilen lang, d. h. nicht grösser ist als die Seite eines Dreiecks erster Ordnung für eine Landesvermessung. Diese Voraussetzung kommt also darauf zurück, dass der Bogen b im Vergleiche zu r sehr klein ist und im ungünstigsten Falle $^1/_{80}$ r beträgt. Drückt man den Winkel A C H im Bogenmasse aus, so wird $C = b : r$ und folglich die Sehne

$$s = 2r \sin \frac{C}{2} = 2r \sin \left(\frac{b}{2r}\right).$$

Da das Verhältniss von $b : 2r$ höchstens $^1/_{160}$ beträgt, so ist genau genug

$$\sin \left(\frac{b}{2r}\right) = \frac{b}{2r} - \frac{1}{6} \left(\frac{b}{2r}\right)^3$$

und folglich auch, wenn man substituirt und reducirt:

$$s = b - \frac{1}{24} \frac{b^3}{r^2}. \qquad (269)$$

Setzt man beispielsweise den Bogen $b = 32\,666{,}08$ Toisen und $r = 3\,266\,608$ Toisen, also das Verhältniss von $b : r = 1 : 100$, so wird

$$s = 32\,666{,}08 - 0{,}137 = 32\,665{,}943 \text{ Toisen},$$

woraus zu entnehmen ist, dass man fast in allen Fällen den Bogen b und die Sehne s als gleich gross ansehen darf, da selbst in einem so ungünstigen Falle, wie der vorliegende ist, der Unterschied zwischen Sehne und Bogen nur $^1/_{240\,000}$ der Bogenlänge beträgt.

§. 129. Aufgabe. Zwei trigonometrische Punkte sind durch ihren Horizontalabstand gegeben: man soll ihren Höhenunterschied bestimmen.

1) Mittels einseitiger Zenithwinkel (nach alter Art).

Es seien A und B (Fig. 145) diese zwei Punkte und $HB = h$ der gesuchte Höhenunterschied.

Misst man in A den scheinbaren Zenithwinkel der Linie $AB = z$, so ist nach §. 120 der wahre Zenithwinkel $VAB = z + \Delta z$. Aus dem bekannten Bogen $AH = b$ folgt nach Gl. (2) im ersten Bande der Centriwinkel $ACH = C = 206\,265 \frac{b}{r}$ Secunden, wenn $AC = r$ gesetzt wird. Es ist somit der Winkel $HAC = AHC = 90^0 - \frac{1}{2} C$ und folglich der Winkel

$$BAH = A = 90^0 - (z + \Delta z) + \tfrac{1}{2} C$$
$$ABH = B = z + \Delta z - C$$
$$AHB = H = 90^0 + \tfrac{1}{2} C.$$

Da nun in dem verticalen Dreiecke ABH die drei Winkel A, B, H

und eine Seite $AH = s = 2r \sin \frac{1}{2} C$ bekannt sind, so findet man hieraus die gesuchte Höhe

$$h = \frac{s \sin A}{\sin B} = \frac{s \cos (z + \varDelta z - \frac{1}{2} C)}{\sin (z + \varDelta z - C)}. \tag{270}$$

Berücksichtigt man, dass nach §. 120 der Refractionswinkel $\varDelta z = kC$ ist, so lässt sich der letzte Ausdruck für h auch so schreiben:

$$h = s \frac{\cos [z - (\frac{1}{2} - k) C]}{\sin [z - (1 - k) C]}. \tag{271}$$

Entwickelt man den letzteren Ausdruck mit Hilfe des Maclaurin'schen Satzes in eine Reihe und berücksichtigt, dass die Sehne $s = 2r \sin \frac{1}{2} C$ ist, so findet man bis auf Glieder dritter Ordnung genau:

$$h = s \cot z + \frac{1 - 2k}{2r} s^2 + \frac{1 - k}{r} s^2 \cot^2 z. \tag{272}$$

Setzt man die constanten Werthe:

$$\frac{1 - 2k}{2r} = m, \quad \frac{1 - k}{r} = n,$$

so wird schliesslich der mit den strengen Ausdrücken für h fast übereinstimmende Näherungsausdruck erhalten:

$$h = s \cot z + m s^2 + n s^2 \cot^2 z. \tag{273}$$

Dass beide Ausdrücke nahezu ganz gleiche Resultate geben, geht aus einem von Winkler (in Crelle's Journal der Mathematik Bd. 50, S. 36) berechneten Beispiele hervor, nach welchem für

$$\begin{aligned} s &= 5880^m,4, & \log r &= 6{,}804\,1294, \\ z &= 73^0 47' 35'', & \log m &= -\,7{,}170\,6609, \\ k &= 0{,}07, & \log n &= -\,6{,}835\,6465 \end{aligned}$$

die strengen Formeln (270) und (271) die Höhe $h = 1711^m,392$ und die Näherungsformeln (272) und (273) $h = 1711^m,390$ liefern.

Vernachlässigt man den Einfluss der Erdkrümmung, d. h. sieht man das in Fig. 145 enthaltene Dreieck ABH als ein bei H rechtwinkliges und folglich den Centriwinkel C als null an, so wird nach Gl. (270) die Höhe

$$h = s \cot (z + \varDelta z) \tag{274}$$

und darf man auch, wegen des unbedeutenden Horizontalabstands s, die Refraction $\varDelta z$ ausser Acht lassen, so erhält man

$$h = s \cot z = s \operatorname{tg} A \tag{275}$$

wobei A den Höhenwinkel der Linie AB vorstellt. Vernachlässigt man bloss die Refraction, aber nicht die Erdkrümmung, so liefern die Gleichungen (270) und (271)

$$h = s \frac{\cos (z - \frac{1}{2} C)}{\sin (z + C)} \tag{276}$$

und aus Gl. (272) folgt für diesen Fall der Näherungsausdruck:

$$h = s \cot z + \frac{s^2}{2r} + \frac{s^2 \cot^2 z}{r}. \tag{277}$$

2) **Mittels gegenseitiger und gleichzeitiger Zenithwinkel** (nach alter Art).

Unter dieser Bedingung kann der Refractionswinkel Δz oder dessen Werth kC aus den Gleichungen eliminirt werden, indem man nach Gl. (255), in welcher z_1 den scheinbaren Zenithwinkel von BA in B vorstellt,

$$2(\Delta z) = 2kC = 180^0 + C - z - z_1$$

setzt. Hierdurch wird alsdann

$$z + \Delta z - \tfrac{1}{2} C = 90^0 - \tfrac{1}{2}(z_1 - z)$$
$$z + \Delta z - C = 90^0 - \tfrac{1}{2}(z_1 - z + C)$$

und folglich geht die Gleichung (270) und mit ihr Gl. (271) über in

$$h = s \frac{\sin \tfrac{1}{2}(z_1 - z)}{\cos \tfrac{1}{2}(z_1 - z + C)}. \qquad (278)$$

Will man hier die Erdkrümmung vernachlässigen, so braucht man nur $C = 0$ zu setzen, wonach sich ergibt

$$h = s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z_1 - z). \qquad (279)$$

§. 130. **Aufgabe. Ein lothrechter Gegenstand ist gegeben, man soll dessen absolute Höhe bestimmen.**

1) **Von einem gegebenen Punkte aus** (Fig. 146).

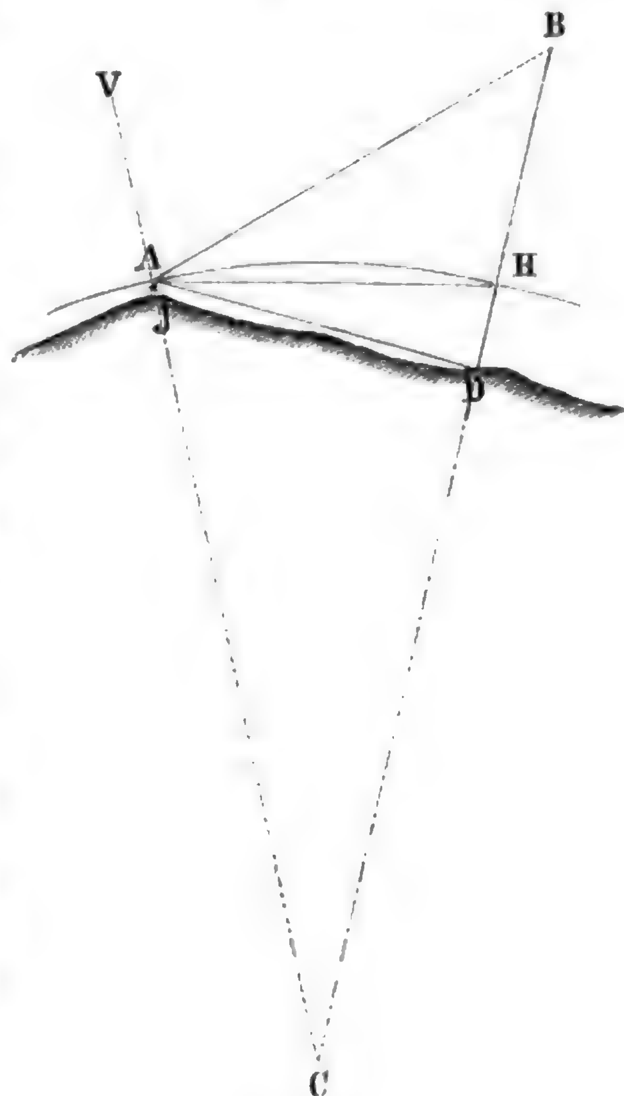


Fig. 146.

Ist BD die gesuchte Höhe und in A die Drehaxe des Theodolithenfernrohrs, so ist nach §. 129 die Höhe des Punkts B über A oder

$$BH = h = s \frac{\cos(z + \Delta z - \tfrac{1}{2} C)}{\sin(z + \Delta z - C)}.$$

Für das Stück DH der Höhe BD hat man ganz ähnliche Betrachtungen wie im vorigen Paragraphen für BH anzustellen. Es ist nämlich, wenn der scheinbare Zenithwinkel der Linie $AD = z'$ gemessen wurde, der wahre Zenithwinkel $VAD = z' + \Delta z$, und da $VAH = 90^0 + \tfrac{1}{2} C$ ist, so ergibt sich der Winkel

$$HAD = z' + \Delta z - \tfrac{1}{2} C - 90^0.$$

Ferner ist, da der Winkel $B = z + \Delta z - C$, der Winkel

$$ADB = 180^0 - (z' + \Delta z - C)$$

daher auch aus dem schiefwinkligen Dreiecke AHD die Höhe

$$DH = h' = -s \frac{\cos(z' + \Delta z - \tfrac{1}{2} C)}{\sin(z' + \Delta z - C)}.$$

Addirt man die Werthe von h und h', so erhält man nach einigen Umformungen die gesuchte Höhe

$$BD = h + h' = \frac{s \sin(z' - z) \cos \frac{1}{2} C}{\sin(z' + \Delta z - C) \sin(z + \Delta z - C)} \qquad (280)$$

Liegt der Gegenstand BD dem Punkte A so nahe, dass man die Erdkrümmung und Strahlenbrechung vernachlässigen darf, so wird

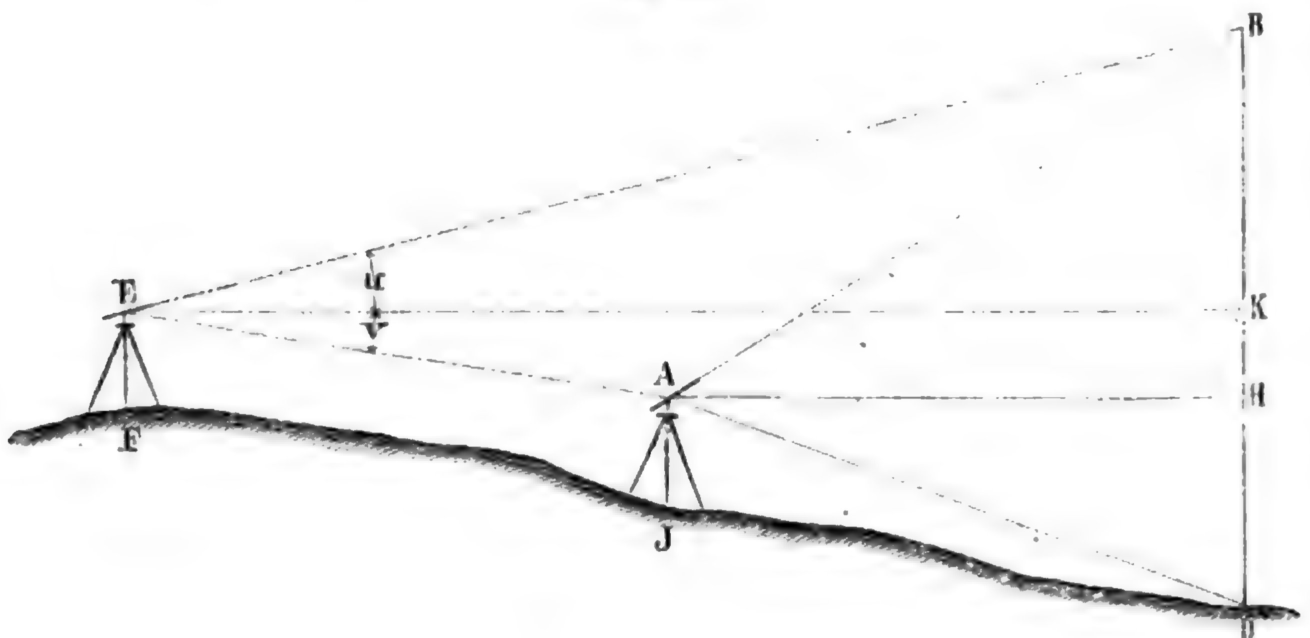
$$BD = s \frac{\sin(z' - z)}{\sin z' \,.\, \sin z} \qquad (281)$$

Hätte man nicht die Zenithwinkel z' und z, sondern den Höhenwinkel $BAH = \alpha$ und den Tiefenwinkel $HAD = \beta$ gemessen, so wäre

$$BD = BH + HD = s\,(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \frac{s \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

und man sieht sofort ein, dass dieser Ausdruck mit dem vorhergehenden übereinstimmt, da $\alpha + \beta = z' - z$, $\alpha = 90^0 - z$, $\beta = z' - 90^0 = -(90^0 - z')$ und $\cos(-\beta) = \cos \beta$.

Fig. 147.



2) Von einer mit BD in einer Ebene liegenden Standlinie FJ aus (Fig. 147).

Es kann bei weniger weit entfernten Punkten vorkommen, dass man die Horizontale $AH = s$ nicht unmittelbar bestimmen kann: in diesem Falle ist das Messungsverfahren so einzurichten, dass man die Länge s mittelbar findet. Zu dem Ende nimmt man hinter dem Punkte A der Fig. 147 noch einen zweiten Standpunkt E an, dass die Gerade AE in einer durch BD gehenden Verticalebene liegt, macht die Instrumentenhöhe $EF = AJ$, wodurch die Linie $FJ = AE$ wird und misst die Länge $FJ = l$, so wie den Höhenwinkel $BEK = u$ und den Tiefenwinkel $KEA = v$ unmittelbar, und berechnet hieraus die Seite AB des Dreiecks AEB aus folgenden drei Stücken: der Seite $AE = l$, dem Winkel $BEA = u + v$ und dem Winkel $EBA = EBK - ABK = 90^0 - (u + z)$. Hiernach wird

$$A B = l \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + z)} \quad \text{und} \quad A H = A B \sin z = l \sin z \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + z)}.$$

Substituirt man diesen Werth von A H für s in der Gleichung (281), so erhält man schliesslich

$$B D = l \frac{\sin(z' - z) \cdot \sin(u + v)}{\sin z' \cdot \cos(u + z)}. \tag{282}$$

3) Von einer mit BD nicht in einer Ebene liegenden Standlinie M'N' aus (Fig. 148).

Stellt BD die Höhe eines Thurms vor, welcher rings von Häusern umgeben ist, so ist in der Regel weder das erste noch das zweite eben beschriebene Verfahren anwendbar, da beide voraussetzen, dass man den Fusspunkt D der Verticallinie BD anvisiren kann. In diesem Falle muss

Fig. 148.

man den horizontalen Abstand des Instruments von der zu messenden Höhe mittelbar durch ein Dreieck bestimmen, welches über der gegebenen Standlinie dadurch errichtet wird, dass man die Verticallinie BD als dritten Eckpunkt annimmt. Man wird desshalb, nachdem die Basis MN (welche so liegen muss, dass man von M und N aus nach der Spitze D visiren kann, und dass das horizontal projicirte Dreieck MND von einem gleichseitigen nicht zu sehr abweicht) mit Messlatten gemessen und auf bekannte Weise auf den Horizont reducirt ist, die Horizontalprojectionen der Winkel $DMN = \mu$ und $DNM = \nu$ so genau als möglich messen und hieraus mit Hilfe der horizontalen Projection der Standlinie $MN = b$ die Projectionen der Dreieckseiten $MD = a$ und $DN = c$ berechnen, wodurch man erhält:

$$a = \frac{b \sin \nu}{\sin(\mu + \nu)}$$

$$c = \frac{b \sin \mu}{\sin(\mu + \nu)}.$$

Wird hierauf in M der Höhenwinkel $DMJ = \alpha$ gemessen, so findet sich das Stück JD der gesuchten Höhe BD gleich

$$h = \frac{b \sin \nu \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\mu + \nu)}.$$

Kann man von M aus nicht nach dem Fusspunkte B des Thurms visiren, so muss der Höhenunterschied zwischen M und B durch ein genaues Nivellement ermittelt werden. Ist dieser $= JB = i$ gefunden, so wird die gesuchte Höhe

$$BD = JB + JD = i + h = i + \frac{b \sin \nu \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\mu + \nu)}. \quad (283)$$

Misst man in dem Punkte N auch den Höhenwinkel $DNH = \beta$, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke DHN, in welchem $HN = c$ ist, das Stück HD der Höhe BD gleich

$$h' = \frac{b \sin \mu \operatorname{tg} \beta}{\sin(\mu + \nu)}.$$

Ermittelt man nun wieder den Höhenunterschied i' zwischen N und B durch Nivelliren, so erhält man einen zweiten Ausdruck für die gesuchte Thurmhöhe, nämlich

$$BD = HB + BD = i' + h' = i' + \frac{b \sin \mu \operatorname{tg} \beta}{\sin(\mu + \nu)}. \quad (284)$$

Stimmt dieser Werth mit dem ersten überein, so ist dieses jedenfalls ein sehr günstiges Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit; und man wird mit dieser vollständig zufrieden sein können, wenn man sich vorher davon überzeugt hat, dass die Standlinie so genau als möglich gemessen ist.

Dass man die Winkel μ und α ebenso wie ν und β mit ein- und derselben Aufstellung des Instruments misst, und dass man den Höhenunterschied der Punkte N und B aus dem Nivellement der Linien MB und MN erhält, bedarf wohl kaum mehr als dieser kurzen Erwähnung.

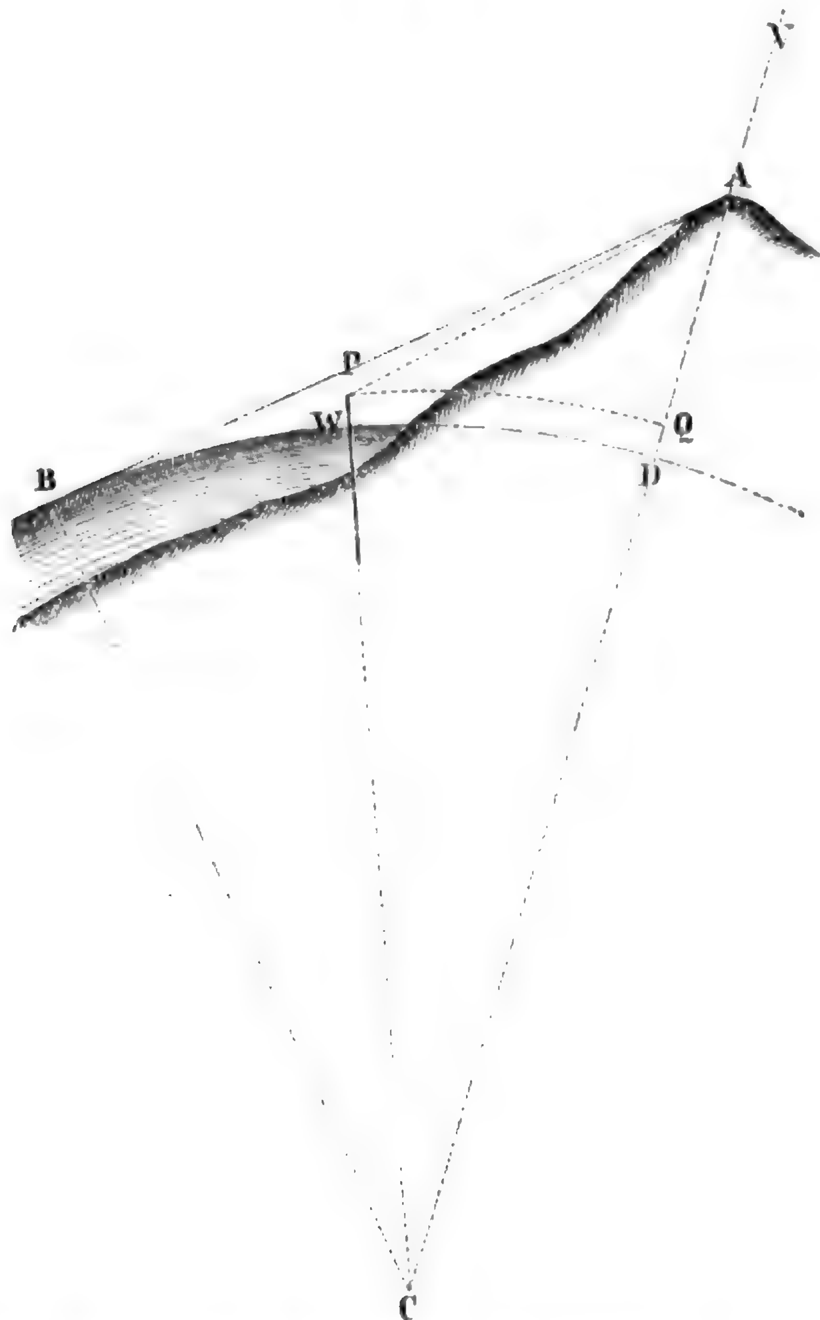
§. 131. Aufgabe. In der Nähe des Meeres die Höhe eines Punkts über dem Meeresspiegel zu bestimmen.

Die relativen Höhenbestimmungen der Hauptpunkte eines Landes, welche man in der Regel mit der Landesvermessung vornimmt, werden in der Absicht gemacht, die absolute Höhe jener Punkte über dem Meere zu erfahren. Hierzu muss aber die absolute Höhe wenigstens eines Punkts des trigonometrischen Netzes bekannt sein. Gewöhnlich wird diese Höhe durch Barometermessungen bestimmt; sicherer aber kann man diese absolute Höhe eines Punkts, der in der Nähe eines Meeres mit geringer Ebbe und Fluth liegt, durch trigonometrische Messungen, und am sichersten durch Nivelliren finden. Hier ist nur von trigonometrischen Bestimmungen die Rede.

1) **Höhenbestimmung nach dem Zenithwinkel des Meeresspiegels.**

Stellt in Fig. 149 der Bogen BD den Meeresspiegel vor und ist A der Punkt, dessen Höhe $AD = h$ bestimmt werden soll, so kann man in A

Fig. 149.



durch Anvisiren der fernsten Stelle B der Meeresfläche den wahren Zenithwinkel

$$VAB = z + \Delta z$$

wobei z den scheinbaren Zenithwinkel und $\Delta z = kC$ die Refraction vorstellt, bestimmen und hieraus und aus dem bekannten Erdhalbmesser $BC = r$ die gesuchte Höhe h berechnen. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABC folgt sofort die Höhe

$$h = CA - CD = \frac{r}{\sin(z + \Delta z)} - r = r\,\frac{1 - \sin(z + \Delta z)}{\sin(z + \Delta z)}.$$

Es ist aber nach einer bekannten trigonometrischen Relation

$$\frac{1 - \sin x}{\sin x} = \cot x \operatorname{tg} (45^0 - {}^1/_2\, x)$$

und daher, wenn man substituirt:

$$h = r \cot (z + \Delta z) \operatorname{tg} [45^0 - {}^1/_2 (z + \Delta z)]. \qquad (285)$$

Will man, da in dem vorliegenden Falle z immer ein stumpfer Winkel ist, die Formel noch bequemer machen, so kann man

$$\cot (z + \Delta z) = - \operatorname{tg} (z + \Delta z - 90^0) \text{ und}$$
$$\operatorname{tg} [45^0 - {}^1/_2 (z + \Delta z)] = - \operatorname{tg} [{}^1/_2 (z + \Delta z) - 45^0]$$

schreiben, wodurch man schliesslich erhält:

$$h = r \operatorname{tg} (z + \Delta z - 90^0) \operatorname{tg} {}^1/_2 (z + \Delta z - 90^0). \qquad (286)$$

Da die Refraction Δz von dem Winkel C abhängt, dieser aber nicht unmittelbar gegeben ist, so hat man vorerst C zu berechnen. Hierzu dient aber das rechtwinklige Dreieck A B C, welches die Gleichung

$$V A B = z + \Delta z = z + k C = 90^0 + C$$

liefert, aus der sofort folgt:

$$C = \frac{z - 90^0}{1 - k} \text{ und } \Delta z = \frac{k}{1 - k} (z - 90^0). \qquad (287)$$

Setzt man diesen Werth von Δz in die Gleichung und schreibt $\frac{1}{1 - k} = 1 + k = m$, so erhält man

$$h = r \operatorname{tg} m (z - 90^0) \operatorname{tg} {}^1/_2\, m (z - 90^0).$$

Da $z - 90^0$ ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man auch annähernd $\operatorname{tg} m (z - 90^0) = m \operatorname{tg} (z - 90^0)$ setzen, und folglich

$$h = {}^1/_2\, r\, m^2 \operatorname{tg}^2 (z - 90^0). \qquad (288)$$

2) Höhenbestimmung mit Hilfe eines Pegels.

Stellt man am Ufer des Meeres, wie es an Flüssen geschieht, einen hinreichend starken und hohen Massstab oder Pegel auf, durch den man nicht nur den höchsten und niedrigsten, sondern auch für einen bestimmten Zeitraum den mittleren Stand des Wasserspiegels beobachten kann: so braucht man nur die Höhe des Berges über diesem Pegel zu messen, um damit auch sofort dessen Höhe über dem Meere zu erhalten.

Bezeichnet in Fig. 149 die Linie P W den Pegel und W den Wasserstand, auf welchen die Höhe A D des Punkts A bezogen werden soll, so findet man von A aus mittels einseitiger Zenithwinkel die Höhe $A Q = h_1$ nach Gl. (271) und, wenn man auch über P einen Theodolithen aufstellen kann, mittels gegenseitiger und gleichzeitiger Zenithwinkel dieselbe Höhe h_1 nach Gl. (278). Addirt man in beiden Fällen den Abstand $P W = Q D = i$ zu h_1, so ist die gesuchte Höhe gefunden, nämlich

$$A D = h = i + h_1. \qquad (289)$$

§. 132. **Aufgabe.** Den Höhenunterschied zweier Punkte, deren Horizontalabstand gegeben ist, mit Rücksicht auf die Bauernfeind'sche Theorie der Strahlenbrechung zu finden.

Es sei nach Fig. 150 A der Standort und B der Punkt, dessen Höhe über A zu finden ist. Zieht man die wahre Horizontale A H, so ist der Bogen $AH = r_0 \varphi$ als Horizontalabstand gegeben, und die Höhe $BH = x$ wird gesucht. Setzt man die in A beobachtete scheinbare Zenithdistanz von $B = z$ und behält die Bezeichnung des Verhältnisses von $5\alpha : m$ mit v und von $m(\cos^2 z + 1 - v) : \cos^2 z$ mit p bei, so ist die vorliegende Aufgabe sofort durch die Formel (p) in §. 121 gelöst, indem

$$x = r_0 \varphi \left(\cot z + \frac{\cos^2 z + 1 - v}{2 \sin^2 z} \varphi + \frac{2 v \cot z}{3 m \sin^2 z} \varphi^2 + \frac{v(p-3)\cot^2 z}{6 m^2 \sin^2 z} \varphi^3 + \dots\dots\right)$$

die gesuchte Höhe mit Rücksicht auf Erdkrümmung und Strahlenbrechung liefert. Man braucht letztere nicht besonders zu berechnen, da sie bereits in der Formel enthalten ist; es kommt nur darauf an, für α, m und v jedesmal die richtigen Werthe einzusetzen, was ebenfalls nach §. 121 geschehen kann.

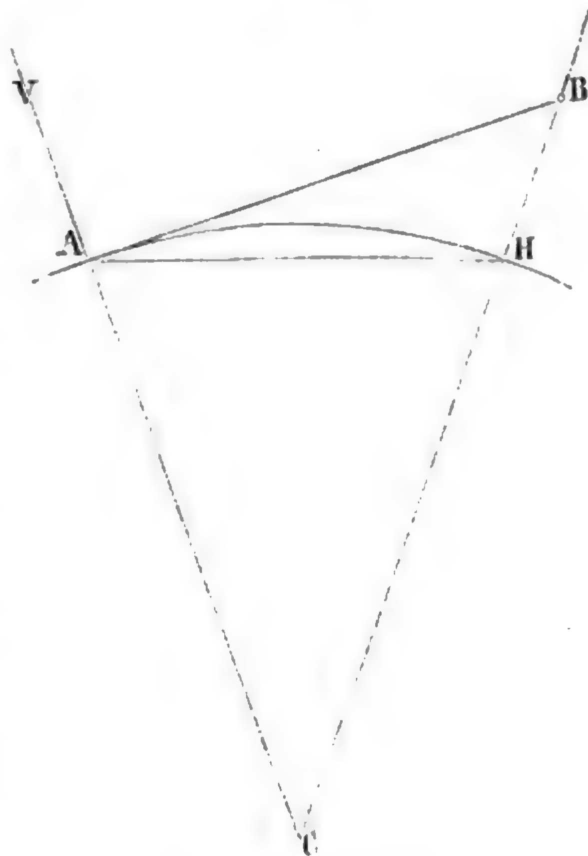


Fig. 150.

In dem Ausdrucke für x ist die Refraction desshalb schon enthalten, weil derselbe aus der Curve des vom Punkte B zum Beobachter in A gelangenden Lichtstrahls abgeleitet ist. Diese Art der Ableitung wird hier nicht zum ersten Male gemacht; sie wurde schon von Laplace, Puissant und Baeyer angewendet; aber die Resultate sind alle verschieden, und sowohl Laplace als Puissant stellen den Werth von x nur durch zwei Glieder einer überall mit demselben Gliede (cot z) beginnenden und nach Potenzen von φ fortschreitenden Reihe dar, während nicht selten noch das vierte Glied dieser Reihe einen merklichen Werth hat. (Siehe des Verfassers Abhandlung über die atmosph. Strahlenbrechung in Nr. 1589 der astron. Nachrichten, S. 80 ff.)

Um die Grösse der Glieder in dem Ausdrucke für x in einem bestimmten Falle zu überschauen, sei $z = 82^0 58'$, $r_0 = 3266\,600$ Toisen, $r_0 \varphi = 9{,}1936$ geogr. Meilen, folglich $\varphi = 0{,}010715$. Lässt man für α, m, v die in §. 121 angegebenen mittleren Werthe a_0, m_0, v_0 gelten, so findet man zunächst $p = 0{,}41403$ und schliesslich

$$x = 4318{,}33 + 157{,}65 + 8{,}41 - 0{,}96 = 4483{,}43 \text{ Toisen.}$$

Wäre $z = 88^0$, $r_0 = 3266\,600$ Toisen, $\varphi = 0{,}02126$, also $r_0 \varphi = 18{,}24$ Meilen,

während α, m, v wie vorhin bleiben, so setzt sich die gesuchte Höhe aus folgenden Gliedern zusammen; es ist nämlich

$$x = 1222{,}28 + 152{,}89 + 2{,}34 + 0{,}058 = 1377{,}57 \text{ Toisen.}$$

Will man die Höhe x unter Vernachlässigung der Strahlenbrechung berechnen, so hat man lediglich $v = 0$ zu setzen, wodurch das dritte und vierte Glied null und

$$x = r_0\, \varphi\, (\cot z + \tfrac{1}{2}(1 + \cot z^2)\, \varphi)$$

wird. Ganz derselbe Werth ergibt sich auch aus dem Näherungsausdrucke (272), wenn man in demselben $k = 0$ und $s = r_0\, \varphi$ setzt.

Wenn man in den Punkten A und B gleichzeitige und gegenseitige Zenithdistanzen z und z' nimmt, so kann man damit ausser dem Höhenunterschiede x auch den $-x$ berechnen, indem man in der Hauptformel $r_0 + x$ für r_0, z' für z, v' für v und m' für m einsetzt; es ist aber nicht möglich, hier eben so wie in §. 129, Nr. 2 die Refraction zu eliminiren, und zwar desshalb nicht, weil unsere strengere Theorie der Strahlenbrechung die bisher geltende Hypothese, dass $\varDelta z = \varDelta z'$ sei, verwirft, indem sie zeigt, dass diese Aenderungen der Zenithdistanzen stets etwas von einander verschieden sind in der Art, dass bei Gleichzeitigkeit und Gegenseitigkeit der Messung der dem unteren Punkte (A) zukommende Werth von $\varDelta z$ grösser ist als der zu dem oberen Punkte (B) gehörige Werth $\varDelta z'$.

Es würde zu weit führen, unsere hierauf bezüglichen, in den astron. Nachrichten Nr. 1589 enthaltenen Untersuchungen ausführlich mitzutheilen; die Ergebnisse derselben dürfen wir aber dem Leser nicht vorenthalten. Wenn nämlich alle Buchstaben ihre bisherige Bedeutung beibehalten, so finden wir

$$\varDelta z = \tfrac{1}{2}\, v\, \varphi \left\{ 1 - \frac{4v - m(5 - 6v)}{3v}\, p_0\, \varphi - (\tfrac{1}{3} p + 1)\, p_0^2\, \varphi^2 - \ldots\ldots \right\}$$

$$\varDelta z' = \tfrac{1}{2}\, v\, \varphi \left\{ 1 - \frac{8v + m(5 - 6v)}{3v}\, p_0\, \varphi - (p - 5)\, p_0^2\, \varphi^2 - \ldots\ldots \right\}$$

$$\varDelta \;= \varDelta z - \varDelta z' = \tfrac{1}{3}\, p_0\, \varphi^2 \left\{ 2v + m(5 - 6v) + v(p - 9)\, p_0\, \varphi + \ldots \right\}$$

während die Summe $\varDelta z + \varDelta z' = r$ wird, wie es sein muss. Will man die Verhältnisse von $\varDelta z$, $\varDelta z'$ und $\varDelta$ zu r kennen lernen, so braucht man nur die vorstehenden Ausdrücke durch den Werth von r zu dividiren; es wird dann

$$\varDelta z = \tfrac{1}{2}\, r \left\{ 1 + \frac{2v + m(5-6v)}{3v}\, p_0\, \varphi + \frac{v(p-5) + 2m(5-6v)}{3v}\, p_0^2\, \varphi^2 + \ldots \right\}$$

$$\varDelta z' = \tfrac{1}{2}\, r \left\{ 1 - \frac{2v + m(5-6v)}{3v}\, p_0\, \varphi - \frac{v(p-5) + 2m(5-6v)}{3v}\, p_0^2\, \varphi^2 + \ldots \right\}$$

$$\varDelta \;= \frac{p_0\, \varphi}{3v}\, r \left\{ 2v + m(5-6v) + [v(p-5) + 2m(5-6v)]\, p_0\, \varphi + \ldots \right\}.$$

Bis jetzt fehlt es zwar noch an zahlreichen Beobachtungen, welche unsere Formeln bestätigen, um so mehr aber sprechen die vorhandenen

für dieselben. Zum Beweise dessen wollen wir hier eine Beobachtungsreihe mittheilen, welche Baeyer und Hesse am Harz durchgeführt haben und ersterer in seiner Abhandlung über die Strahlenbrechung (Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. VII[e] S. T. III. Nr. 5) mitgetheilt hat. Die untere Station befand sich in Kupferkuhle bei Kroppenstedt, die obere auf der Spitze des Brocken. Die Zenithdistanzen wurden mit dreizehnzölligen Theodolithen gemessen; die Beobachtungen dauerten von 6½ Uhr Morgens bis 5½ Uhr Abends, und es fanden zwischen 6 und 9 Uhr Morgens sehr empfindliche und rasche Temperaturwechsel statt.

Station Kupferkuhle.

Nr.	Zeit.	Zenithdistanz z.	Barometer.	Thermometer.	Corr. Δ z.
1	6h 35m	89° 0′ 2″ 94	331‴ 21	+ 8° 4 R	184″ 43
2	7 34	0 12,64	20	12,0	174,73
3	8 34	0 39.29	26	14.3	148.08
4	9 34	0 59,97	34	14,7	127.40
5	10 34	1 10,11	26	15,9	117,26
6	11 34	1 14.32	18	17.2	113,05
7	12 34	1 20,31	18	18,1	107,06
8	1 34	1 20,89	20	18,7	106.08
9	2 34	1 21,44	20	18,7	105,93
10	3 34	1 16,77	11	18,6	110,60
11	4 34	1 13,90	04	18,3	113,47
12	5 34	1 9.05	07	17,8	118,32

Station Brocken.

Nr.	Zeit.	Zenithdistanz z′.	Barometer.	Thermometer.	Corr. Δ z′.
1	6h 35m	91°20′ 19″ 42	295‴ 11	+ 8° 8 R	137″ 77
2	7 34	20 23,71	20	10,3	133.48
3	8 34	20 41,14	37	11,4	116,05
4	9 34	20 40,15	41	10,7	117,04
5	10 34	20 49,46	37	11,5	107,73
6	11 34	20 58,23	39	11,8	98,96
7	12 34	21 2,08	36	11,6	95,11
8	1 34	21 3,22	41	11,8	93,97
9	2 34	21 3,08	43	11,8	94.11
10	3 34	20 59,47	37	11,8	97,72
11	4 34	20 56,32	32	11,3	100,87
12	5 34	20 51,63	27	10,3	105,56

Vergleicht man die aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthe von Δz und $\Delta z'$, welche nach der bisher üblichen Praxis als gleich anzu-

sehen wären (und worauf auch Baeyer kein Gewicht gelegt hat), so fällt sofort auf, dass die Werthe von $\Delta z'$ kleiner sind als die entsprechenden von Δz, wie es unsere Theorie verlangt; und schliesst man in jeder Reihe die drei ersten Beobachtungen wegen der erwähnten raschen Temperaturwechsel aus, so ergibt sich weiter, dass die Differenzen der Correctionen von 9 bis $5^1/_2$ Uhr nur 9 bis 14 Secunden betrugen,[1] und dass die kleinste Differenz gegen 10 Uhr stattfand, welches nach unseren Erfahrungen die geeignetste Beobachtungsstunde am Vormittage ist.

C. Höhenmessen durch Nivelliren.

§. 133. Die trigonometrischen Höhenbestimmungen setzen immer die Kenntniss einer Standlinie voraus und ihre Genauigkeit hängt wesentlich von der Schärfe, womit diese Linie gemessen wurde, und bei grossen Entfernungen von der atmosphärischen Strahlenbrechung und der Erdkrümmung ab.

Werden dergleichen Höhenbestimmungen gleichzeitig mit der Anlage eines Dreiecksnetzes für eine Landesvermessung vorgenommen, so erfolgt die Bestimmung der Dreieckseiten, welche hier als Standlinien erscheinen, nicht auf Rechnung der trigonometrischen Höhenmessung, wesshalb auch diese in einem solchen Falle entschieden den Vorzug vor jeder anderen Methode der Höhenbestimmung verdient.

Handelt es sich um Höhen von Thürmen, Bäumen und anderen erhabenen Gegenständen, welche in ausgedehnten Ebenen stehen, oder deren Spitzen unzugänglich sind, so ist wiederum die trigonometrische Höhenbestimmung die geeignetste, in vielen Fällen sogar die einzig mögliche.

Wenn es aber, wie bei vielen technischen Unternehmungen, darauf ankommt, die relative Höhenlage einer grossen Reihe von Punkten mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, während ihre gegenseitigen Entfernungen nur mit geringer Genauigkeit gemessen zu sein brauchen: so ist die trigonometrische Höhenmessung nicht mehr anwendbar, weil sie in Folge der nicht scharf gemessenen Standlinien und der veränderlichen Strahlenbrechung keine hinreichend genauen Resultate liefern kann, abgesehen von der grösseren Arbeit, welche sie verursacht. In solchen Fällen erscheint das Nivelliren, welches keine Horizontalmessungen voraussetzt und dessen Resultate fast immer von den nachtheiligen Einflüssen der Strahlenbrechung und Erdkrümmung befreit werden können, als die vorzüglichste Art der Höhenmessung.

§. 134. Aufgabe. Den Einfluss der Erdkrümmung und der

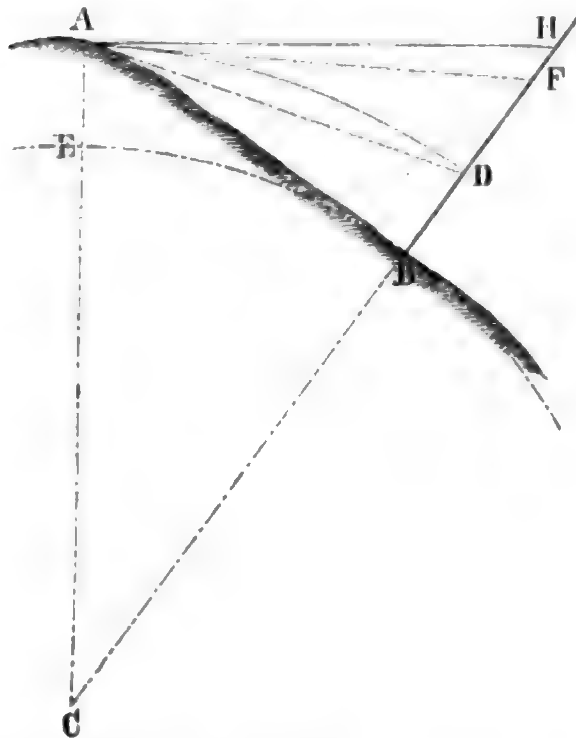
[1] Diese Differenzen sind zwar absolut genommen klein, relativ jedoch grösser als die Rechnung sie verlangt; vielleicht rühren diese Unterschiede von constanten mehrere Secunden betragenden Instrumentenfehlern, möglicherweise aber auch von einer Lothabweichung her, welche fordert, dass die Werthe von $\Delta z'$ um etwa 6 Secunden vergrössert werden müssen.

Strahlenbrechung auf die Resultate des Nivellirens darzustellen.

Im ersten Bande dieses Werks (S. 361) haben wir zur Erläuterung des Begriffs der Nivellirinstrumente angenommen, es handle sich bloss um die Ermittelung des Höhenunterschieds zweier nahe gelegenen Punkte und unter dieser Voraussetzung war es nicht nöthig, auf die Krümmung der Erde und die Brechung des Lichts in der Luft Rücksicht zu nehmen. Jetzt muss der Begriff des Nivellirens etwas schärfer gefasst werden, damit man klar einsieht, in welchem Zusammenhange die Erdkrümmung und Strahlenbrechung mit dem Nivelliren stehen, und in welchen Fällen deren Einflüsse eliminirt oder doch unschädlich gemacht werden können.

1) Der Höhenunterschied zweier Punkte ist der senkrechte Abstand ihrer wahren Horizonte. Sind A und B (Fig. 151) zwei Punkte der Erdoberfläche und A D, B E ihre von dem Erdmittelpunkte C aus beschriebenen und in der Verticalebene A B C liegenden wahren Horizontallinien, so bezeichnen die verticalen Linien A E und B D den gesuchten Höhenunterschied. Denkt man sich nun in dem Punkte A eine in der Ebene A B C liegende horizontale Visirlinie A H, wie sie ein Nivellirinstrument liefert, so ist diese eine Tangente zum wahren Horizont A D und gibt folglich auf einer in B lothrecht stehenden Nivellirlatte nicht die gesuchte Höhe B D, sondern (wenn man vorläufig von der Strahlenbrechung absieht) die Höhe B H an. Man findet somit den Höhenunterschied der Punkte A und B in diesem Falle um den Abstand D H des scheinbaren und wahren Horizonts zu gross.

Fig. 151.



Bezeichnet man diesen Abstand mit h, die Entfernung der Latte vom Punkte A oder A H mit e und den Erdhalbmesser A C mit r_0, so ist nach einem bekannten geometrischen Satze $e^2 = h\ (2\,r_0 + h)$, und da hier h gegen $2\,r_0$ verschwindet,

$$h = \frac{e^2}{2\,r_0}. \tag{290}$$

Um diese Grösse müsste jede Ablesung auf einer Nivellirlatte kleiner gemacht werden, wenn es nicht Nivellirmethoden gäbe, welche diese Verbesserung wegen der Erdkrümmung überflüssig machen.

2) Die Wirkung der atmosphärischen Strahlenbrechung besteht darin, dass sie (mit Bezug auf die vorige Figur) dem in A befindlichen Auge nicht

den Punkt H, sondern einen um den Refractionswinkel tiefer liegenden Punkt F sichtbar macht. Man wird also auch auf der Latte in B nicht die Höhe B H, sondern B F ablesen, welche um das Stück $HF = h'$ kleiner ist. Die Grösse h', welche den Einfluss der Strahlenbrechung auf die Entfernung e der Nivellirlatte von dem Punkte A bezeichnet, lässt sich wie folgt durch h ausdrücken.

Denkt man sich nämlich die Linien A F, A D in Fig. 151 gezogen, so verhalten sich die äusserst kleinen Winkel $HAF = \Delta z$ und $HAD = \frac{1}{2}(ACB) = \frac{1}{2}C$ sehr nahe wie die Linien $HF = h'$ und $HD = h$, und da $\Delta z = kC$, so wird

$$h' = 2kh = k\frac{e^2}{r_0}. \qquad (291)$$

Setzt man nach Gauss die Refractionsconstante $k = 0{,}0653$, so ist

$$h' = 0{,}1306\,h \qquad (292)$$

also der Einfluss der Strahlenbrechung ungefähr 8mal geringer als jener der Erdkrümmung.

3) Fasst man beide Einflüsse zusammen, so ergeben die bisherigen Betrachtungen leicht, dass die Strahlenbrechung den fehlererzeugenden Einfluss der Erdkrümmung theilweise aufhebt, und dass demnach durch das Zusammenwirken beider die Ablesung auf der Nivellirlatte nur um das Stück

$$DF = DH - HF = h - h' = \text{[illegible]}$$

zu verbessern ist. Diese Verbesserung, welche man die Reduction auf den wahren Horizont nennt, ist demnach allgemein gleich

$$c = (1 - 2k)\frac{e^2}{2r_0} \qquad (293)$$

und mit Berücksichtigung des Gauss'schen Coefficienten gleich

$$c = 0{,}4347\frac{e^2}{r_0}. \qquad (294)$$

Die nachstehende erste Tabelle gibt einen Ueberblick der Grösse c für verschiedene Werthe von e und für $r_0 = 3\,266\,608$ Toisen in Pariser Linien.

Entfernung e	Reduction c	Entfernung e	Reduction c	Entfernung e	Reduction c
Toisen.	Par. Linien.	Toisen.	Par. Linien	Toisen.	Par. Linien.
10	0,01	80	0,73	400	18,39
20	0,04	90	0,93	500	28.74
30	0,10	100	1,15	600	41.39
40	0,18	150	2,58	700	56.33
50	0,28	200	4,59	800	73,58
60	0,41	250	7,18	900	93,13
70	0,56	300	10,34	1000	114,97

Die nachfolgende zweite, dem Taschenbuche von Jordan entlehnte Tabelle enthält die Werthe von c in Meter für Entfernungen von 100^m bis zu 10.900^m und für einen der mittleren Breite von Deutschland entsprechenden Erdhalbmesser r_0. (Dieselbe kann auch für trigonometrische Höhenmessungen nach alter Art benützt werden.)

e	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0,000	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,025	0,033	0,044	0,055
1000	0,068	0,082	0,098	0,115	0,134	0,153	0,174	0,197	0,221	0,246
2000	0,273	0,30	0,33	0,36	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57
3000	0,61	0,65	0,70	0,74	0,79	0,83	0,88	0,93	0,98	1,04
4000	1,09	1,15	1,20	1,26	1,32	1,38	1,44	1,51	1,57	1,64
5000	1,70	1,77	1,84	1,91	1,99	2,06	2,14	2,21	2,29	2,37
6000	2,45	2,54	2,62	2,70	2,79	2,88	2,97	3,06	3,15	3,24
7000	3,34	3,43	3,53	3,63	3,73	3,83	3,94	4,04	4,15	4,25
8000	4,36	4,47	4,58	4,69	4,81	4,92	5,04	5,16	5,28	5,40
9000	5,52	5,64	5,77	5,89	6,02	6,15	6,28	6,41	6,54	6,68
10000	6,81	6,95	7,09	7,22	7,37	7,51	7,66	7,80	7,95	8,09

Unsere Theorie der terrestrischen Strahlenbrechung liefert unmittelbar den Ausdruck (293), wenn man in der Formel (p) des §. 121 die Zenithdistanz $Z = 90^0$ setzt, wodurch erhalten wird:

$$x = \tfrac{1}{2}\, r_0\, \varphi^2 (1 - v). \qquad (295)$$

Hier ist $r_0\, \varphi = e$, also $\varphi = \frac{e}{r_0}$, somit $\tfrac{1}{2}\, r_0\, \varphi^2 = \frac{e^2}{2 r_0}$, und v entspricht 2 k, sowie x der Verbesserung c. Werden diese Werthe hier eingesetzt, so ergibt sich vollständig die Formel (293).

1. Die Methoden des Nivellirens.

§. 135. Beträgt der Höhenunterschied zweier Punkte nicht mehr als die Länge der Nivellirlatte und sind diese beiden Punkte nur so weit von einander entfernt, dass eine einzige Aufstellung des Nivellirinstruments hinreicht, jenen Unterschied zu finden: so nennt man das zur Bestimmung dieses Unterschieds nöthige Messverfahren ein einfaches Nivellement; sind aber mehrere Aufstellungen des Nivellirinstruments zur Auffindung des Höhenunterschieds zweier Punkte nöthig, weil dieselben entweder in horizontaler oder verticaler Projection zu weit auseinander liegen: so heisst die Verbindung dieser einfachen Nivellemente für den genannten Zweck ein zusammengesetztes Nivellement.

Die Nivellirmethoden unterscheiden sich lediglich durch die Lage des Standorts des Instruments gegen die einzunivellirenden zwei Punkte; und da der Standort nur entweder in einem der beiden Punkte oder zwischen denselben angenommen wird, so hat man auch nur zwei Arten des Nivellirens,

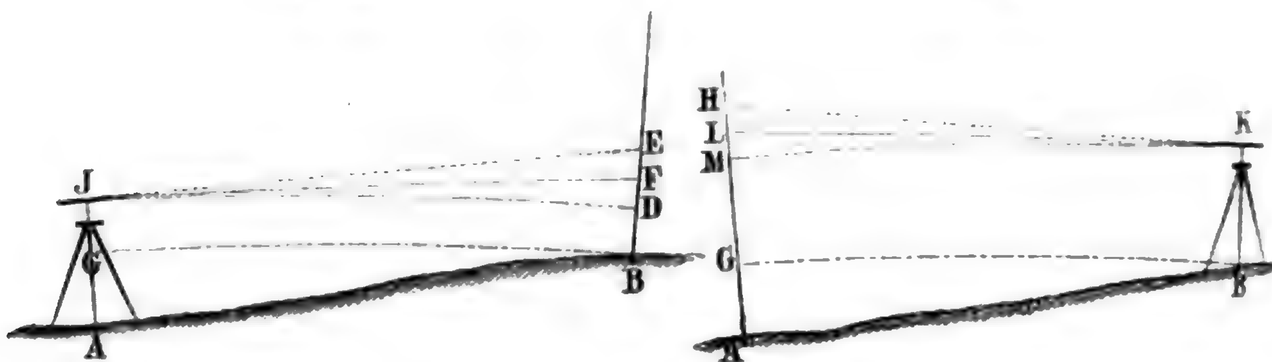
nämlich das Nivelliren aus einem Endpunkte und das Nivelliren aus einem Zwischenpunkte zu betrachten.

§. 136. **Aufgabe. Das Nivelliren aus einem Endpunkte darzustellen.**

Sind A und B (Fig. 152 und 153) die einzunivellirenden Punkte, und stellt B G die in der Verticalebene A B liegende wahre Horizontallinie des Punkts B, die Linie A J aber eine Verticale vor, so ist A G = u der gesuchte Höhenunterschied, welcher sowohl von A als von B aus bestimmt werden kann.

Stellt man das Instrument in A und die Latte in B auf (Fig. 152), so liefert das bekannte Verfahren eine Ablesung auf der Latte, welche dem Lattenabschnitte B F = l entspricht, wenn F derjenige Punkt der Latte ist, welcher um den Refractionswinkel Δz unter der horizontalen Absehlinie J E des Instruments liegt. Zieht man durch den Punkt J die wahre Horizontallinie J D, so wird der Lattenabschnitt nach §. 134 auf den wahren Horizont,

Fig. 152. Fig. 153.



d. i. auf den Punkt D, wo der Kreis J D die Latte trifft, reducirt, indem man c von l abzieht: es ist somit

$$BD = JG = l - c$$

und folglich, wenn man die Instrumentenhöhe A J = i setzt, der gesuchte Höhenunterschied A G = A J — J G oder

$$u = i - l + c. \tag{296}$$

Befindet sich das Nivellirinstrument in dem höher gelegenen Punkte B und die Latte über A (Fig. 153), so gelangt durch das horizontal gerichtete Fernrohr das Bild des Punkts L, welcher um den Refractionswinkel ϱ unter der Visirlinie K H liegt, ins Auge. Steht dieser nun um die Länge l' von A ab und ist K M der wahre Horizont des in der Höhe B K = i' aufgestellten Instruments, so ist auch, da die Reductionsgrösse c dieselbe bleibt:

$$AM = AL - LM = l' - c$$

und folglich der gesuchte Höhenunterschied A G der Punkte A und B oder

$$u = l' - i' - c. \tag{297}$$

Vergleicht man die beiden für u erhaltenen Ausdrücke mit einander und berücksichtigt, dass B höher liegt als A, so folgt daraus der Satz: Die aus der Erdkrümmung und Strahlenbrechung hervorgehende Reduction c ist bei Steigungen zu dem positiven Unterschiede zwischen der Instru-

mentenhöhe und dem Lattenabschnitte zu addiren, bei Gefällen aber davon zu subtrahiren.

Addirt man die beiden Gleichungen (296) und (297), so erhält man

$$u = \tfrac{1}{2}(l' - l) + \tfrac{1}{2}(i - i') \tag{298}$$

d. h. es lässt sich dadurch, dass man das Nivellirinstrument nicht bloss in dem einen Endpunkte (A), sondern auch in dem anderen (B) aufstellt und das Nivellirverfahren vollzieht, der Einfluss der Erdkrümmung und der Strahlenbrechung auf das Resultat der Messung beseitigen, was bei einer einzigen Aufstellung nicht möglich ist.

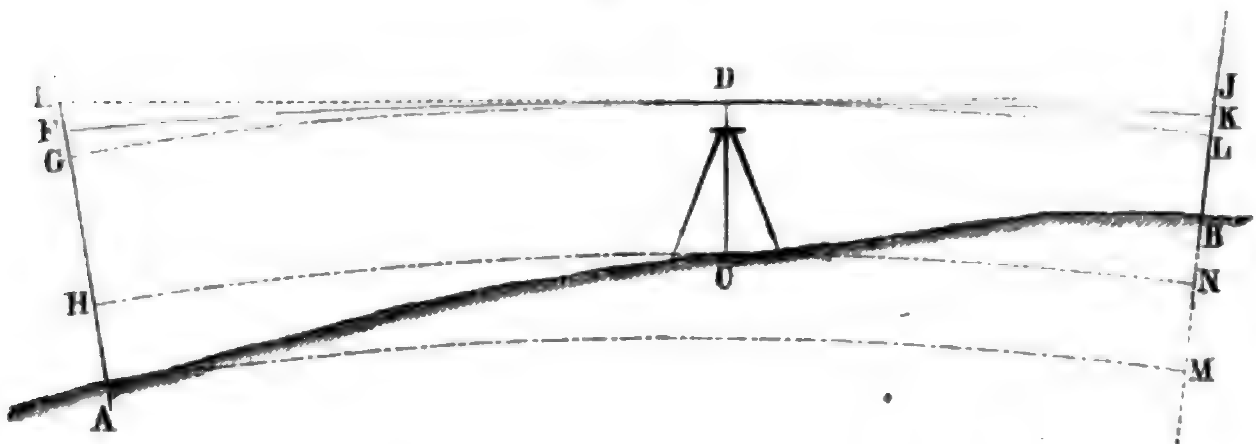
§. 137. Aufgabe. Das Nivelliren aus einem Zwischenpunkte darzustellen.

Sind A und B (Fig. 154) die beiden gegebenen Punkte, deren Höhenunterschied

$$BM = AH + BN = u$$

ermittelt werden soll; steht ferner das Instrument auf einem in oder ausser-

Fig. 154.



halb der Linie AB liegenden Punkte C, welcher von B um die Länge e und von A um die Länge e' entfernt ist; setzt man weiter die Instrumentenhöhe CD = i und die Ablesungen in B = l, in A = l'; und heissen endlich die Reductionen auf den wahren Horizont für den Punkt B = c und für A = c'; so ist nach dem vorigen Paragraphen die Steigung von C bis B oder

$$BN = i - l + c$$

und das Gefäll von C bis A oder

$$AH = l' - i - c'.$$

Addirt man beide Gleichungen, so folgt daraus der Höhenunterschied

$$u = l' - l - (c' - c). \tag{299}$$

Für e' = e wird c' = c und folglich in diesem Falle

$$u = l' - l. \tag{300}$$

Wenn man also das Nivellirinstrument in gleicher Entfernung von den beiden Endpunkten einer Station aufstellt, so eliminirt man dadurch den Einfluss sowohl der Erdkrümmung und Strahlenbrechung, als auch der Instrumentenhöhe auf das Messungsresultat.

Diesen Vortheil gewährt keine andere Art des Nivellirens, und dess-

halb ist auch das „Nivelliren aus der Mitte einer Station" jedem anderen Verfahren vorzuziehen; manchmal ist man jedoch durch Localverhältnisse gezwungen, sich in den Endpunkten aufzustellen.

Das Einhalten der Mitte der Station, d. i. gleicher Entfernungen von den Endpunkten, ist nicht streng nöthig, da nach Gl. (299) der Einfluss der ungleichen Entfernungen e' und e nur dem Unterschiede der ihnen entsprechenden Reductionen c' und c gleich kommt und die Reductionsgrössen selbst für ziemlich grosse Entfernungen nur wenig betragen. Gesetzt, in einer Station stehe das Nivellirinstrument um 50 Toisen oder 300 Pariser Fuss von dem einen und nur um 30 Toisen oder 180 Pariser Fuss von dem anderen Endpunkte ab: so ist nach der in §. 134 mitgetheilten Tabelle $c' = 0{,}2874$ Pariser Linien, $c = 0{,}1035$ Pariser Linien, und folglich $c' - c = 0{,}184$ Pariser Linien; ein Fehler, der bei den meisten Nivellementen nicht beachtet zu werden braucht. Es genügt also vollständig, wenn man die Mitte der Station nach dem Augenmasse bestimmt und dabei auf einen festen Standpunkt des Instruments Rücksicht nimmt. (Es wird jedoch wiederholt erinnert, dass diese „Mitte" nicht in der Verticalebene der einzunivellirenden Punkte zu liegen braucht, sondern nach der Beschaffenheit des Terrains beliebig ausserhalb jener Ebene liegen darf.)

Mit dem im I. Bande beschriebenen Stampfer'schen Nivellirinstrumente kann man nicht bloss nach den beiden hier betrachteten Methoden nivelliren, sondern auch noch auf eine besondere Art den Höhenunterschied zweier Punkte bestimmen. Diese Bestimmungsweise gehört jedoch mehr in das Gebiet der trigonometrischen Höhenmessung als in das des Nivellirens, und da sie bereits im ersten Bande erörtert wurde, so kann sie hier ganz übergangen werden.

2. Das Nivelliren der Linien.

§. 138. Für technische Zwecke sind meist zusammengesetzte Nivellemente erforderlich, um die gegenseitige Höhenlage von mehr als zwei Punkten der Erdoberfläche zu erfahren. Liegen die einzunivellirenden Punkte alle in einer Verticalebene oder in einer lothrechten Cylinderfläche von ganz beliebiger Leitlinie: so heisst das Verfahren zur Bestimmung der Höhenunterschiede aller Punkte der hierdurch bezeichneten geraden oder krummen Linie das Nivellement einer Linie. Sind dagegen die einzunivellirenden Terrainpunkte nach verschiedenen Richtungen zerstreut, aber doch einander so nahe gelegen, dass man aus ihrer gegenseitigen Höhenlage auch die geometrische Form der Fläche beurtheilen kann: so nennt man die Bestimmung der Höhenunterschiede dieser Punkte das Nivellement einer Fläche.

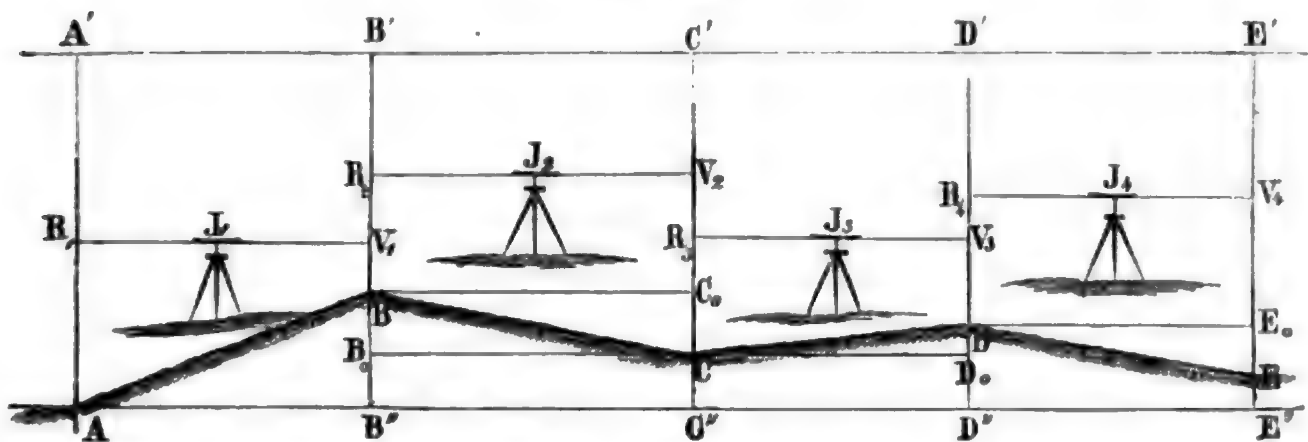
Hat man eine gerade Linie in bekannter Weise auf dem Felde abgesteckt und ausgemessen, so ist ihre Horizontalprojection gegeben; bestimmt man dazu auch die relative Höhenlage aller Punkte dieser Linie durch Nivelliren, so kann man offenbar ein Bild von dem Durchschnitte des Terrains

mit der lothrechten Ebene, wodurch die gerade Linie bezeichnet ist, entwerfen und sich folglich eine klare Vorstellung von der Form des Terrains nach der abgesteckten Richtung machen.

Ein Bild, welches die Erhöhungen und Vertiefungen des Terrains nach einer Linie darstellt, nennt man ein Terrainprofil: die Linie, nach welcher das Profil genommen ist, kann lang oder kurz, gerade oder krumm sein. In dem letzteren Falle stellt das Profil den Durchschnitt einer lothrechten Cylinderfläche mit der Terrainfläche vor. Werden Terrainprofile nach zwei sich schneidenden Richtungen aufgenommen, so unterscheidet man diese Profile dadurch von einander, dass man das grössere ein Längenprofil und das kleinere ein Querprofil nennt: Längen- und Querprofile bedingen also einander; wo die einen oder die anderen fehlen, gibt es nur Profile schlechtweg.

§. 139. Aufgabe. Auf dem Felde ist eine Reihe von Punkten mit Grundpfählen bezeichnet, man soll ihre gegenseitige Höhenlage bestimmen (Fig. 155).

Fig. 155.



Sind A, B, C, D, E .... die gegebenen Punkte, so bestimme man zunächst den Höhenunterschied zwischen A und B nach §. 137, indem man das Nivellirinstrument in J_1 nahezu gleichweit von A und B aufstellt und die Lattenabschnitte

$$AR_1 = r_1 \text{ und } BV_1 = v_1$$

abliest und aufzeichnet. Hierauf bringe man das Instrument nach J_2 zwischen B und C, nahezu gleichweit von beiden Punkten entfernt, verfahre wieder nach §. 137 und bemerke sich die Lattenabschnitte

$$BR_2 = r_2 \text{ und } CV_2 = v_2.$$

Ebenso findet man in dem Punkte J_3 zwischen C und D

$$CR_3 = r_3 \text{ und } DV_3 = v_3,$$

in dem Standpunkte J_4 zwischen D und E

$$DR_4 = r_4 \text{ und } EV_4 = v_4,$$

und in dem Standpunkte J_n der n^{ten} Station:

$$NR_n = r_n \text{ und } N_1 V_n = v_n.$$

Die Ablesungen r_1, r_2, r_3, r_4 .... r_n, welche in den Stationen 1, 2,

3, 4 .... n auf den rückwärts gelegenen Punkten A, B, C, D .... N gemacht wurden, nennt man „Rückblicke“ und die Ablesungen v_1, v_2, v_3, v_4 .... v_n, welche in denselben Stationen den vorwärts gelegenen Punkten B, C, D, E .... N_1 angehören, „Vorblicke.“ Mit diesen Ablesungen ist die Aufnahme des Nivellements vollendet.

Die Berechnung desselben erstreckt sich zunächst auf die Höhenunterschiede zwischen je zwei auf einander folgenden Punkten. Zieht man stets den Vorblick vom Rückblicke ab, so gibt das Vorzeichen der wirklich ausgerechneten Differenz an, ob von dem vorhergehenden Punkte zum folgenden eine Steigung oder ein Gefäll stattfindet; zieht man aber immer nur die kleinere Zahl von der grösseren ab, so ist zu der hierdurch erhaltenen positiven Differenz noch zu bemerken, ob sie eine Steigung oder ein Gefäll bezeichnet.

In dem vorliegenden Falle geben Messung und Rechnung

von A bis B eine Steigung $B''B = r_1 - v_1 = + (r_1 - v_1)$
„ B „ C ein Gefäll $C^0C = v_2 - r_2 = - (r_2 - v_2)$
„ C „ D eine Steigung $D^0D = r_3 - v_3 = + (r_3 - v_3)$
„ D „ E ein Gefäll $E^0E = v_4 - r_4 = - (r_4 - v_4)$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Mit den Steigungen und Gefällen zwischen je zwei auf einander folgenden Punkten lassen sich sehr leicht die Höhenunterschiede zwischen je zwei getrennten Punkten berechnen. Denn zieht man durch die Punkte A, B, D, E ... horizontale und verticale Linien, so überzeugt man sich leicht, dass der Höhenunterschied

zwischen A und $B = BB'' = u_1 = r_1 - v_1$
„ B „ $C = CC'' = u_2 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2$
„ C „ $D = DD'' = u_3 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3$
„ D „ $E = EE'' = u_4 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3 + r_4 - v_4$

und dass somit auch der Höhenunterschied zwischen dem Endpunkte der n^{ten} und dem Anfangspunkte der ersten Station

$$u = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3 + \ldots\ldots + r_n - v_n$$

ist. Bezeichnet man die Summe aller Differenzen aus r und v von $r_1 - v_1$ bis $r_n - v_n$ mit $\Sigma (r - v)_n$, so lässt sich die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$u = \Sigma (r - v)_n \qquad (301)$$

womit demnach auf sehr einfache Weise ausgedrückt ist, dass der Höhenunterschied zwischen irgend zwei Punkten einer nivellirten Linie gleich ist der algebraischen Summe aller Steigungen und Gefälle zwischen diesen Punkten.

Da sich der vorletzte Ausdruck für u auch so schreiben lässt:

$$u = (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n) - (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n)$$

und da man die Summe aller r von r_1 bis r_n durch Σr_n und die Summe aller v von v_1 bis v_n durch Σv_n bezeichnen kann, so ist auch

$$u = \Sigma r_n - \Sigma v_n \qquad (302)$$

d. h. man erhält den Höhenunterschied irgend zweier Punkte einer nivellirten Linie auch dadurch, dass man von der Summe aller Rückblicke die Summe aller Vorblicke zwischen diesen zwei Punkten subtrahirt.

Die beiden Gleichungen (301) und (302) geben den Verticalabstand jedes Punkts der nivellirten Linie von einer Horizontalebene, die durch den Anfangspunkt A geht. Statt dieser Horizontalebene kann man aber auch jede andere wählen, welche um eine beliebige Grösse über oder unter A liegt. Befindet sich diese Ebene, welche man den „Generalhorizont" des Nivellements nennt, wie es in der Regel der Fall ist, über allen Punkten des Längenprofils und insbesondere um die Grösse h über dem Punkte A, so ist der Abstand des Endpunkts der n^{ten} Station von dem allgemeinen Horizont

$$y = h - u = h - \Sigma (r - v)_n \qquad (303)$$

und läge der Generalhorizont unter allen Punkten des Profils, so würde selbstverständlich $y = h + u$ sein.

Die durch allgemeine Grössen angedeuteten Berechnungen eines Nivellements gestalten sich bei wirklichen Ausführungen viel einfacher als es hier den Anschein hat, wie die Lösung der folgenden Aufgabe beweist.

§. 140. Aufgabe. Ein Längenprofil aufzunehmen, zu berechnen und aufzutragen.

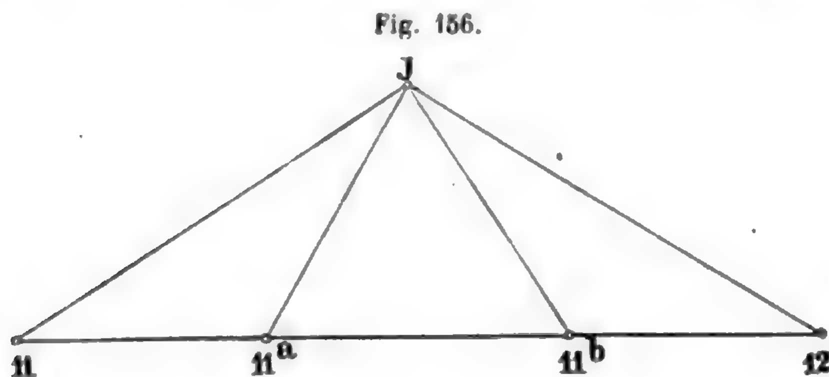
1. Aufnahme. Nachdem die Richtung abgesteckt ist, in welcher das Profil zu nehmen ist, besteht die nächste Arbeit in der Bezeichnung der einzunivellirenden Punkte. Dazu gehören erstens alle Punkte, in welchen die Durchschnittslinie ihre Richtung im verticalen Sinne ändert, wie z. B. in den Punkten A, B, C, D, E.... der Fig. 155 und zweitens jene Punkte, welche gleiche grössere Abschnitte der Horizontalprojection bezeichnen. Diese letzteren Punkte nimmt man bloss desswegen mit in das Längenprofil auf, um die horizontalen Entfernungen der einzelnen Punkte besser übersehen zu können. Man macht daher ihre horizontalen Abstände entweder = 100 Meter oder = 500 Fuss, oder 100 Klafter = 600 Fuss, oder 100 Ruthen = 1000 Fuss, und bezeichnet sie, von 0 anfangend, mit fortlaufenden Nummern, so dass man also bei jeder Nummer sofort die horizontale Entfernung des Punkts vom Anfangspunkte der Linie kennt. Die mit Nummern bezeichneten Endpunkte gleicher Abschnitte der einzunivellirenden Linie nennt man Hauptpunkte, im Gegensatze zu den innerhalb derselben liegenden Brechungspunkten, welche Zwischenpunkte heissen. Diese werden mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets in der Art bezeichnet, dass man diese Buchstaben der Nummer des vorausgehenden Hauptpunkts in Form eines Exponenten beifügt. Sind also z. B. zwischen den Hauptpunkten Nr. 5 und 6 vier Zwischenpunkte zu bezeichnen, so heisst der erste an Nr. 5 stehende Punkt: 5^a, der zweite 5^b, der dritte 5^c, und der vierte 5^d. Wegen der Pfähle vergleiche man §. 87 des ersten Bands.

Man begreift leicht, dass es wegen dieser an gleiche Horizontalabschnitte der zu nivellirenden Linie geknüpften Bezeichnungen der Punkte nöthig ist,

mit dem Abpflocken der Linie auch das Ausmessen[1] derselben in horizontaler Richtung vorzunehmen. Dieses Ausmessen derselben geschieht in der Regel mit der Messkette, obwohl es besser wäre, Messlatten anzuwenden, um zwischen den Genauigkeiten der Horizontal- und Höhenmessungen ein besseres Verhältniss herzustellen. Es versteht sich übrigens von selbst, dass man nicht bloss die Hauptabschnitte der Linie, sondern die horizontalen Entfernungen aller Haupt- und Zwischenpunkte abmisst und zwar zweimal, um sicher zu sein, dass in diesen Messungen kein grober Fehler liegt.

Ist die ganze Linie abgepflockt und horizontal ausgemessen, so beginnt das Nivelliren in der schon bekannten Weise, nur mit dem Unterschiede, dass man, wenn es das Terrain und die Entfernungen erlauben, von einem Standpunkte aus nicht bloss zwei Punkte, sondern so viele als man gut übersehen kann, einnivellirt. Sind also z. B. die Punkte Nr. 11 und Nr. 12 (Fig. 156) nur so weit von einander entfernt, dass sie von dem Standpunkte J aus noch deutlich anvisirt werden können, und liegen die Zwischenpunkte 11^a und 11^b so, dass man sie von J aus ebenfalls gut sehen kann: so wird die Latte nach einander in den Punkten 11, 11^a, 11^b, 12 abgelesen und hierauf die Station gewechselt. Da die Entfernungen von J nach 11 und 11^a oder von J nach 12 und 11^b ungleich sind, so gleicht sich streng genommen der Einfluss der Strahlenbrechung und Erdkrümmung in den Höhenunterschieden zwischen 11 und 11^a oder zwischen 12 und 11^b nicht aus; derselbe ist aber auch so gering, dass er wohl übersehen werden darf. Denn wenn die Entfernung von J bis 11 sogar 300' und bis 11^a nur 60' beträgt, so ist der Fehler, der durch Vernachlässigung der Correction $c' - c$ in den Höhenunterschied zwischen 11 und 11^a kommt, nach der Tabelle auf S. 288 nur = 0,2759 Pariser Linien und daher um so weniger zu beachten, als er sich nicht durch das ganze Nivellement fortpflanzt, wie es der Fall wäre, wenn die Entfernungen des Instruments von den Endpunkten (Nr. 11, Nr. 12) der Station sehr ungleich gewählt würden.

Fig. 156.



Für die Herstellung eines brauchbaren Nivellements ist eine Aufzeichnung der Beobachtungen, welche nicht leicht zu Irrungen Veranlassung gibt, sehr wichtig, wesshalb auf ein geeignetes Schema hierfür immerhin ein Gewicht zu legen ist. Das nachstehende erste Schema kann wegen seiner Einfachheit und Uebersichtlichkeit besonders empfohlen werden.

[1] Die Horizontalmessungen sind lediglich wegen des Auftragens des Nivellements zu machen.

Erstes Schema.

Punkt.	Ablesung.	Steigt.	Fällt.	Ordinate.	Bemerkungen.
0	2,685			100,000	Anfangspunkt.
a	1,213	1,472		98,528	
b	0,156	1,057		97,471	
c	2,869		2,713	100,184	
c	3,456				
1	3,201	0,255		99,929	
a	0,345	2,856		97,073	
b	2,678		2,333	99,406	
b	1,234				
2	1,567		0,333	99,739	Strassenrand.
2 + 1,4	2,345		0,778	100,517	Grabensohle.
2 + 2,8	1,432	0,913		99,604	Grabenrand.
a	0,987	0,445		99,159	

In die erste Spalte werden die Punkte eingetragen, auf denen die Nivellirlatte steht; in die zweite die Ablesungen auf dieser Latte; in die dritte und vierte die Steigungen und Gefälle von einem Punkte zum anderen; in die fünfte die Abstände der einnivellirten Punkte vom allgemeinen (über allen Punkten gelegenen) Horizont; in die sechste Bemerkungen, welche sich auf die einnivellirten Punkte beziehen. Jeder Stationswechsel (hier bei 0^c, 1^b, 2^a) wird durch einen die beiden ersten Spalten durchschneidenden Querstrich angedeutet, und nur diese zwei Spalten nebst der letzten werden auf dem Felde ausgefüllt, alle übrigen zu Hause.

Eine andere Art der Aufschreibung und Berechnung, welche auch üblich ist und sich durch Einfachheit empfiehlt, ist in dem folgenden zweiten Schema vorgestellt.

Zweites Schema.

Punkt.	Ablesung.	Meereshöhe	Horizont.	Bemerkungen.
0	2,685	315,500	318,185	Anfangspunkt.
a	1,213	316,972		
b	0,156	317,029		
c	2,869	315,316		
c	3,456	315,316	318,772	
1	3,201	315,571		
a	0,345	318,427		
b	2,678	316,094		
b	1,234	316,094	317,328	
2	1,567	315,861		Strassenrand.
2 + 1,4	2,345	313,983		Grabensohle.
2 + 2,8	1,432	315,896		Grabenrand.
a	0,987	316,341		

Die zwei ersten Spalten stimmen mit denen des ersten Schemas vollständig überein; in die dritte wird die Höhe über Meer nach der des Anfangspunkts (welche übrigens nicht genau bekannt zu sein braucht) eingetragen; in der vierten stehen die Meereshöhen der horizontalen Visirebenen der Stationen; in der fünften Bemerkungen wie in der letzten Spalte des ersten Schemas. Die Meereshöhe des Horizonts ist stets gleich der Summe der Meereshöhe des Anfangspunkts plus der Ablesung auf demselben; demnach ist auch die Meereshöhe jedes folgenden Punkts leicht zu finden, wenn man dessen Ablesung von der Höhe des Horizonts abzieht. Die vorstehenden Rechnungen werden sofort auf dem Felde gemacht und zu Hause nachgerechnet. Desshalb werden auch die Querstriche, welche die Stationswechsel andeuten, durch die ersten vier Spalten gezogen.

2. Berechnung. (Nach dem ersten Schema.) Die Steigungen, Gefälle und Ordinaten werden, wie bemerkt, zu Hause oder wenigstens nicht gleich unmittelbar nach jeder Beobachtung berechnet. Wie man dabei zu Werke geht, ergibt sich aus dem Schema selbst. Hier werden nur noch Controlen der Rechnung mitgetheilt.

Nach den Gleichungen (301) und (302) soll $\Sigma\, r_n - \Sigma\, v_n = \Sigma\,(r - v)_n$ sein; in dem vorliegenden Falle ist

$$\Sigma\, r_n = r_1 + r_2 + r_3 = 2{,}685 + 3{,}456 + 1{,}234 = 7{,}375$$
$$\Sigma\, v_n = v_1 + v_2 + v_3 = 2{,}869 + 2{,}678 + 0{,}987 = 6{,}534$$

folglich $\Sigma\, r_n - \Sigma\, v_n = 7{,}375 - 6{,}534 = 0{,}841$;

ferner ist $\Sigma\,(r - v)_n = 6{,}998 - 6{,}157 = 0{,}841$

und somit, wie es sein muss, die Differenz aller Steigungen und Gefälle gleich der Differenz aller Rück- und Vorblicke.

Die Uebereinstimmung dieser beiden Differenzen kann man als ein günstiges Zeichen für die fehlerfreie Berechnung der Steigungen und Gefälle zwischen 0 und 2^a ansehen. Da nun von 0 bis 2^a eine Steigung von 0,841 stattfindet, und da der Abstand des Punkts 0 vom allgemeinen Horizont $= 100^m{,}00$ angenommen wurde, so muss der Abstand des Punkts $2^a = 100^m - 0{,}841 = 99{,}159^m$ sein. Kommt man durch die Berechnung aller Ordinaten am Schlusse zu demselben Resultate, so kann man hierin wieder ein günstiges Zeichen für diesen Theil der Rechnung erblicken.

Die hier angedeuteten Proben muss man auf jeder Seite der oft sehr ausgedehnten Nivellementstabellen vornehmen, wenn man nicht Gefahr laufen will, einen grossen Theil der Ordinatenberechnungen wiederholen zu müssen; denn jeder Fehler in der Berechnung der Steigungen oder Gefälle, sowie jeder Fehler in einer Ordinate kehrt in allen Ordinaten wieder, da jede folgende aus der vorhergehenden bestimmt wird.

3) Genauigkeit. Ein Urtheil über die Genauigkeit eines Nivellements lässt sich nur aus einer zweiten von der ersten unabhängigen Messung schöpfen. Daher ist es durchaus nöthig, dass man jede Linie zweimal mit gleicher Sorgfalt nivellirt und, nachdem für jedes Nivellement die Steigungen

und Gefälle berechnet sind, vergleicht, ob diese Ergebnisse der beiden Messungen für je zwei gleichnamige Stationen stimmen oder nicht. Kommen hier bloss Differenzen von einigen Millimetern vor, so kann man diese Abweichungen übersehen; betragen aber die Unterschiede in den Messungsresultaten mehr, so entscheidet an den betreffenden Stellen ein drittes Nivellement, welche von den beiden ersten Messungen, oder ob keine derselben die richtige war. Die hierdurch sich ergebenden Verbesserungen der Beobachtungen werden in die Nivellementstabellen eingetragen, und erst hierauf beginnt die Berechnung der Ordinaten für beide Nivellemente gesondert.

Die Differenz, welche beide Rechnungen in der letzten Ordinate zeigen, dividirt durch die Länge der nivellirten Linie, sehen die meisten Techniker als die relative Genauigkeit des Nivellements an, und nach diesem Verhältniss beurtheilen sie auch die Güte der Arbeit. Durch sorgfältige Behandlung der Instrumente, genaues Einstellen und Ablesen, richtiges Aufschreiben etc. kann man es bald dahin bringen, dass zwei Nivellemente von 50000 Meter Länge auf 0,1 Meter stimmen, also eine relative Genauigkeit von 1 : 500000 in dem hier angedeuteten (falschen) Sinne haben. Eine solche Genauigkeit besitzt aber das Nivellement keineswegs im (richtigen) Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wovon in §. 142 gehandelt wird.

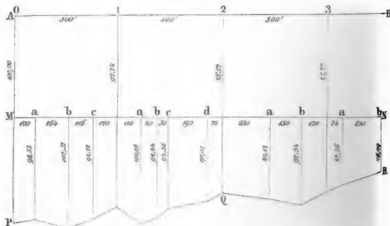
4. Ausgleichung von Differenzen. Wenn zwei Nivellemente einer und derselben Linie nicht innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen übereinstimmen, so werden wohl auch statt des eben angegebenen practischen Verfahrens (die mehr als 3 bis 5^{mm} betragenden Differenzen durch eine dritte Messung in einzelnen Stationen zu verbessern und hierauf eines der beiden Nivellemente als das richtige anzusehen) Ausgleichungen der Differenzen durch Vertheilung des Gesammtfehlers über das ganze Nivellement vorgenommen. Die Methoden, nach denen dieses geschieht, sind verschieden; unter allen aber scheint jene noch die annehmbarste zu sein, welche das arithmetische Mittel der aus dem ersten und zweiten Nivellement hervorgegangenen Abstände der einnivellirten Punkte vom allgemeinen Horizont als die richtigen Ordinaten (Coten) dieser Punkte ansieht. Wir rathen jedoch dringend, diese Ausgleichungen erst dann vorzunehmen, wenn man sich überzeugt hat, dass in den einzelnen Stationen keine grösseren Fehler als von 3 bis 5^{mm} vorkommen.

5. Auftragen. Unter dem „Auftragen" eines Profils versteht man die Zeichnung desselben aus den durch die Aufnahme und Berechnung des Nivellements gegebenen Stücken. Die Fig. 157 stellt ein Stück von einem Längenprofile vor, wie es die Ingenieure in der Regel zeichnen und wozu die Ergebnisse der Aufnahme und Berechnung in der nachstehenden Tabelle enthalten sind.

Punkt.	Entfernung.	Ordinate.	Punkt.	Entfernung	Ordinate.
0		100,00	1 c		90,07
	100			190	
a		98.53	d		86,52
	164			70	
b		102,51	2		89,18
	116			230	
c		98.18	a		92,34
	120			150	
1		92,74	b		85,72
	110			120	
a		100.08	3		82,56
	80			74	
b		98,44	a		76,09
	50			210	
c		94.36	b		

Zur Erläuterung der Zeichnung mögen folgende Bemerkungen dienen: Alle Ordinaten werden von dem allgemeinen Horizont A H an abgemessen, obwohl die Zwischenpunkte nur bis an die dem Horizont parallele

Fig. 157.



Linie M N gezogen sind. Diese Anordnung hat lediglich darin ihren Grund, dass man durch sie einen schnelleren Ueberblick der horizontalen Entfernungen oder Abscissen der einnivellirten Punkte gewinnt. Der Massstab der Ordinaten ist 10mal grösser als jener der Abscissen; die Linie P Q R gibt also nur ein verzerrtes Bild des nivellirten Terraindurchschnitts. Durch diese Anordnung gewinnt man aber einen schnelleren Ueberblick der Höhenunterschiede, als es bei gleichen Massstäben für Abscissen und Ordinaten möglich wäre. Denn da für die Abscissen der Längenprofile nur kleine Massstäbe gewählt werden können, wenn man die Zeichnung nicht ungebührlich gross machen will, so würden sich die häufig ganz unbedeutenden Höhenunterschiede von einem Punkte zum anderen oft kaum erkennen lassen, wenn man sie in den Massstäben der Abscissen darstellen wollte. Das Ver-

hältniss der Massstäbe für die Längen und Höhen wird den Umständen gemäss gewählt.

§. 141. Aufgabe. Ein Querprofil aufzunehmen, zu berechnen und aufzutragen.

Die Absicht, in welcher Querprofile aufgenommen werden, besteht entweder in der Darstellung einer grösseren Terrainfläche nach ihren Erhöhungen oder Vertiefungen mittels horizontaler Schnittlinien, oder in der Benützung jener Profile zur Berechnung von Erdmassen, welche von einer Stelle zur anderen zu versetzen sind. In dem ersteren Falle ist das Querprofil mit derselben Genauigkeit wie ein Längenprofil aufzunehmen, wesshalb dabei auch alle Regeln des vorigen Paragraphen zur Anwendung kommen; in dem letzteren Falle aber, wo überdiess die Querprofile nur eine geringe Länge haben, darf die Genauigkeit der Aufnahme eine etwas geringere sein als vorhin. Hier wird lediglich der zweite Fall behandelt.

1. Aufnahme. Die Aufnahme der Querprofile setzt die vollständige Herstellung des Längenprofils, worauf sich jene beziehen, voraus. Damit ist bereits für jedes Querprofil die Bezeichnung und die Ordinate eines Punkts festgesetzt; denn man benennt das Querprofil am einfachsten nach dem Punkte des Längenprofils, in welchem es dasselbe senkrecht oder schief schneidet, und der Abstand dieses Punkts vom allgemeinen Horizont ist aus dem Längennivellement bekannt.

Durch das Längenprofil wird jedes Querprofil in zwei Theile getheilt, welche nach der Seite, auf welcher sie liegen, unterschieden werden. Um in jedem Falle beurtheilen zu können, welches die rechte oder linke Seite eines Längenprofils ist, denkt man sich in dieses so gestellt, dass das Auge von den niederen Nummern der Hauptpunkte nach den höheren sieht: rechts des Beobachters liegt alsdann auch die rechte und links die linke Seite nicht nur des Längenprofils, sondern auch der Querprofile.

Bei der Aufnahme der letzteren ist streng darauf zu sehen, dass diese beiden Seiten nicht mit einander verwechselt werden; denn jede solche Verwechselung würde eine völlige Entstellung des geometrischen Bilds des Terrains zwischen dem vorhergehenden und nachfolgenden Querprofile zur Folge haben. Man soll sich deshalb angewöhnen, die Skizze des Querprofils, welche man bei dessen Aufnahme in das Notizbuch zeichnet, so anzulegen, dass dem, der in dieses Buch sieht, sofort die linke Seite des Querprofils zur Linken und folglich die rechte zur Rechten liegt.

Die erste Arbeit zur Aufnahme eines Querprofils besteht in der Absteckung seiner Richtung. Da diese fast durchweg senkrecht zur Axe des Längenprofils steht, so bedient man sich dazu des Winkelspiegels oder des Prismenkreuzes. Ist durch besondere Umstände eine schiefe Richtung bedungen, so wird deren horizontaler Neigungswinkel gegen die Axe des Längenprofils mit den bekannten Hilfsmitteln bestimmt und seine Grösse in das Notizbuch eingetragen.

Hierauf folgt eine einfache Bezeichnung der Brechungspunkte durch

Markpflöcke. Grundpfähle sind hier so lange unnöthig, als der Boden die Nivellirlatte trägt; nur wenn dieser weich ist, wendet man Grundpfähle an. Will man auf die Markpflöcke Zeichen setzen, um die Punkte zu unterscheiden, so mag man es thun; nöthig sind sie aber aus dem Grunde nicht, weil sofort nach der Absteckung die Abscissen und Ordinaten aller Brechungspunkte des Querprofils gemessen und in das Notizbuch eingetragen werden, wie die Fig. 158 zeigt, bei welcher angenommen wurde, dass zwei Stationen hinreichen, das Querprofil aufzunehmen, und in der zugleich angedeutet ist, in welcher Weise Bemerkungen über die von dem Querprofile durchschnittenen Culturen, Bauwerke u. dgl. anzubringen sind.

Es bedarf wohl kaum weiterer Erörterung, wie zu verfahren ist, wenn zum Nivelliren mehr als zwei Aufstellungen des Instruments nöthig sind, sowie es sich von selbst versteht, dass in vielen Fällen eine einzige Station

Fig. 158.

hinreichen kann, die Höhenunterschiede aller Punkte eines Querprofils zu finden.

2. Berechnen und Auftragen. Kommt es bloss darauf an, das Querprofil zu zeichnen, ohne dass man den Abstand der Brechungspunkte desselben vom allgemeinen Horizont wissen will, so kann man entweder die Horizonte aller Aufstellungen des Instruments (hier die Linien A B, C D) als Abscissenaxen benützen und von ihnen aus die abgelesenen Höhen abtragen — in diesem Falle bedarf es gar keiner Berechnung —; oder man reducirt die Ablesungen für verschiedene Horizonte auf einen und denselben Horizont (hier z. B. auf A B, indem man zu den Ablesungen auf der rechten Seite des Profils den Abstand B C = 12,34 — 0,75 = 11',59 addirt) und trägt die Brechungspunkte von diesem aus ab; oder endlich, man denkt sich durch den Hauptpunkt (hier 5^b) des Querprofils eine Horizontale gelegt und führt alle Abstände auf diesen zurück, wobei es sich

von selbst versteht, dass diese Abstände bald positiv bald negativ werden. In dem vorliegenden Falle ergeben sich die Abstände, welche in der Fig. 159 eingetragen sind.

Will man auch für ein Querprofil die Abstände seiner Brechungspunkte vom allgemeinen Horizont wissen, so berechne man erst die Abstände für den Horizont des Hauptpunkts (hier 5^b) und verbinde dieselben mit dem Abstande des Hauptpunkts (hier 108',64) so, wie es ihre Vorzeichen verlangen. Demnach ist in dem gewählten Beispiele der Abstand des Punkts $a = 108',64 + 6',03 = 114',67$ und der von $d = 108',64 - 3',62 = 105',02$.

Was die Massstäbe betrifft, nach denen die Querprofile gezeichnet werden, so bestehen hier keine festen Regeln: es kommt lediglich auf den Zweck an, dem diese Profile zu dienen haben. Werden die Querprofile in ähnlicher Weise verwendet wie Längenprofile, so zeichnet man sie auch so; dienen sie aber zur Berechnung von Erdmassen, so wählt man gewöhnlich einen grossen Massstab (in der Regel 1 : 100), damit man die einzelnen Dimensionen leicht abgreifen kann, und es versteht sich in diesem Falle

Fig. 159.

von selbst, dass die Abscissen und Ordinaten nicht nach zwei verschiedenen Massstäben aufgetragen werden dürfen.

§. 142. **Von einer gegebenen Linie ein Präcisionsnivellement herzustellen und dessen Genauigkeit zu berechnen.**

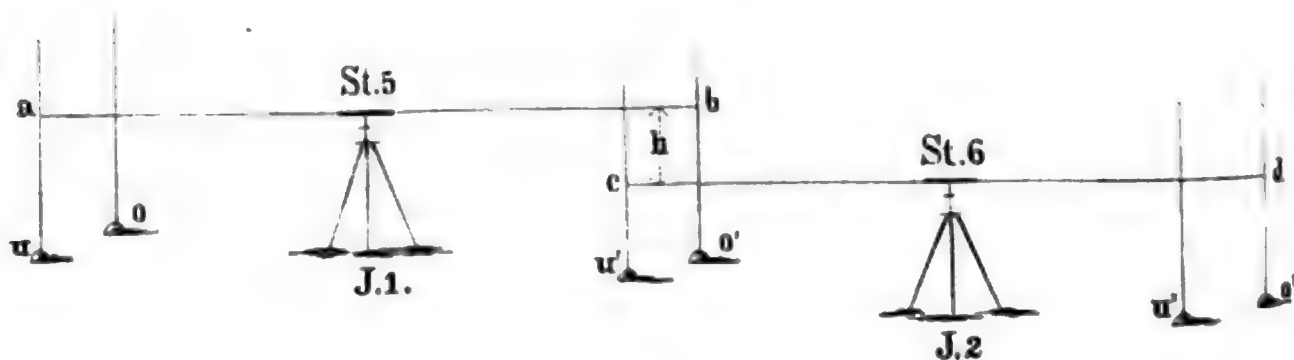
Da die Gestalt der Erdoberfläche nur unvollständig bekannt wäre, wenn man lediglich ihre Grösse und Krümmungsverhältnisse kennen würde, so gehört es zu den Aufgaben der Geodäsie, die Höhenunterschiede wichtiger Terrainpunkte unter sich und gegen die Spiegel der Meere mit grösster Genauigkeit zu bestimmen. Diese Genauigkeit kann nur durch geometrische Nivellemente erlangt werden, da sich bei diesen die Einflüsse der Erdkrümmung und Strahlenbrechung eliminiren lassen, was bei trigonometrischen Höhenmessungen nicht oder nur in geringem Grade der Fall ist. Solche geometrische Höhenmessungen nun, welche mit den feinsten Nivellirinstrumenten und nach den besten Beobachtungsmethoden im Interesse genauester Ermittelung der Erdgestalt ausgeführt werden, nennt man Präcisionsnivellemente, und es sind diese erst seit dem Jahre 1864 mit der „Europäischen Gradmessung" ins Leben getreten.

Die Präcisionsnivellemente werden von Meer zu Meer fast durchgängig auf Eisenbahnen und nur, wo Schienenwege fehlen, auf Landstrassen aus-

geführt. Die Methode des Nivellirens ist die in §. 137 beschriebene „aus der Mitte der Station". Alle Linien werden doppelt nivellirt und so oft als möglich unter sich zu Polygonen verbunden, um die Genauigkeit der Arbeit besser beurtheilen zu können. An wichtigen Punkten, namentlich auf den Eisenbahnstationen, werden leicht sichtbare metallene Höhenmarken angebracht, die später als Ausgangspunkte untergeordneter (technischer) Nivellemente zu dienen bestimmt sind. Was die Instrumente anbelangt, so erfordern dieselben keine neuen Constructionsprincipien, es kommt nur darauf an, dass die Fernrohre eine starke optische Kraft besitzen, was bei 40 bis 50mm Objectivöffnung und 30 bis 40maliger Vergrösserung der Fall ist, und dass die Libellen sehr empfindlich sind, d. i. auf 2 bis 3 Secunden Neigung mindestens 1 Millimeter Ausschlag geben. Sehr wünschenswerth ist es auch, dass das Fadenkreuz drei Horizontalfäden enthält, welche ein dreimaliges Ablesen der Höhen und damit auch eine Distanzmessung gestatten. Die Nivellirlatten, aufs genaueste bis auf Centimeter getheilt, werden mit Hilfe von Senkeln- und Dosenlibellen lothrecht gehalten und von dem nivellirenden Ingenieur unmittelbar abgelesen. Beim Gebrauche werden die Latten auf Fussplatten von cylindrischer Form gestellt. Jede Platte wiegt ein Kilogramm, besitzt unten drei Spitzen zur Befestigung im Boden, seitwärts ist ein umlegbarer Handgriff zum Tragen angebracht und auf der Oberfläche ruht ein halbkugelförmiger stählerner Knopf zum Aufsetzen der Latte, deren unteres Beschläg mit einer entsprechenden Höhlung versehen ist.[1]

Die Ausführung der Methode des Nivellirens aus der Mitte hat sich in verschiedenen Ländern verschiedenartig gestaltet. In Bayern liess der Verfasser folgendes Verfahren einhalten. Um sofort ein doppeltes Nivellement von einem einzigen Standpunkte aus zu erhalten, wurden die Standpunkte der Latten verdoppelt und unmittelbar hinter einander zwei Paare von Punkten einnivellirt. Die Fig. 160 gibt hiervon eine klare Anschauung. Für den Standpunkt (5) des ersten Instruments (J_1) steht die Latte zuerst in

Fig. 160.



[1] Die bayerischen Instrumente von Ertel und Sohn in München sind in des Verfassers Abhandlungen über »Das bayerische Präcisionsnivellement« (Heft I, 1870 und Heft II, 1872), die hessischen und preussischen in der Schrift von Dr. O. Börsch »Die Nivellirinstrumente von Breithaupt und Sohn in Cassel« (Cassel 1871), die sächsischen von Prof. Weisbach im 16. Bande des »Civilingenieurs« (Jahrgang 1870), die schweizerischen (und damit die württembergischen) von Kern in Aarau in der Abhandlung von Hirsch und Plantamour »Nivellement de précision de la Suisse« (Genf 1867 bis 1872) beschrieben.

u, dann in u', hierauf in o', dann in o, während die horizontale Visirebene (a b) dieselbe bleibt; für den Standpunkt (6) desselben Instruments oder auch eines zweiten (J_2) erfolgen die Ablesungen in der neuen Visirebene (c d) nach einander für die Punktpaare u', o' und o'', u'', und so wiederholt sich von Station zu Station das Ablesen von zwei Punktpaaren bis zum Schlusse der Arbeit.

Insofern sich an die Punkte u, o; u', o'; u'', o''... von verschiedener Höhenlage immer eine folgende Station anreiht, kann man diese Punkte „Anbindepunkte" und daher das von uns angewendete Verfahren ein „Nivellement mit doppelten Anbindepunkten" nennen. Durch dieses Verfahren erhält die Messung grosse Durchsichtigkeit und die operirenden Ingenieure sind in den Stand gesetzt, schon während der Aufnahme die Beobachtungsfehler annähernd zu bestimmen und sofort zu verbessern. Auch werden die beiden Nivellemente unter gleichen äusseren Bedingungen gemacht, was ihre Verbindung zu einem einzigen erleichtert.

Unser Nivellirverfahren zerlegt den Höhenunterschied H zwischen zwei Fixpunkten (Höhenmarken auf zwei benachbarten Eisenbahnstationen) in die Theile h_1, h_2, h_3 ... h_n, von denen der erste die Höhenlage der horizontalen Visirlinie über dem ersten Fixpunkt, der zweite den Höhenunterschied der Visirebene des ersten und zweiten Instrumentenstands, der dritte den Höhenunterschied der Visirebene des zweiten und dritten Stands u. s. w., endlich der Theil h_n die Höhenlage der Visirlinie des letzten Instrumentenstands über dem zweiten Fixpunkte gibt. Jeder der Theile h_1, h_2, h_3 ... h_n, deren algebraische Summe = H ist, wird doppelt und zwar, um Theilungs- und Schätzungsfehler möglichst auszugleichen, auf zwei verschiedenen Stellen der Ziellatte gemessen: desshalb liegt eben die eine Fussplatte (u) tiefer als die andere (o).[1]

Die Differenz der zwei Werthe eines Stücks h gibt den Fehler für den einzelnen Stand und die algebraische Summe aller dieser kleinen Differenzen den Schlussfehler der Strecke zwischen zwei Fixpunkten. Ueberschreitet dieser Fehler auf eine Standlänge (J_1 bis J_2) von a Meter die Grösse $\sqrt{a}$ Decimillimeter, so wiederholt man die betreffende Messung von h, und folgen mehrere solche Ueberschreitungen nach einander, so kann man sie als ein Zeichen ansehen, dass die Standweiten zu gross sind und verkleinert werden müssen.

Dem eben beschriebenen Verfahren haftet noch der Uebelstand an, dass, da zur Messung der Höhentheile h_1, h_2 ... die beiden Vorblicke eines früheren und die zwei Rückblicke eines unmittelbar darauf folgenden Stands gehören, die Fehler jener Vorblicke erst entdeckt werden können, wenn das eine Instrument, mit dem man arbeitet, bereits versetzt ist. Dieser Missstand kann aber, wie es bei dem bayerischen Präcisionsnivellement

[1] Insofern an den 3 Fäden des Fadenkreuzes abgelesen wird, kann man auch sagen, jeder Theil h_1; h_2 ... wird 6mal und an 6 verschiedenen Stellen der Latte bestimmt.

auch geschah, dadurch gehoben werden, dass man die Fussplatten u, o für die Latten so einrichtet, dass sich die eine (o) auf die andere (u) legen lässt, wodurch der Nullpunkt der Latte auf dem Stahlknopfe der oberen Platte stets um eine constante Grösse m (von etwa 3,5^cm^) über dem Nullpunkte der Latte auf dem Stahlknopfe der unteren Platte liegt. Hat man nun zwei Vor- oder zwei Rückblicke gemacht und ist die Differenz derselben = m, so braucht man die Messung nicht zu wiederholen, weicht aber diese Differenz wesentlich von dem Werthe m ab, so macht man neue Ablesungen an Stelle der alten und verbessert so den erkannten Fehler. Selbstverständlich muss das Auflegen und Abheben der oberen Platte vorsichtig geschehen und der Raum zwischen beiden Platten stets rein gehalten werden.

Bei den Beobachtungen bringt man die Luftblasen nie ganz zum Einspielen, sondern liest deren Stände an beiden Enden ab und berechnet daraus die Ablesung für den horizontalen Stand. So wird man nicht bloss vor Ablesefehlern an der Latte bewahrt, sondern gewinnt auch Zeit auf dem Felde, welche kostbarer ist als die im Arbeitszimmer. Die wirklichen Ablesungen können in lithographirte Papiere wie folgt eingetragen werden:

Linie A—B. Instrument Nr. I. 1873, April 20. Bilder deutlich.

Nummer des Stands und der Latte, Schlussfehler u. s. w.	Rückblicke.					
	Tiefere Fussplatte.			Höhere Fussplatte.		
	Libelle.		Latte.	Libelle.		Latte.
	Ocul.	Obj.		Ocul.	Obj.	
1	2	3	4	5	6	7
Stand Nr. 5	169	168	18145	164	174	17800
Latte Nr. III	164	173	15500	162	176	15155
Schlussfehler — 01	8		12860	24		12520
5285			46505			45475
5280			15502			15158

Zu diesem Schema ist Folgendes zu bemerken: Erstens enthält es nur eine Hälfte der Aufschreibung eines Stands (Nr. 5), indem die zweite Hälfte für die „Vorblicke“ der hier dargestellten für die „Rückblicke“ gegenübersteht und formell nur darin verschieden ist, dass die Spalten nicht wie hier, sondern so auf einander folgen: 5, 6, 7; 2, 3, 4; 1. Zweitens sind die Ablesungen an den Enden der Luftblase (Ocularende, Objectivende) in Zehnteln eines Scalentheils, d. i. in Zehntel-Pariser-Linien eingetragen (169 Z. = 16''',9 P.) und es sind die oberen (in der 1. Zeile stehenden) vor den drei Fadenablesungen auf der Latte und die unteren (in der 2. Zeile stehenden) nach diesen Ablesungen gemacht. Letztere sind in Zehntel-Millimetern aus-

gedrückt (18145 Z. MM = $1^m,8145$). Drittens geben die Ablesungen nach den beiden äusseren Fäden (18145 — 12860 = 5285 und 17800 — 12520 = 5280) die Entfernung der Latte vom Instrumente, welche zur Reduction der Beobachtungen nothwendig ist: wenn die Differenzen, welche in Spalte 1 vorgetragen werden (hier 5285 und 5280) nur wenig von einander abweichen, so liegt auch hierin eine Controle der Beobachtung. Viertens gibt es auch bei Libellenablesungen eine Controle: wenn man nämlich von den für einen Blick (hier Rückblick) erhaltenen vier Zahlen die beiden kleineren von den grösseren über's Kreuz abzieht und zwei gleiche oder nahezu gleiche Differenzen erhält, so sind diese Ablesungen richtig; die Summe dieser Differenzen (hier 8 und 24) kann man in die Spalte der kleineren Zahlen (hier 2 und 5) eintragen und zu diesen Zahlen addiren, es müssen dann die Summen beider Libellenspalten einander gleich sein (hier 169 + 164 + 8 = 168 + 173). Fünftens geben die Differenzen der Lattenablesungen auf der höheren und tieferen Fussplatte stets deren Dicke sehr nahe an (hier 18145 — 17800 = 345 Z. MM = $3,45^{cm}$, 15502 — 15158 = 344 Z. MM = $3,44^{cm}$).

Die Berechnung des Nivellements aus den Beobachtungsdaten muss stets doppelt geschehen, um Irrungen vorzubeugen. Die auszuführenden und hier nicht weiter zu beschreibenden einfachen Rechnungsoperationen können folgendermassen controlirt werden: Das Mittel d der drei Fadenablesungen a, b, c eines Rück- oder Vorblicks wird schon vor dem Eintragen in die Rechenliste auf dem Felde aus $\frac{1}{3}(a + b + c)$ doppelt gerechnet, im Bureau kann man aber auch noch die Differenzen a — b und b — c bilden und hieraus $d = b + \frac{1}{3}(a - b) - \frac{1}{3}(b - c)$ und den Lattenabschnitt der beiden äusseren Fäden $a - c = (a - b) + (b - c)$ bestimmen.

Bezeichnen R und r die wegen der Neigung der Libellenaxe schon verbesserten mittleren Lattenablesungen der Rückblicke, V und v die der Vorblicke, und stellen R und V die Ablesungen über den tieferen, r und v jene über den höheren Fussplatten vor, so müssen für alle Ablesungen zwischen zwei auf einander folgenden Fixpunkten die Gleichungen

$$H = \Sigma V - \Sigma R = \Sigma v - \Sigma r \qquad (304)$$

erfüllt werden und folglich auch diese:

$$\Sigma V + \Sigma r = \Sigma R + \Sigma v. \qquad (305)$$

Die eine Controle (304) kann man in der ersten, die andere (305) in der zweiten Rechenliste ausführen.

Gehören allgemein zu den Blicken R, r, v, V eines Stands die Ausschläge $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so sind in der ersten Rechenliste die Grössen $\gamma - \beta$ und $\delta - \alpha$, in der zweiten die Unterschiede $\alpha - \beta$ und $\gamma - \delta$ zu bilden. Der Controle wegen kann man aus der ersten Liste auch die Differenz $(\gamma - \beta) - (\delta - \alpha)$ und aus der zweiten die Summe $(\gamma - \delta) + (\alpha - \beta)$ herstellen lassen und zusehen, ob beide einander gleich sind.

Unterscheidet man die Ablesungen R, r, V, v durch die Marken (,) und (,,) als solche, welche einem vorhergehenden und dem unmittelbar

darauf folgenden Instrumentenstande angehören, so ist der Unterschied h der Visirhöhen zweier sich folgenden Stände

$$h = V_{,} - R_{,,} = v_{,} - r_{,,} \tag{306}$$

und es ergibt sich hieraus die Gleichung

$$V_{,} + r_{,,} = R_{,,} + v_{,}. \tag{307}$$

Genügen die Vor- und Rückblicke der vorletzten Gleichung nicht, ergeben dieselben vielmehr die besonderen Werthe

$$h' = v_{,} - r_{,,} \text{ und } h'' = V_{,} - R_{,,} \tag{308}$$

so wird der Standfehler $\varepsilon = h' - h''$ entweder aus der Gleichung $\varepsilon = (v_{,} - V_{,}) + (R_{,,} - r_{,,})$ oder aus der $\varepsilon = (v_{,} + R_{,,}) - (V_{,} + r_{,,})$ berechnet.

Aus den nach (308) gefundenen Werthen von h' und h'' ergibt sich $\frac{1}{2}(h' + h'')$ als der wahrscheinlichste Werth von h, und folglich aus den Gleichungen

$$h' - h = \tfrac{1}{2}(h' - h'') = + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$
$$h'' - h = \tfrac{1}{2}(h'' - h') = - \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels beider Messungen $= \pm \frac{1}{2}\varepsilon$, während der Fehler einer einzigen Beobachtung nach den Formeln (5) und (9), Seite 11 und 12 dieses Bands, $= \pm \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2} = \pm \varepsilon : \sqrt{2}$ ist.

Bei nur zwei Messungen ist der Fehler des arithmetischen Mittels jedenfalls sehr unsicher bestimmt, wenn aber viele Lattenabschnitte $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$ mit den mittleren Beobachtungsfehlern $\frac{1}{2}\varepsilon_1, \frac{1}{2}\varepsilon_2, \frac{1}{2}\varepsilon_3 \ldots \frac{1}{2}\varepsilon_n$ zu einer Summe H, dem Höhenunterschiede zwischen zwei Fixpunkten vereinigt werden, so wird der mittlere Fehler m dieser Summe um so genauer erhalten, je grösser die Zahl der zu H gehörigen Stücke ist und es wird

$$m = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_n^2} \tag{309}$$

wenn die Messungen nicht mehr mit constanten, sondern nur noch mit zufälligen Beobachtungsfehlern behaftet sind. Sind alle ε einander gleich, so wird der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen $= n\,\varepsilon^2$ und daher in diesem Falle

$$m = \pm \tfrac{1}{2}\varepsilon\sqrt{n}\,. \tag{310}$$

Nennt man die Entfernung zwischen zwei Fixpunkten A und die durchschnittliche Länge einer der n Stationen zwischen diesen Fixpunkten a, so ist offenbar $n\,a = A$ und daher, wenn hieraus der Werth von n in die letzte Gleichung gesetzt wird:

$$m = \pm \tfrac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\frac{A}{a}}\,. \tag{311}$$

Erwägt man ferner, dass der mittlere Fehler $\frac{1}{2}\varepsilon$ einer Lattenablesung der Zielweite a proportional und $= k\,a$ ist, wobei k die Tangente des Neigungswinke's der Visirlinie gegen den Horizont vorstellt, so kann man diesen Werth von $\frac{1}{2}\varepsilon$ in (311) setzen und erhält dann

$$m = \pm k\sqrt{A\,a}\,. \tag{312}$$

Hieraus lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Für ein und dasselbe Instrument (d. i. für einen constanten Werth von k) und bei gleichbleibender Zielweite (a) wächst der mittlere Fehler des Nivellements mit der Quadratwurzel der Länge der nivellirten Strecke.

2) Für ein und dasselbe Instrument und dieselbe Länge der nivellirten Strecke wächst der mittlere Fehler des Nivellements mit der Quadratwurzel der Zielweite.

3) Je kleiner man die Zielweite macht, desto mehr Stationen sind nöthig und desto mehr Arbeit erfordert folglich das Nivellement: man wird daher mit Rücksicht auf den zweiten Satz die Zielweite weder sehr gross noch sehr klein annehmen, wenn auch der Boden hierin keine Grenzen setzen würde. (Auf Eisenbahnen kann man Zielweiten von 50 bis 100^m, auf Thalstrassen von 20 bis 50^m, auf Gebirgsstrassen von 10 bis 20^m anwenden.)

Die Genauigkeit der Präcisionsnivellemente wird in der Regel durch den mittleren Fehler, welcher einer Strecke von 1 Kilometer Länge zukommt, ausgedrückt. Nennt man diesen Fehler m', so ist derselbe nach Gl. (312) $= \pm k \sqrt{1000 \, . \, a}$, während der Fehler m auf die Strecke von A Meter oder D Kilometer $= \pm k \sqrt{1000 \, D \, . \, a}$ ist; dividirt man beide Ausdrücke für m' und m durch einander, so wird

$$m' = \pm \frac{m}{\sqrt{D}} \cdot \qquad (313)$$

Wenn demnach ein Nivellement von 9 Kilometer Länge mit einer Differenz von 1 Centimeter abschliessen würde, so betrüge der mittlere Fehler pro Kilometer $\pm \frac{1}{3} \, . \, 10 = \pm 3{,}33$ Millimeter. Man hat sich hier die Länge von 9 Kilometer entweder als den Umfang eines Polygons zu denken, dessen Endpunkt um 1 Centimeter höher oder tiefer als der Anfangspunkt gefunden wurde, oder auch als die doppelte Länge einer einfachen Linie, welche hin und zurück nivellirt für den Anfangspunkt einen Höhenunterschied von 1 Centimeter ergab.

Bei technischen Nivellementen beträgt der Fehler m' pro Kilometer 10 bis 20 Millimeter, bei den für die europäische Gradmessung ausgeführten Präcisionsnivellementen überschreitet er dagegen selten 5^{mm}, häufig beträgt er weniger als 1^{mm}. So ist er z. B. auf einem grossen von Bayern und Württemberg gemeinsam nivellirten Polygon Nördlingen-Augsburg-Kempten-Lindau-Friedrichshafen-Ulm-Aalen-Nördlingen, welches 495 Kilometer lang ist, wovon 270 auf Bayern und 225 auf Württemberg treffen, gerade 5^{mm}, indem der Anschlussfehler $m = 0^m{,}1117 = 111{,}7^{mm}$ beträgt. Schneidet man hieraus das kleinere bayerische Polygon Kempten-Augsburg-Ulm-Kempten von 266 Kilometer Länge und nur $9{,}8^{mm}$ Anschlussfehler heraus, so berechnet sich der mittlere Fehler pro Kilometer auf $\pm 0{,}6^{mm}$. Dagegen folgt der mittlere Fehler aus der Schleife um das Fichtelgebirge, welche 241 Kilometer lang ist und mit $0^m{,}108$ schliesst, allerdings zu 7^{mm}; es rührt aber dieser immerhin noch sehr geringe Fehler wesentlich von der Strecke

her, welche von sächsischen Ingenieuren mit schwachen Instrumenten nach einer weniger strengen Methode nivellirt wurde.[1]

3. Das Nivelliren der Flächen.

§. 143. Eine Fläche ist nivellirt, sobald man die Höhen aller bemerkenswerthen Punkte derselben bestimmt und in den Horizontalplan eingetragen hat. Damit liefert aber dieser Plan noch kein Bild von dem Zusammenhange der Erhöhungen und Vertiefungen oder von der Form des Terrains; denn aus den eingeschriebenen Ordinaten der einnivellirten Punkte lässt sich die Gestalt einer vielfach gekrümmten Fläche eben so wenig genau erkennen, als es möglich ist, sich aus den bloss in Zahlen ausgedrückten horizontalen Entfernungen eingemessener Punkte den Grundriss der von ihnen gebildeten Figuren in allen Theilen richtig vorzustellen. Man bedarf also eines graphischen Mittels, das die Höhen der Terrainpunkte eben so anschaulich darstellt als ein Situationsplan die horizontal projicirten Umfangslinien der Parzellen. Dieses Mittel ist aber in den Horizontalcurven gegeben.

Denkt man sich nämlich die nach ihren Erhöhungen und Vertiefungen darzustellende Terrainfläche durch horizontale Ebenen geschnitten, welche gleich weit von einander abstehen, und die Durchschnittslinien auf den Horizontalplan der Fläche projicirt, so übersieht man mit diesen Linien sofort alle Punkte von gleicher Höhenlage und erkennt aus ihren Zwischenräumen die Neigungsverhältnisse des Terrains, dem sie angehören. Diese horizontalen Schnittlinien (Horizontalcurven, Niveaucurven, Schichtenlinien, Höhencurven etc.) sind für alle Arten von Terrainstudien, namentlich aber für diejenigen, welche zum Zwecke technischer Unternehmungen gemacht werden, sehr wichtig, wesshalb sie auch, wie hier geschieht, ausführlich behandelt zu werden verdienen. Für manchen Leser mögen überdiess die folgenden geschichtlichen Notizen über ihre Erfindung nicht ohne Interesse sein.

Die Idee, horizontale Curven zur bildlichen Darstellung der Oberflächen des Terrains anzuwenden, rührt, soviel darüber bis jetzt bekannt geworden ist, von dem französischen Geographen Buache her. Derselbe legte im Jahre 1737 der Academie der Wissenschaften in Paris, deren Mitglied er war, eine von ihm fünf Jahre früher aufgenommene Karte des Departements La Manche vor, in welcher er die gleichen Tiefen des Meeres, also auch die Gestalt der Meeresküste durch solche Curven bezeichnete. In seiner dazu geschriebenen Abhandlung, welche erst in den Denkschriften vom Jahre 1752 (essais de géographie physique) gedruckt wurde, äusserte er: „Der Gebrauch, den ich von den Sondirungen des Meeres gemacht habe, um seine Tiefen auszudrücken, und den vor mir Niemand gemacht hat,

[1] Hr. Prof. Jordan in Carlsruhe hätte es daher um so mehr unterlassen sollen, gerade dieser Strecke in seinem Taschenbuche S. 166 zu erwähnen, als er selbst, so viel wir wissen, noch kein Präcisionsnivellement geleitet oder ausgeführt hat.

scheint sehr geeignet zu sein, die Neigungsverhältnisse der Ufer genau darzustellen . . . .“ In einer späteren Arbeit (parallèle des fleuves de quatre parties du monde) vervollständigte er seine Idee mit den Worten: „Ich habe mir vorgenommen, auf dem Terrainrelief des Globus (den er damals anfertigte), Linien zu ziehen, welche der Oberfläche des Meeres parallel laufen (also horizontal sind), wie ich es für das Innere des Meeres schon bei dem Relief der Manche gethan habe. Indem man Erhebungen des Meeres über sein wirkliches Niveau voraussetzt, lassen sich die Landstriche erkennen, welche durch die allmählige Zunahme der Wassermasse bedeckt würden . . .“

Buache hat seine Idee nicht weiter verfolgt, und darum gilt der Ingenieur Ducaila in Genf als der Erste, welcher die Darstellung des Terrains durch Horizontalcurven zu einer Methode erhob und ins Leben einführte. Er that dieses in einer besonderen Abhandlung hierüber, die er unter dem 4. Mai 1771 der Academie der Wissenschaften in Paris überreichte, und in einem grösseren Werke, das 11 Jahre später erschien und den Titel führt: „Expression des nivellements ou methode nouvelle pour marquer rigoureusement, sur les cartes terrestres et marines, les hauteurs et les configurations du terrain; par M. Ducaila.“ Paris, 1782. Ducaila erkennt hierin ausdrücklich an, dass er die von Buache gegebenen Andeutungen kannte, glaubt aber, dass dieser gelehrte Geograph die Fruchtbarkeit seiner Idee nicht vollständig zu würdigen wusste, da er bei drei Unterredungen mit ihm im Jahre 1771 die Priorität derselben nicht in Anspruch nahm. „Seine bedeutenden Arbeiten, fügt Ducaila bei, sein Alter, seine Gebrechlichkeit hatten ihn ganz ausser Stand gesetzt, meinen Erörterungen lange zu folgen, und er sagte mir mehrere Male und noch bei meiner Abreise, dass er Nichts davon begreife, obgleich seine Herren Collegen mit seiner Arbeit zufrieden gewesen seien.“ [1]

Es kann nun sehr wohl sein, dass dieser alte Mann sich nicht mehr genau der Arbeiten erinnerte, welche er vor 40 Jahren gemacht hatte, und dass er auch den Umfang ihrer technischen Anwendung nicht ganz ermessen konnte; gleichwohl gebührt ihm das Verdienst der Erfindung der Horizontalcurven, während Ducaila als Derjenige anzusehen ist, der diesem vorzüglichen Mittel der Terrainzeichnung Geltung zu verschaffen wusste.

A. Das Abstecken der Horizontalcurven.

§. 144. **Aufgabe. Auf dem Felde ist ein Punkt gegeben: man soll die demselben angehörende Horizontalcurve abstecken.**

Der gegebene Punkt befinde sich auf der Oberfläche eines Hügels und sei durch einen Grundpfahl bezeichnet. Ueber demselben stelle man die Nivellirlatte und in passender Entfernung das Nivellirinstrument auf.

Hierauf richte man das Fadenkreuz auf die Latte und lese die Visir-

[1] Vergleiche Zach's »monatliche Correspondenz,« Bd. 2, S. 148 u. ff.

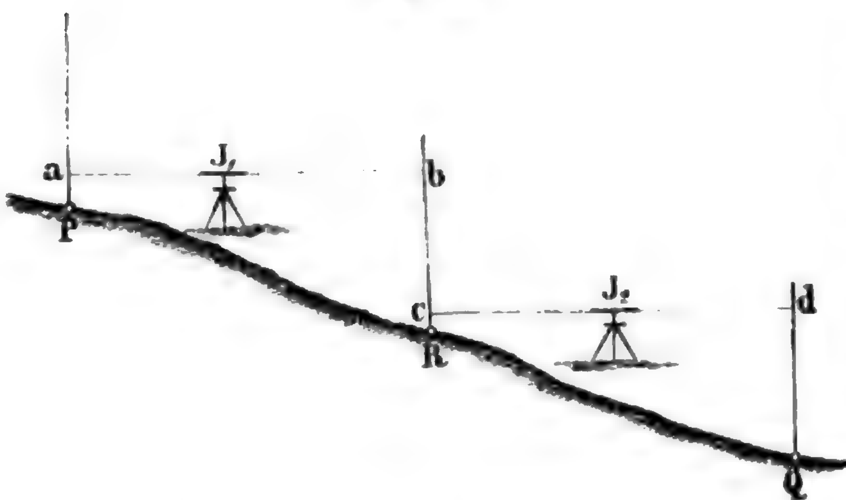
höhe ab. Nun lasse man die Latte in einem zweiten, etwa 30 Meter vom ersten entfernten und dem Augenmasse nach gleich hoch gelegenen Punkte aufstellen, richte das Fernrohr wieder darauf ein und lese ab. Ist diese Ablesung der vorigen gleich, so liegt der zweite Punkt gerade so hoch als der erste; ist sie aber kleiner oder grösser, so muss die Latte auf dem Terrain so lange ab- oder aufwärts verrückt werden, bis die Ablesungen gleich werden. Der also gefundene Terrainpunkt wird mit einem Grundpfahle bezeichnet, dessen Oberfläche genau in der Horizontalebene des gegebenen Punkts liegen muss. Kann man vom Instrumente aus noch den Theil des Hügels übersehen, auf den der dritte Punkt trifft, so bestimme man denselben gerade so wie den zweiten und bezeichne ihn auch wie diesen. Muss hierauf die Station gewechselt werden, so lasse man die Latte auf dem Punkte Nr. 3 stehen, wähle einen neuen Standpunkt und verfahre nun gerade so, als ob dieser Punkt der Anfangspunkt wäre.

§. 145. Aufgabe. Ein Punkt eines Längenprofils ist auf dem Felde und durch seine Cote gegeben: man soll, von ihm ausgehend, eine Horizontalcurve von bestimmter Höhe abstecken.

Heisst der Abstand des gegebenen Fixpunkts (P) vom allgemeinen Horizont z und jener der Curve $z + \eta$, so kommt es zunächst bloss darauf an, irgend einen Punkt (Q) aufzusuchen, der um die Grösse η tiefer liegt als der Fixpunkt; denn ist dieser Punkt gefunden, so erfolgt die weitere Absteckung der Curve nach der im vorhergehenden Paragraph gegebenen Anleitung.

Ist η kleiner als die Lattenhöhe, so kann man Q mit einer einzigen Aufstellung des Instruments finden, ausserdem müssen zwei oder mehrere Stationen gemacht werden; in jedem Falle aber ist es leicht, einen Punkt anzugeben, der den Abstand $z + \eta$ hat. Denn angenommen, bei der ersten Aufstellung des Instruments werde auf dem Fixpunkte der Lattenabschnitt $Pa = l$ (Fig. 161) und auf dem Zwischenpunkte R der Abschnitt $Rb = l'$ abgelesen, so liegt R um $l' - l$ tiefer als P. Ist nun $\eta = l' - l + \xi$ und ist ξ kleiner als die Lattenhöhe, so stelle man das Instrument in J_2 so auf, dass die Latte in R möglichst nahe am Fusse von der Absehlinie getroffen wird, stelle das Fernrohr und die Libelle ein und lese ab. Heisst die Ablesung h, so muss nunmehr durch Probiren die Latte auf einen Punkt

Fig. 161.



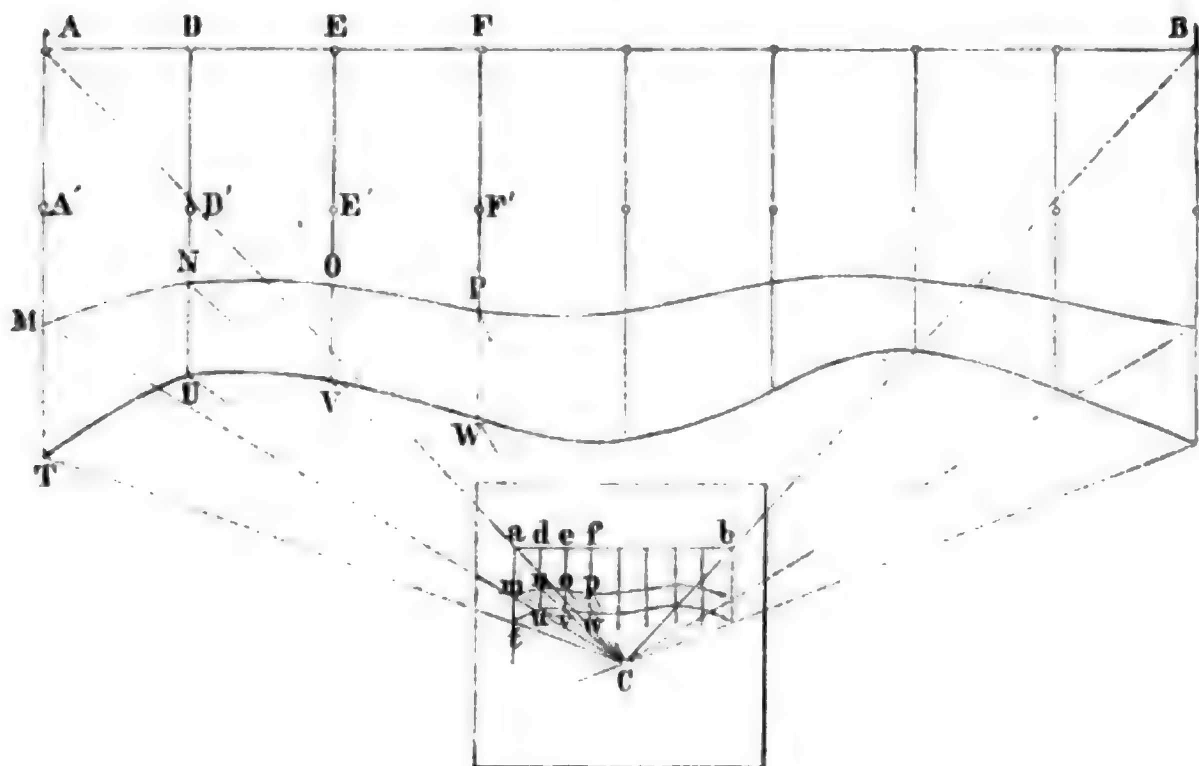
gebracht werden, welcher eine Ablesung $h' = h + \xi$ liefert. Dieser Punkt (Q) wird mit einem Grundpfahle bezeichnet, und nachdem der Höhenunterschied zwischen ihm und dem Fixpunkte durch ein zweites Nivellement controlirt ist, kann die ihm angehörige Curve nach §. 144 abgesteckt werden.

Wäre der Abstand der gesuchten Horizontalcurve $z - \eta$ gewesen, so hätte man zunächst einen um die Grösse η über P gelegenen Punkt (S) bestimmt und hierauf auch wieder das Verfahren des vorigen Paragraphen angewendet, um die Curve selbst zu erhalten.

B. Das Aufnehmen der Horizontalcurven.

§. 146. Bei der Aufnahme von Horizontalcurven lassen sich zwei Fälle unterscheiden: entweder sind nämlich wirklich abgesteckte Horizontallinien in verjüngtem Masse graphisch darzustellen, oder es sind auf einer gegebenen Terrainfläche bloss die Messungen zu machen, nach denen die Horizontalschnitte dieser Fläche construirt werden können. Der erste Fall kommt selten und in der Regel nur dann vor, wenn es sich bloss um eine oder einige Curven handelt, und wenn mit der Aufnahme dieser Curven auch die der Horizontalprojection des Terrains, worauf sie liegen, verbunden wird. Der zweite Fall dagegen ist derjenige, welcher das eigentliche Nivelliren der Flächen ausmacht und uns daher insbesondere beschäftigt.

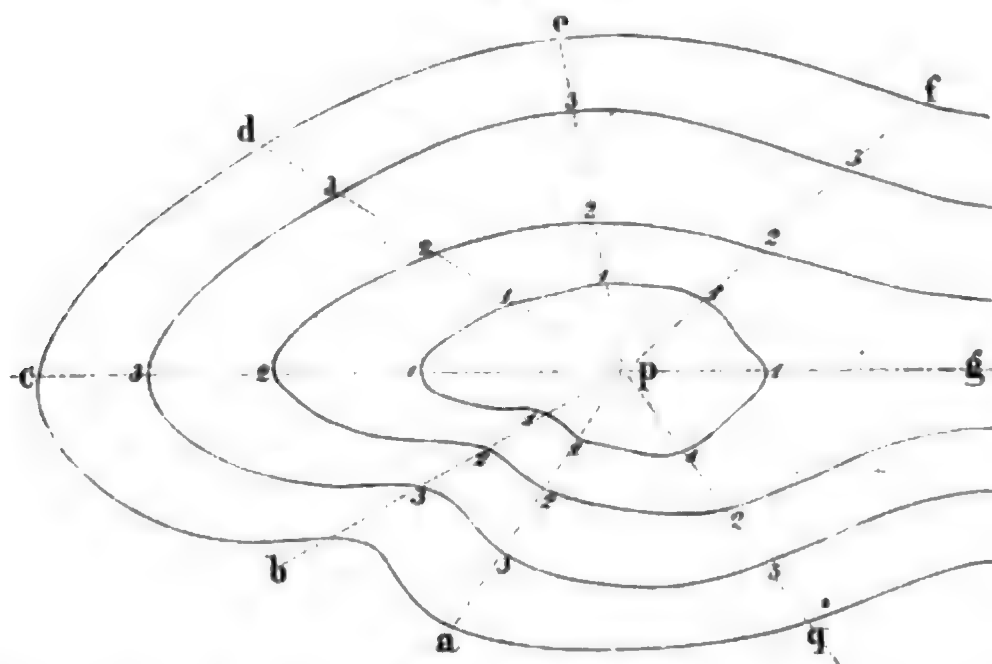
Fig. 162.



Die Methoden, nach denen Situationspläne oder Horizontalprojectionen aufgenommen werden, sind aus dem zweiten Abschnitte der Lehre von den Messungen bekannt; es genügt desshalb für den ersten Fall die Bemerkung,

dass es die Aufnahme wirklich abgesteckter Horizontalcurven sehr erleichtert, wenn man bei der Absteckung Querprofile anwendet, welche auf einer geraden Axe senkrecht stehen und gleichweit von einander entfernt sind, wie dieses in Fig. 162 angedeutet ist. In derselben stellt die Linie AB eine Gerade vor, welche nahezu horizontal ist und auf der die gleichen Abschnitte AD, DE, EF.... von 20 oder 30 Meter Länge abgemessen sind. Die Linien AA′, DD′, EE′, FF′.... stehen senkrecht zu AB, und es sind dieselben auf dem Felde durch Absteckstäbe sichtbar gemacht, damit der Messgehilfe nach Anleitung des Geometers die Nivellirlatte in den Richtungen dieser Linien so weit versetzen kann, bis er die Curvenpunkte M, N, O, P...., T, U, V, W.... gefunden hat. Sollen nun diese Punkte z. B. mit dem Messtische aufgenommen werden, so bestimme man auf dem Felde von den beiden Punkten A und B aus durch Vor-

Fig. 163.



wärtsabschneiden den Punkt C, von dem aus sich die beiden Curven übersehen lassen, trage auf dem Bilde von AB = ab die Abstände AD = ad, DE = de, EF = ef.... ab, errichte in diesen Punkten die Senkrechten am, dn, eo, fp...., stelle den Messtisch über C auf, orientire ihn nach A und B, und visire nach und nach die abgesteckten Punkte der beiden Curven an, so ergeben sich deren Bilder m, n, o, p...., t, u, v, w.... als Durchschnitte der Absehlinien mit den Senkrechten, welche auf ab errichtet wurden. Die Vielecke mnop...., tuvw... werden in der Zeichnung nach dem Augenmasse so verbessert, dass sie die nur in einzelnen Punkten abgesteckten Curven möglichst treu darstellen.

Was den zweiten Fall betrifft, so kommt es im Allgemeinen darauf an, über die zu nivellirende Fläche ein Netz von Linien zu verbreiten, welches alle bemerkenswerthen Terrainpunkte deckt, und dieses Netz aufzunehmen und zu nivelliren. Die Form des Netzes richtet sich, wie aus

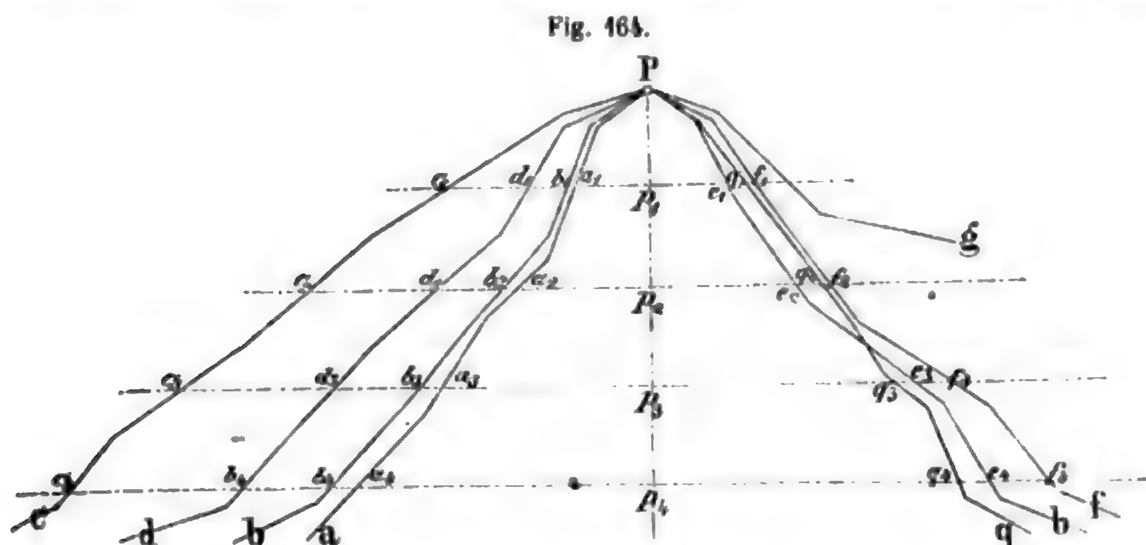
den nachfolgenden Aufgaben zu entnehmen ist, nach der Gestalt des Terrains und der Genauigkeit, welche von der Zeichnung verlangt wird.

§. 147. Aufgabe. Es sei ein Hügel, dessen Situationsplan gegeben ist, durch Horizontalcurven darzustellen. (Fig. 163 und 164.)

In diesem Falle ist es zweckmässig, den Hügel von seinem Scheitel aus nach verschiedenen Richtungen zu nivelliren, die hierdurch erhaltenen Profile durch gleichweit abstehende Horizontalebenen zu schneiden, die Schnittpunkte auf die in den Horizontalplan eingetragenen Richtungen der Profile zu projiciren, die einer Horizontalebene angehörenden Projectionen zu Polygonen zu verbinden und diese in die gesuchten Curven selbst überzuführen. Dieses Verfahren zieht folgende Arbeiten nach sich.

1) Das Abstecken der Richtungen der Profile. Man wählt diese so, dass sie sowohl die stärksten als die schwächsten Neigungen der Hügelfläche treffen; denn in diesen Richtungen ist die Natur des Terrains

Fig. 164.



am schärfsten ausgesprochen. Darin liegt auch zugleich ein Anhaltspunkt für die Anzahl der Profile; ein anderer hängt von der verlangten Genauigkeit der Terrainzeichnung ab. Der Scheitel (P) des Hügels und alle Brechungspunkte der Profile werden wie bei einem Längennivellement mit Grund- und Beipfählen bezeichnet, während auf dem äussersten, von dem Scheitel aus noch sichtbaren Punkte jedes Profils eine Signalstange mit einer Bezeichnung des Profils (nach der Fig. 163 mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G) aufgestellt ist.

2) Das Aufnehmen der Profile. Dazu gehört erstens die Messung der Richtungswinkel der Linien P A, P B .... P G in Bezug auf eine feste gerade Linie (hier P Q), welche sowohl auf dem Terrain als in dessen Horizontalplan gegeben sein muss; zweitens das Abmessen der horizontalen Entfernungen der Brechungspunkte der Profile vom Scheitel (P) aus; und endlich drittens das Einnivelliren aller dieser Punkte, welches ebenfalls von dem Grundpfahle des Scheitels auszugehen hat. Die Art der Ausführung dieser Arbeiten ist bekannt.

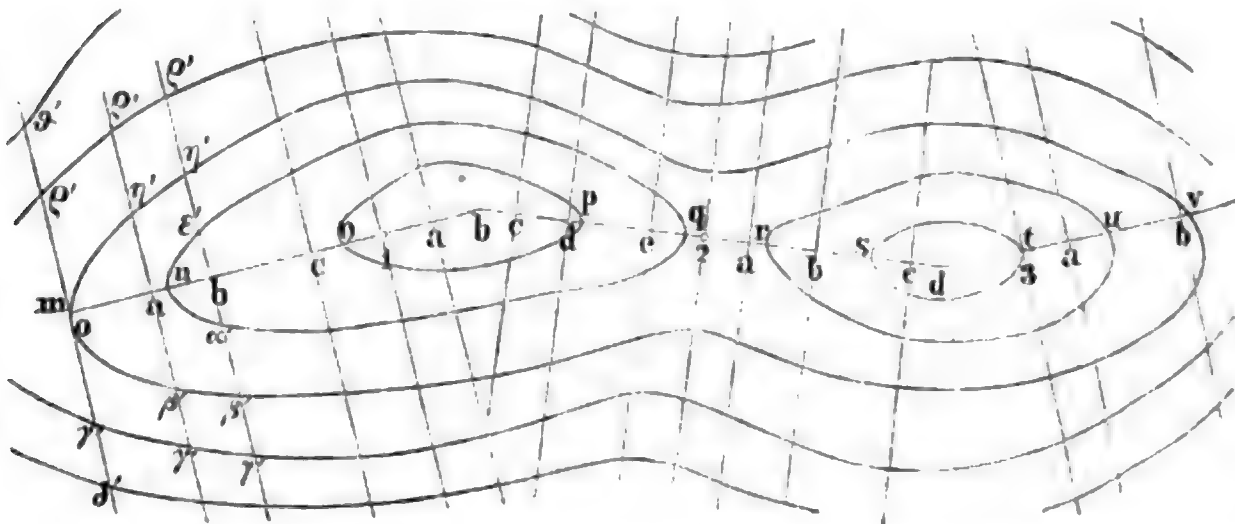
3) Das Zeichnen der Profile und der Curven. Streng genommen gehört die Anweisung zu dieser Verrichtung in die Lehre vom Plan- und Kartenzeichnen; da jedoch das Aufnehmen der Horizontalcurven in mehrfacher Hinsicht erst durch die Zeichnung derselben recht klar wird, so mag es in diesem Falle erlaubt sein, der genannten Abtheilung vorzugreifen.

Die Profile des Terrains zeichnet man so, dass die Abscissen in dem Massstabe des Horizontalplans, die Ordinaten aber 5 oder 10mal grösser dargestellt werden. Man kann diese Profile einzeln, oder, wie hier in Fig. 164 geschehen ist, vereinigt darstellen, so zwar, dass sie alle den Scheitelpunkt (p) gemein haben. Die Profile P A, P B, P C .... sind hier durch p a, p b, p c .... und die horizontalen Schnittebenen, deren Abstände von p an gezählt sind und 10, 20, 30, 40 .... Fuss betragen, durch 1, 2, 3, 4 .... bezeichnet. Die Curve (1) ergibt sich, indem man auf den Profilrichtungen p a, p b, p c .... (Fig. 163) die Horizontalabstände $p_1\,a_1$, $p_1\,b_1$, $p_1\,c_1$,.... der Schnittpunkte a_1, b_1, c_1, ... vom Scheitel p aus abträgt. Eben so erhält man die Curve (2), indem man auf p a, p b, p c .... (Fig. 163) die Abstände $p_2\,a_2$, $p_2\,b_2$, $p_2\,c_2$ .... (Fig. 164) abmisst u. s. w. f.

Sind die Schnittpunkte aller Profile mit den Horizontalebenen in den Plan eingetragen, so kann man allerdings zunächst nur die horizontalen Polygone zeichnen, welche durch diese Punkte bestimmt sind; allein aus der unmittelbaren Anschauung des Terrains, welche der Zeichnung voranging, oder vor deren Vollendung nochmals stattfindet, kann man diese Polygone nach dem Augenmasse in stetige, dem Terrain sich anschmiegende Curven verwandeln.

§. 148. Aufgabe. Es sei ein Bergrücken, dessen Situationsplan gegeben ist, durch Horizontalcurven darzustellen.

Fig. 165.

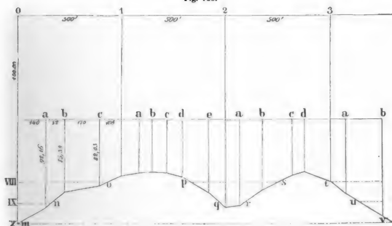


Das Verfahren, welches in diesem Falle am zweckmässigsten erscheint, besteht darin, dass man erstens nach der Länge des Rückens eine Operationslinie aussteckt und nivellirt, zweitens Querprofile aufnimmt, welche sich

über die ganze Breite des Bergrückens erstrecken; und drittens aus diesen Längen- und Querprofilen die Horizontalcurven construirt.

1) Die Operationslinie wird zwischen zwei in dem Plane genau bezeichneten Fixpunkten ausgesteckt. In ihrer Horizontalprojection bildet sie ein offenes Polygon mit langen Seiten, welche sich so viel als möglich der Wasserscheide des Bergrückens nähern. Die Eckpunkte werden durch Signalstangen bezeichnet und die Winkel mit dem Theodolithen, die Seiten mit Messlatten gemessen. Hiernach lässt sich die Horizontalprojection derselben in den Situationsplan der aufzunehmenden Terrainfläche eintragen: in Fig. 165 stellt 0 1 2 3 die Operationslinie vor. Ausserdem wird die ausgesteckte Operationslinie wie die Axe eines Längenprofils abgepflockt und zweimal vermessen und nivellirt. Nach der Berechnung des Nivellements erfolgt das Auftragen nach §. 140, wobei es sich von selbst versteht, dass die horizontalen Entfernungen im Massstabe des Situationsplans und die Ordinaten etwa 5 oder 10mal grösser zu zeichnen sind. In Fig. 166, welche

Fig. 166.



das Längenprofil der Operationslinie ist, sind die Höhen 10mal grösser als die Längen.

2) Die Querprofile stehen in der Regel senkrecht zur Operationslinie, weil sie sich bei dieser Richtung am leichtesten auf dem Terrain ausstecken und in den Horizontalplan eintragen lassen. Fordert aber die Natur des Terrains schiefe Richtungen, so wählt man diese und misst ihre Neigungswinkel gegen die Operationslinie, um sie ebenfalls in dem Horizontalplane genau angeben zu können. Das Abstecken, Aufnehmen, Berechnen und Zeichnen der Querprofile geschieht nach §. 141, wozu nur noch zu bemerken ist, dass dem vorliegenden Zwecke eine mit dem Längenprofil übereinstimmende und in den Figuren 167, 168, 169 angedeutete Zeichnung am besten entspricht.

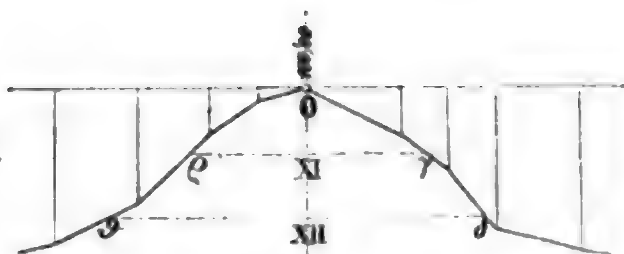


Fig. 167.

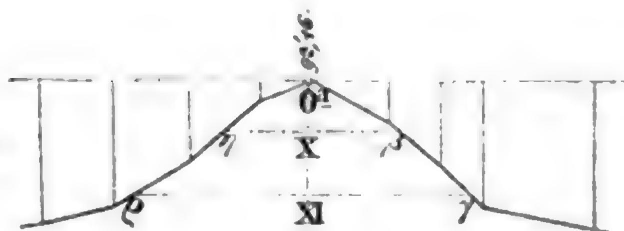


Fig. 168.

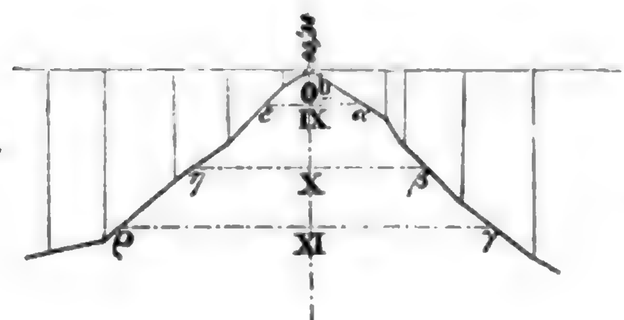


Fig. 169.

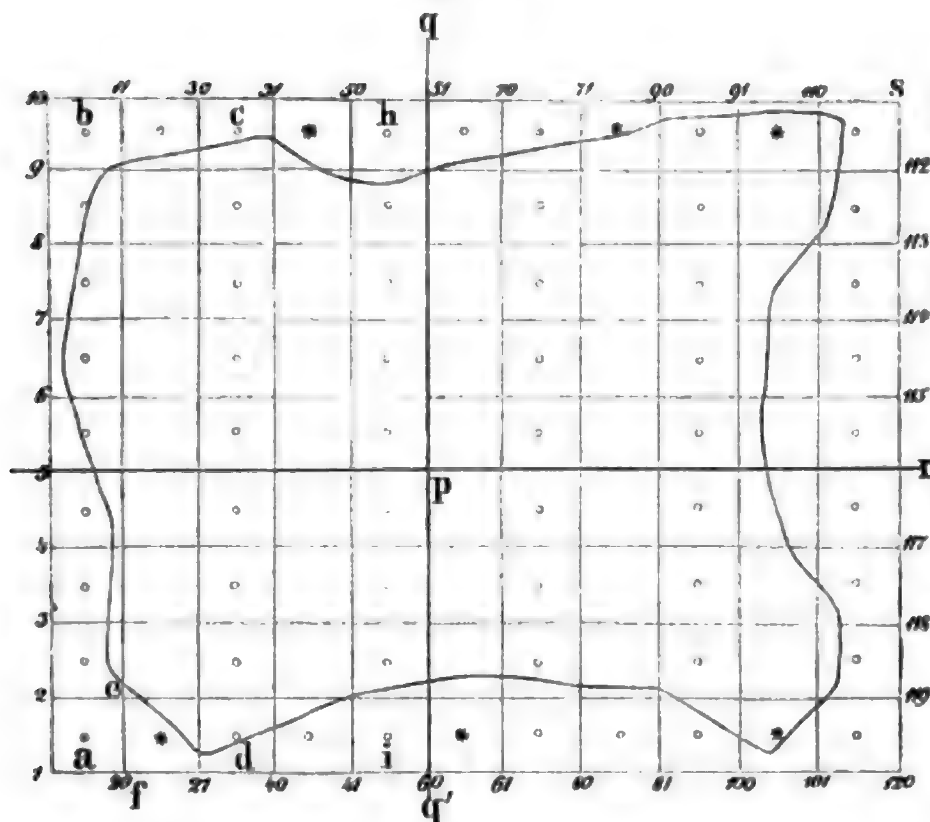
3) Die Construction der Curven aus dem Längenprofil, den Querprofilen und dem Situationsplane ist sehr einfach. Man schneidet nämlich zuerst das Längenprofil durch horizontale Linien, welche die Abstände der Schnittebenen haben, um die Projectionen (m, n, o, p, q, r, s, t, u, v) aller Curvenpunkte zu erhalten, welche in der Operationslinie selbst liegen, und trägt diese Projectionen in die Horizontalprojection der Operationslinie über. Ebenso schneidet man mit horizontalen Linien von der Höhe der Schnittebenen alle Querprofile und projicirt die Schnittpunkte auf die im Horizontalplane eingetragenen Richtungen dieser Profile. (Für das Querprofil Nr. 0 ergeben sich z. B. die Punkte ϑ, ϱ, γ, δ, welche im Horizontalplane mit ϑ', ϱ', γ', δ' bezeichnet sind.) Schliesslich verbindet man die in einer Horizontalebene liegenden Punkte zu einem Vielecke und verwandelt dieses nach dem Augenmasse in eine dem Terrain sich möglichst gut anschmiegende Curve. Kommen viele Curven vor, so zeichnet man jede fünfte oder zehnte durch einen stärkeren Strich oder durch Farbe vor den übrigen aus, um die Gestalt des Terrains leichter zu übersehen.

§. 149. **Aufgabe. Es sei eine nach der Länge und Breite ziemlich gleich ausgedehnte Fläche von nur geringen und nicht rasch wechselnden Erhöhungen und Vertiefungen durch Horizontalcurven darzustellen.**

Dieser Fall kommt bei jedem Moose vor, das zu nivelliren ist. Ist dessen Horizontalplan gegeben, so überziehe man dasselbe mit einem Quadratnetze, dessen Seiten nach Umständen 300 bis 500 Fuss lang und — der leichteren Zeichnung wegen — den von Süd nach Nord und von Ost nach West laufenden Randlinien des Plans parallel sind.

1) Die Aussteckung des Netzes kann keine Schwierigkeit machen, sobald man auf einem Fixpunkte (P), der auch im Plane gegeben ist (p, Fig. 170), die Mittagslinie (P Q, p q) nach §. 125 ausgemittelt und mit Signalen bezeichnet hat. Auf dieser Mittagslinie misst man zunächst die Quadratseiten genau ab, errichtet in dem Fixpunkte mit dem Theodolithen

Fig. 170.



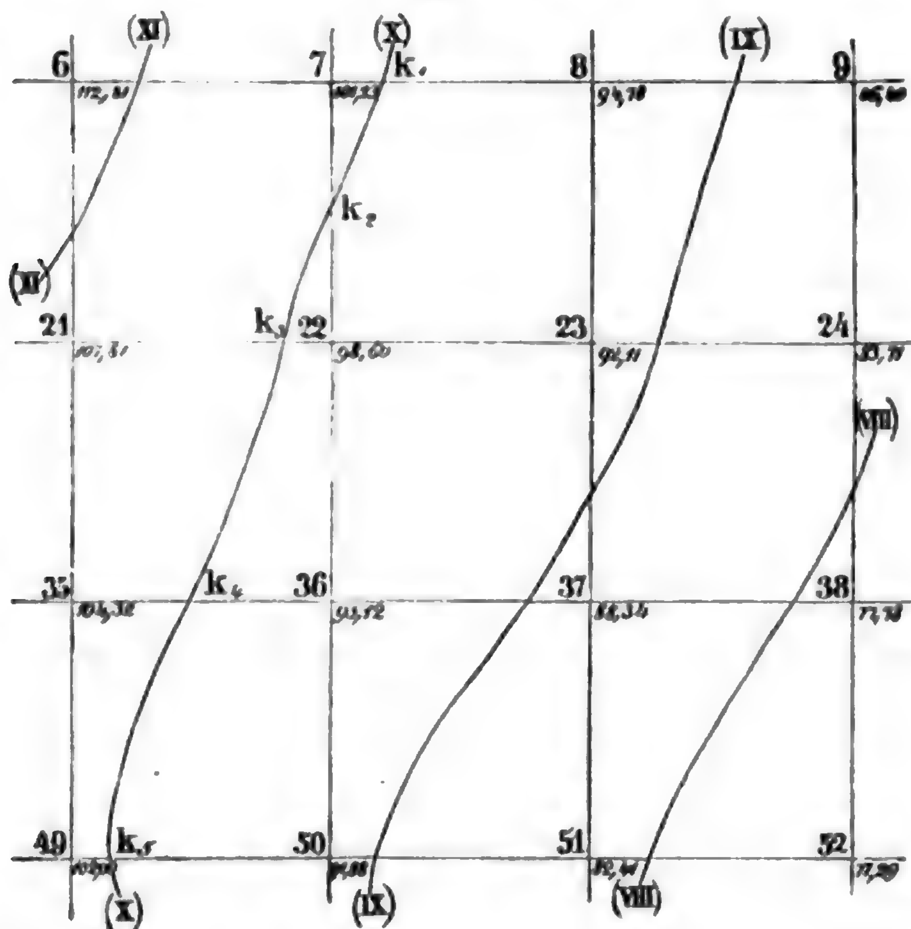
eine Senkrechte (PR, pr) zu ihr, misst auch auf dieser die Quadratseiten genau ein, und steckt dann in ziemlich weit entfernten Netzpunkten (z. B. Q, q und R, r) Parallelen zur Mittagslinie und ihrem Perpendikel ab. Misst man auf diesen Parallelen (QS, qs und RS, rs) die Quadratseiten ebenfalls genau ab und bezeichnet ihre Endpunkte wie vorhin mit Grund- und Beipfählen, so kann man durch Rückwärtsverlängern derselben das ganze Netz herstellen, ohne neue Längen messen zu müssen, vorausgesetzt, dass das Terrain übersehbar ist. Kommen einzelne Hindernisse vor, welche das Visiren erschweren, so wird man dieselben leicht zu überwinden wissen.

2) Das Nivelliren der Netzpunkte geschieht mit der geringsten Anzahl von Aufstellungen, auf die in Fig. 170 angedeutete Weise: indem man nämlich das Instrument stets nahezu in der Mitte eines Quadrats aufstellt, kann man von jedem in der Figur mit einem Ringe (°) bezeichneten Standpunkte aus alle vier Ecken des Quadrats anvisiren und hierdurch, wie diese Punkte beweisen, die Anzahl der Stationen auf die Hälfte derjenigen reduciren, welche nöthig wären, wenn man jede einzelne Linie für sich nivelliren wollte. Die mit Sternchen (*) bezeichneten Stationspunkte sind nicht durchaus nothwendig, aber indem sie zwei Stationsreihen zu einer geschlossenen Abtheilung (z. B. abcd, cdih) machen, gewähren sie eine Controle des Nivellements, welche man nicht unbenützt lassen darf. Es müssen nämlich, da die letzten Punkte (e, f) einer Abtheilung (abcd) zugleich die Anfangspunkte derselben sind, die Abstände der zweimal nivellirten Anfangs- und Endpunkte einander gleich sein, wenn richtig gearbeitet wurde. Da diese Controle jedoch keine Garantie dafür leistet, dass

nicht zwei gleiche aber entgegengesetzte Fehler in einer Abtheilung gemacht wurden, so ist gleichwohl noch die Herstellung eines Gegennivellements anzurathen, bevor die definitive Berechnung der Abstände aller Netzpunkte vom allgemeinen Horizont nach §. 128 vorgenommen wird.

3) Die Bestimmung der Horizontalcurven geschieht auf Grund der bekannten Horizontal- und Verticalabstände der Netzpunkte. Angenommen, die Abstände der Schnittebenen seien Vielfache von 10', also die der Ebenen 1, 2, 3, 4 . . . . 10 beziehungsweise 10, 20, 30, 40 . . . . 100' und es stelle die Fig. 171 einen Theil des nivellirten Netzes mit 400' langen Seiten vor: so findet man z. B. die Curve X in folgender Weise. Diese

Fig. 171.



Curve schneidet offenbar die Linie von 7 auf 8 in einem Punkte k_1, dessen Abstand x_1 vom Punkte Nr. 7 sich aus der leicht zu bildenden Proportion ergibt:

$$(101{,}23 - 94{,}78) : (101{,}23 - 100) = 400 : x_1.$$

Die Curve X geht auch durch die Quadratseite von 7 auf 22, und zwar in einem Punkte k_2, dessen Abstand x_2 vom Punkte Nr. 7 aus der Proportion erhalten wird:

$$(101{,}23 - 98{,}60) : (101{,}23 - 100) = 400 : x_2.$$

Ebenso schneidet die Curve X die Quadratseite von 21 auf 22 in einem Punkte k_3, dessen Abstand x_3 vom Punkte Nr. 21 aus der Proportion folgt:

$$(107{,}81 - 98{,}60) : (107{,}81 - 100) = 400 : x_3.$$

Sowie man durch Berechnen und Abtragen der Horizontalabstände x_1, x_2, x_3 die Punkte k_1, k_2, k_3 findet, so erhält man durch Fortsetzung dieser Arbeit auch die Punkte k_5, k_6, k_7, ... der Curve Nr. X und folglich diese selbst. In gleicher Weise wird jede andere Curve bestimmt; so in Fig. 171 die Curven Nr. VIII, IX und Nr. XI.

Aus diesem Verfahren entnimmt man leicht, auf welcher Voraussetzung die Anlage des Netzes beruht: nämlich darauf, dass man von einem Netzpunkte zum anderen eine gerade Linie legen kann, welche mit dem Terrain zusammenfällt. Wird diese Bedingung bei Quadratseiten von 400 Fuss Länge, wie sehr häufig, nicht erfüllt, so müssen die Seiten kürzer genommen werden; ausserdem kann man sie auch auf 500′ ausdehnen. Darüber hinaus sollte man aber desswegen nicht gehen, weil grössere Stationen, als sie Quadrate von 500′ Seite nöthig machen, für die gewöhnlichen Nivellirinstrumente nicht geeignet sind.

§. 150. **Aufgabe. Eine durchschnittene Terrainfläche, deren Situationsplan gegeben ist, in Horizontalcurven darzustellen.**

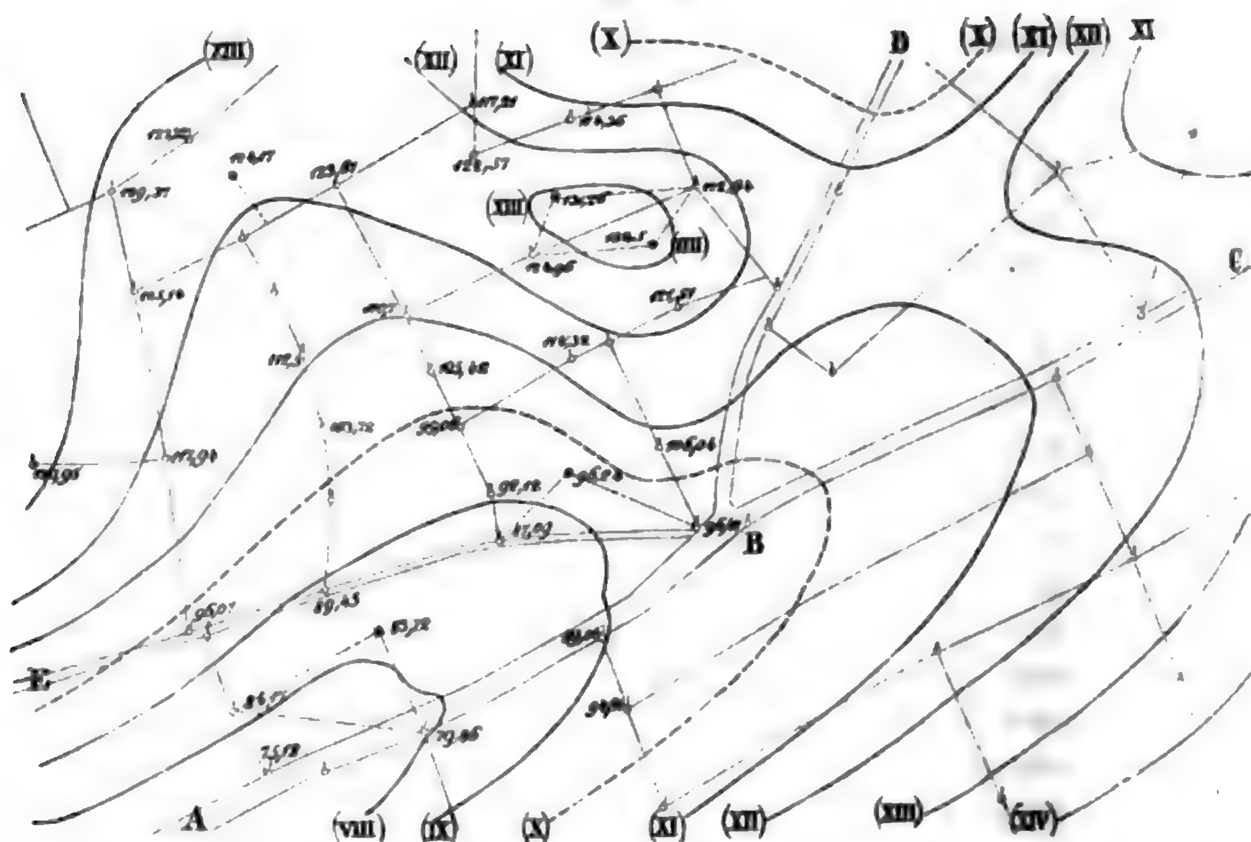
Wenn die Fläche, wie hier angenommen, rasch wechselnde Erhöhungen und Vertiefungen hat und in viele Parzellen getheilt ist, welche alle auf dem Plane genau dargestellt sind: so macht man am zweckmässigsten die Grenzen der Grundstücke und der Wege zum Netze für das Nivellement dieser Fläche. Als Netzpunkte gelten zunächst die Marksteine und andere Fixpunkte, welche sich auf dem Terrain befinden und in dem Plane eingetragen sind; ausserdem aber schlägt man an den Stellen, wo es nöthig erscheint — und dieses ist überall der Fall; wo man von einem Punkte zum anderen keine Gerade legen kann, welche in das Terrain fällt — Grund- und Beipfähle in den Boden, und misst sie durch Dreiecke oder Coordinaten in Bezug auf die gegebenen Fixpunkte ein, um sie in dem Situationsplane verzeichnen zu können.

Ist das Netz in seiner Horizontalprojection festgestellt, so nivellirt man alle seine mit Pfählen bezeichneten Punkte zweimal ein, berechnet deren Abstände vom allgemeinen Horizont und bestimmt daraus nach §. 149 die Durchgänge der Horizontalcurven zwischen je zwei Punkten, indem man ihre horizontale Entfernung, welche dazu nöthig ist, dem Plane entnimmt. Hiernach werden folgende Bemerkungen genügen, die Fig. 172 näher zu erläutern.

Die mit Sternchen bezeichneten Punkte sind ihrer Horizontalprojection nach durch Dreiecke bestimmt, welche an die vorhandenen Marksteine angeschlossen wurden.

Um die Figur nicht mit Zahlen zu überladen, sind die Coten nur in der linken Hälfte derselben eingeschrieben. Die römischen Ziffern bezeichnen die horizontalen Schnittebenen und die Horizontalcurven; dabei ist angenommen, dass der allgemeine Horizont die nullte Ebene ist und dass die 10, 20, 30, 40 .... Fuss tiefer liegenden Ebenen die Schnittebenen I, II, III, IV ... sind. Die verticalen Abstände der Curven vom allgemeinen Horizont

Fig. 172.



stellen somit Vielfache von 10 Fuss dar. Der leichteren Uebersicht des Terrains wegen hebt man in der Zeichnung jede fünfte oder zehnte Curve durch eine besondere Linie oder durch Farbe hervor, wie dieses hier bei der Curve X der Fall ist.

4. Bemerkungen und Aufgaben über das Nivelliren.

§. 151. Die wichtigsten Anwendungen des Nivellirens bestehen in der Aufnahme von Terrainprofilen und Horizontalcurven; es gibt aber noch viele andere Anwendungen dieses Zweiges der Messkunst, welche ebenfalls wichtig sind. Einige derselben sind in den nachfolgenden Aufgaben und in den Abschnitten IV. und V. enthalten, während die übrigen so einfach gelöst werden können, dass wir es nicht für nöthig halten, sie hier besonders aufzuführen. Dagegen mögen für manche Anfänger im Nivelliren die nachstehenden Winke zur Ueberwindung von Hindernissen oder zur Vermeidung von Messungsfehlern nicht überflüssig sein.

1. Wenn man genau nivelliren will, so ist es zunächst nöthig, einen in allen Theilen geregelten Gang der Arbeit festzusetzen, einzuüben und unabänderlich festzuhalten. Dieser Gang hängt von der Beschaffenheit des Instruments und von der Methode des Nivellirens, die zur Anwendung kommen soll, ab, und wird nach Anleitung der §§. 135 bis 137 bestimmt.

2. Wesentliche Sorgfalt ist auf das richtige Einstellen entweder des Fadenkreuzes oder der Zieltafeln und auf das deutliche und richtige Aufschreiben der abgelesenen Visirhöhen zu verwenden, mag das letztere nun

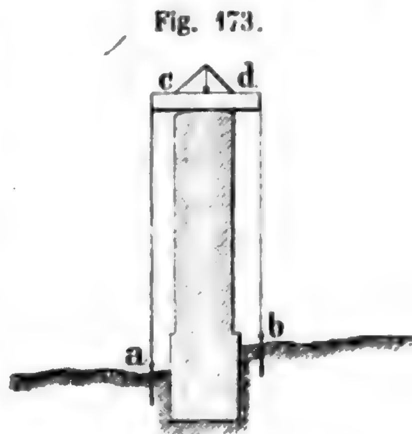
vom Geometer selbst oder von dessen Gehilfen geschehen. Die Aufzeichnungen im Notizbuche müssen so vollständig und leserlich sein, dass jeder andere Sachverständige das Nivellement danach berechnen und auftragen kann.

3. Man darf die Mühe nicht scheuen, vor jedem Nivellement das Instrument zu untersuchen und es nöthigenfalls zu berichtigen. Bei grösseren Arbeiten macht man dergleichen Untersuchungen jeden Morgen. Dabei hat man sich auch zu überzeugen, ob alle Theile des Instruments ihre Schuldigkeit thun, z. B. die Schrauben und Federn. Gehen die Schraubenspindeln zu leicht, so ziehe man entweder ihre geschlitzten Muttern an, oder tauche die Spindeln in zerlassenes Wachs, dem ein wenig Talg zugesetzt ist. Grosse Reibung zwischen Stahl und Kupfertheilen wird durch Olivenöl oder Klauenfett gemindert.

4. Nach beendigter Arbeit wird das Instrument, wenn es nass geworden sein sollte, getrocknet und hierauf vorsichtig eingepackt. Während der Ruhestunden und zur Nachtzeit nimmt dasselbe der Geometer zu sich, um es der Neugierde Unberufener zu entziehen. Auf Reisen soll es vor Erschütterungen so viel als möglich bewahrt werden.

5. Hat man in bedecktem Terrain zu nivelliren und bietet Gebüsch oder Gestrüpp ein Hinderniss dar, so wird dasselbe in der Richtung der Visirlinien abgehackt; führt das Nivellement durch einen Wald, so kann man sich in der Regel einen Standpunkt suchen, der zwei Punkte einzunivelliren gestattet, ohne dass man Bäume fällen lässt; wird die Linie von Hecken, Planken oder anderen Zäunen durchschnitten und kann man sich nicht hoch genug aufstellen, um über sie wegzusehen, so bringt man in denselben Lücken an, durch welche visirt werden kann; hohe Mauern werden in diesem Falle dadurch überschritten, dass man vor und hinter denselben Grundpfähle (a, b Fig. 173) schlägt und deren Höhenunterschied mit Hilfe einer horizontal gelegten Latte (c d) durch Nivellirlatten oder Senkel (a c, b d) abmisst.

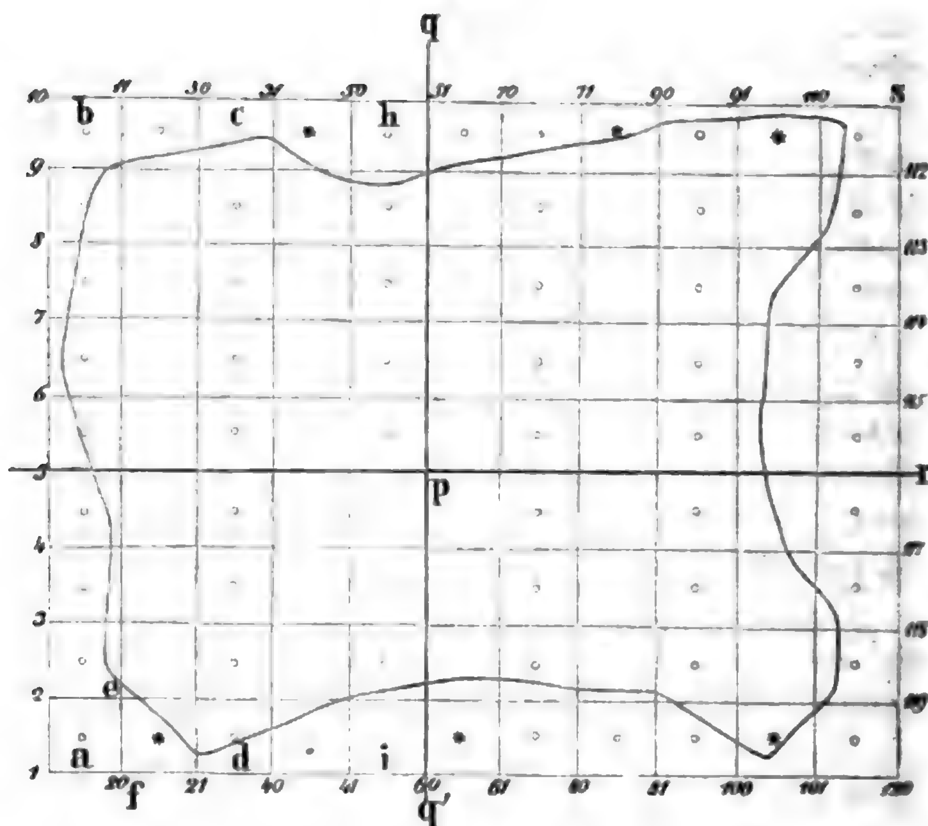
Fig. 173.



6. Wird die Richtung eines Längen- oder Querprofils von einem Bache oder kleineren Flusse geschnitten, so verfährt man mit der Aufnahme gerade so, als ob kein Wasser vorhanden wäre, da im Sommer die Arbeiter die Nivellirlatte im Wasser gerade so halten können, als im Trockenen. An grossen Flüssen und Strömen hat man indessen nach der im Abschnitte V. gegebenen Anleitung zu verfahren.

7. Wenn eine Moor- oder Sumpffläche zu nivelliren ist, so muss dieselbe vor allen Dingen mit einer Reihe von Punkten umgeben werden, welche noch (wie in Fig. 174 die Pfähle Nr. 1, 2, 3 . . 20, 21, 40, 41 . . . 30, 31, 50, 51 . . . 112, 113, 114 . . .) auf festem Boden stehen. Von dieser Umfangslinie aus nivellirt man nach Innen so viele Punkte an, als nur

Fig. 174.



immer angeht; die übrigen sind entweder im Winter, wenn der Boden gefroren ist, einzunivelliren, oder es ist für geeignete Standpunkte des Instruments durch Einschlagen von je drei Pfählen zu sorgen.

8. Den schädlichen Einflüssen der Witterung lässt sich nur zum Theil begegnen: sind die daraus zu befürchtenden Störungen zu gross, so muss die Arbeit eingestellt werden. Den nachtheiligen Einwirkungen der directen Sonnenstrahlen auf die Libelle, das Objectiv des Fernrohrs und die Gläser der Canalwage [1] werden durch Schirme beseitigt; dagegen können die daraus hervorgehenden Luftzitterungen und scheinbaren Bewegungen der Nivellirlatte eben so wenig weggeschafft werden, als die Störungen, welche dadurch entstehen, dass helle Wände das Sonnenlicht gegen das Fernrohr oder die Canalwage reflectiren.

9. Jedes Längenprofil, welches als Grundlage des Entwurfs eines Erd- oder Wasserbauwerks dienen soll, muss auf feste Punkte (Fixpunkte) bezogen werden, welche nicht wie Grund- und Beipfähle der Zerstörung aus Unvorsichtigkeit oder Muthwillen unterliegen. Dergleichen Fixpunkte, welche nicht über 100 Meter von einander entfernt sein sollten, sind: Felsvorsprünge, Sockel von Gebäuden, massive Treppenstufen, Trottoirplatten, Fachbäume etc. und in Ermangelung solcher natürlicher Gegenstände 0,m12 starke eichene Pfähle, welche ungefähr 1 Meter tief in den Boden gerammt, oben mit einem Nagel versehen und wohl verwahrt werden. Bei der Ausführung des Bauentwurfs gehen alle Nivellemente von den Fixpunkten aus,

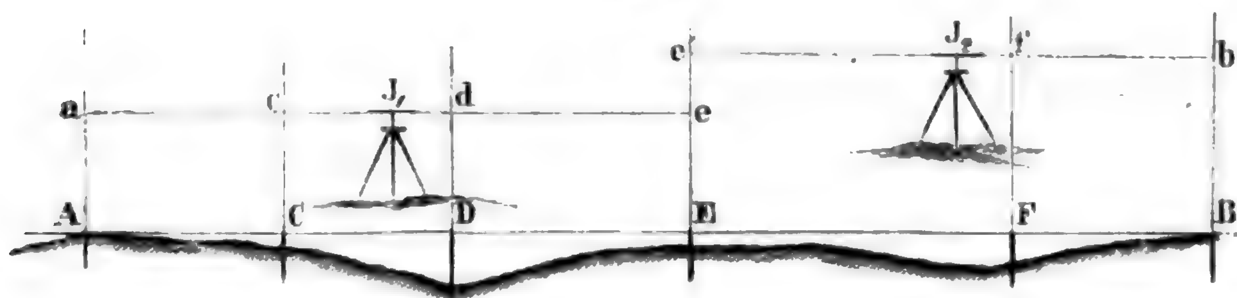
[1] An diesen Gläsern entstehen Glanzlinien, welche die Ränder der Wasseroberflächen nicht gut erkennen lassen.

wenn die Grundpfähle des Längenprofils nicht mehr vorhanden sind oder über ihre Höhenlage Zweifel bestehen.

10. Kein Längennivellement darf als richtig angesehen werden, welches nicht durch ein zweites Nivellement oder durch sich selbst controlirt ist. Eine Controle der lezteren Art bietet jede in sich selbst zurückkehrende Linie, wenn der berechnete Abstand des Endpunkts derselben mit dem des Anfangspunkts, welcher angenommen wird oder gegeben ist, genau oder doch sehr nahe übereinstimmt; denn da der End- und Anfangspunkt hier dieselben sind, so kann man gewissermassen das Nivellement der halben Linie als das Gegennivellement ihrer anderen Hälfte betrachten. Möglich bleibt es aber bei dieser Controle immer noch, dass in dem Nivellement zwei gleiche und entgegengesetzte Fehler stecken, welche sich aufheben. Diese Fehler müssten jedoch entdeckt werden, wenn man die Linie zurück nivelliren würde. Darum ist ein zweites Nivellement stets die beste Prüfung des ersten.

§. 152. Aufgabe. Eine horizontale gerade Linie von bestimmter Höhenlage abzustecken.

Fig. 175.



Ist die Richtung der Geraden durch zwei Punkte (A, B Fig. 175) und ihre Höhe durch einen Fixpunkt (C) gegeben, so schaltet man vor Allem zwischen den beiden Endpunkten (A, B) so viele Punkte (D, E, F . . .) ein, als nöthig erachtet werden, um die gesuchte Horizontallinie gehörig festzulegen. In allen Punkten der Linie werden Pfähle eingeschlagen, welche so lang sind, dass sie sicher über die abzusteckende Horizontale reichen. Hierauf nivellirt man den Fixpunkt (C) an und lässt die nächst gelegenen Pfähle der Linie (z. B. A, D, E) so tief in den Boden schlagen oder oben absägen, dass sie bei horizontaler Absehlinie dieselbe Ablesung auf der Latte geben wie der Punkt C.

Sind alle von der ersten Station aus sichtbaren Pfähle in dieser Weise geordnet, so betrachtet man einen derselben als Fixpunkt der zweiten Station und verfährt wie vorhin. Eben so kann man in einer dritten oder vierten Station zu Werke gehen.

§. 153. Aufgabe. Auf dem Felde eine gerade Linie von bestimmter Neigung abzustecken.

Die abzusteckende Gerade sei in ihrer horizontalen und verticalen Projection durch die Punkte A und B (Fig. 176) bestimmt; der Höhenunterschied

Fig. 176.

zwischen A und B sei = h und die horizontale Entfernung von A bis B = A C = l. Es ist somit die relative Steigung von A bis B oder das relative Gefäll von B bis A gleich

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} \,. \tag{314}$$

Steht der erste in die Linie A B einzurichtende Pfahl E D horizontal um die Länge A D = λ von A ab, so ist die absolute Steigung von A bis E oder

$$D\,E = \eta = \lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Um nun den Pfahlkopf E in die richtige Höhe zu bringen, stelle man das zwischen A und D befindliche Nivellirinstrument auf die über A stehende Latte ein, lese die Höhe A a = z ab und lasse nun den Pfahl D E so lange tiefer schlagen oder oben absägen, bis die Visirhöhe E e = z — η wird. Ebenso verfährt man bei der Bestimmung des Punkts F, wobei entweder die aus der Gleichung

$$F\,G = \eta' = \lambda' \operatorname{tg} \alpha$$

folgende Höhe η' von A aus, oder die Höhe

$$F\,H = \eta' - \eta$$

von E aus aufgetragen wird. Liegt der Punkt F, wie in Fig. 176, unter der Terrainfläche, so versteht es sich von selbst, dass man diese bis auf eine entsprechende Tiefe ausgraben lassen muss, um den Pfahl in der richtigen Höhe einsetzen zu können.

Lägen einzelne Punkte der abzusteckenden Geraden, wie E und J, sehr hoch über dem Terrain, so dass sich die Latte nicht gut auf die Pfahlköpfe stellen liesse, so würde man neben die Höhenpfähle E D, J L Grundpfähle schlagen und diese in Bezug auf A oder B einnivelliren, um danach die Abstände der Punkte E und J vom Terrain zu berechnen und von den Grundpfählen aus abzumessen.

§. 154. **Aufgabe. An einem Bergabhange eine Linie von bestimmter Neigung abzustecken.**

1. Wenn nur ein Endpunkt der geneigten Linie gegeben ist.

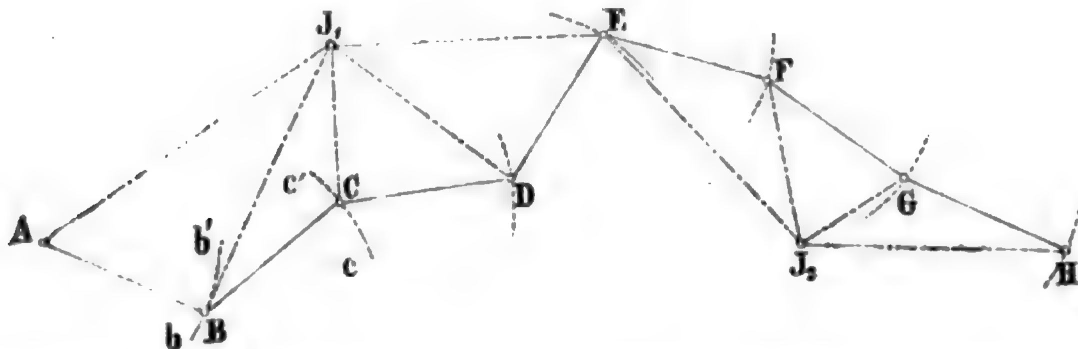
Wir wollen den unteren Endpunkt und die relative Neigung p der Linie als gegeben ansehen und annehmen, dass die horizontale Entfernung von

einem Punkte zum anderen eine Kettenlänge l betrage. Demnach ist die absolute Steigung von einem Punkte zum nächst höheren

$$n = l\,p.$$

Ist A (Fig. 177) der gegebene unterste Punkt, so stelle man das Nivellirinstrument (J_1) etwa 50 bis 60 Meter von A entfernt so auf, dass man einige der abzusteckenden Punkte (A, B, C, D, E) gut übersehen kann. Stellt man die Absehlinie auf die Latte in A ein und liest die Höhe N ab, so muss die Ablesung auf dem um l entfernten Punkte B offenbar $N - l\,p$ werden. Um diesen Punkt zu finden, lasse man den einen Kettenstab in A festhalten und mit dem anderen bei angespannter Kette einen Kreisbogen b b' beschreiben. Auf diesem Bogen wird die Nivellirlatte einige Male versuchsweise aufgestellt, bis man einen Punkt gefunden hat, auf dem bei horizontaler Absehlinie die Ablesung $= N - l\,p$ ist. Nun setze man den einen Kettenstab in den mit einem Pfahle bezeichneten Punkt B ein und führe den anderen Stab bei angespannter Kette in dem von B aus beschriebenen Kreisbogen c c' so lange herum, bis die Latte auf einen Terrainpunkt

Fig. 177.



C kommt, der die Ablesung $N - 2\,l\,p$ liefert. In gleicher Weise findet man D und E. Muss hierauf die Station gewechselt werden, so betrachtet man den letzten Punkt E als Anfangspunkt der Operation und wiederholt dieselbe ein oder mehrere Male in der eben beschriebenen Weise, bis man die Höhe erreicht hat, auf welche die geneigte Linie abgesteckt werden soll. Zur Aufnahme ihrer horizontalen Projection dient eine der im Abschnitte II beschriebenen Methoden.

2. Wenn die beiden Endpunkte der geneigten Linie gegeben sind.

Heisst der untere Endpunkt A und der obere Z, so stecke man von A aus eine Linie mit der Steigung p und von Z aus eine Linie mit dem Gefälle p nach Anleitung der vorigen Nummer ab. Beide Linien werden sich in einem Punkte M schneiden, und es besteht nun die gesuchte Linie aus den Zweigen A M und M Z.

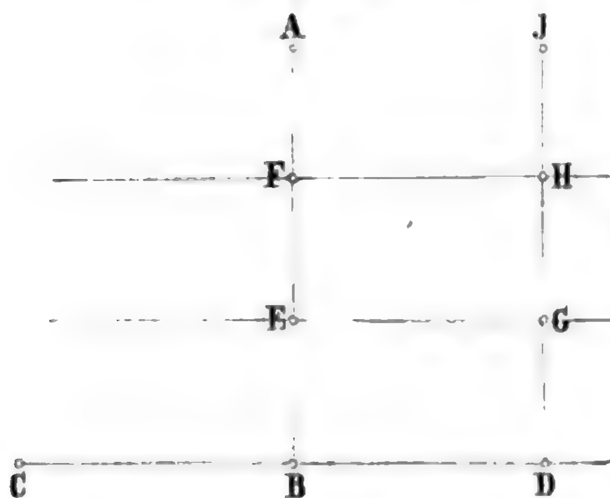
Wäre der Bergabhang durch Horizontalcurven dargestellt, deren Ebenen um gleiche Höhen von einander abstehen, so könnte man die zwischen A und Z gelegene geneigte Linie auf dem Plane nach ihrer Horizontalprojection bestimmen und diese Projection auf das Terrain übertragen; diese Bestimmung würde aber offenbar mehr Mühe verursachen als das unmittel-

bare Abstecken der geneigten Linie, wesshalb letzteres vorzuziehen ist, so lange es sich bloss um eine einzige geneigte Linie von mässiger Ausdehnung handelt. Anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn die Linie bestimmt werden soll, nach welcher eine Strasse oder Eisenbahn am vortheilhaftesten zu führen ist; in diesem Falle leisten die Horizontalcurven wesentliche Dienste.

§. 155. **Aufgabe. Eine Ebene abzustecken, welche nach einer bestimmten Richtung mit dem Horizont einen gegebenen Winkel bildet.**

Stellt in Fig. 178 die Linie A B die Richtung vor, nach welcher die abzusteckende Ebene mit dem Horizont einen Winkel α bilden soll, so errichte man zunächst auf A B die Senkrechte C D und stecke in dieser Richtung nach §. 152 eine horizontale Gerade ab, deren Höhenlage durch den Grundpfahl des Punkts B bestimmt sein mag. Hierauf messe man auf A B eine hinreichende Anzahl gleicher Theile B E, E F .... ab und stecke auf bekannte Weise durch diese Punkte die Linien E G, F H ... parallel zu C D ab. Weiter errichte man in E, F ... Höhenpfähle und bringe deren Köpfe nach §. 153 in eine Gerade, welche die Neigung α gegen den Horizont hat. Eben so verfahre man mit den Punkten G, H ... in der Geraden D J, welche mit A B parallel läuft und folglich auf C D senkrecht steht. Durch Erweiterung der Horizontallinien E G, F H ..., oder durch Verlängerung der geneigten Geraden B A, D J ..., kann man die abzusteckende Ebene so weit als man will ausdehnen. Die Richtigkeit des Verfahrens wird sich der Leser sofort selbst klar machen, wenn er mit den einfachsten Sätzen der Stereometrie vertraut ist.

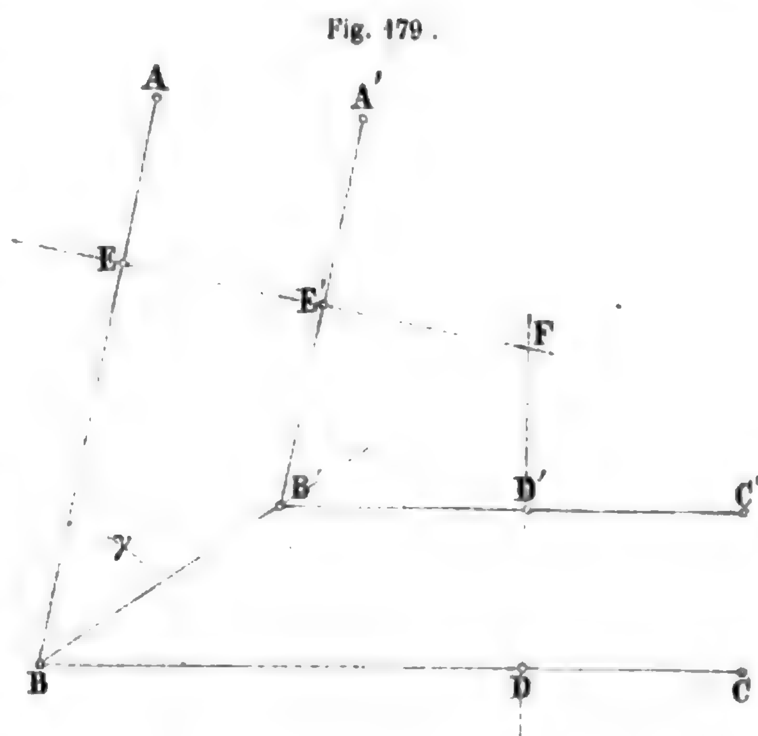
Fig. 178.



§. 156. **Aufgabe. Zwei gegen den Horizont geneigte Ebenen sind ihrer Lage nach gegeben: man soll ihre Durchschnittslinie abstecken.**

Die Winkel, welche die beiden gegebenen Ebenen mit dem Horizont bilden, seien α und β; der Winkel, den die Schnitte dieser Ebenen mit einer Horizontalebene einschliessen, heisse γ; und es sei die Lage dieses Winkels für eine bestimmte Horizontalebene durch die Schenkel A B, B C (Fig. 179) gegeben.

Vor Allem wird man senkrecht auf die gegebenen Geraden A B, B C die Linien D F, E F abstecken und aus den Neigungswinkeln α und β berechnen, wie weit die Schnitte A' B', B' C' einer zweiten Horizontalebene A' B' C', die um eine beliebige Grösse h über der ersten A B C liegt, von



AB, BC nach den Richtungen EE', DD' abstehen. Es ist aber, wenn die Ebene ABB'A' die Neigung α und CBB'C' die Neigung β hat: $EE' = h \operatorname{tg} \alpha$ u. $DD' = h \operatorname{tg} \beta$, und es lassen sich folglich die Punkte E', D' leicht abstecken. Zieht man durch E', D' zu AB, BC die Parallelen A'E', C'D' und bestimmt ihren Schnittpunkt B', so stellt BB' die Horizontalprojection der gesuchten Kante vor. Die Höhe des Punkts B' über B ist selbstverständlich $= h$, und man braucht desshalb nur in B' einen Pfahl einzusetzen, dessen Kopf um die Grösse h über B liegt, um die Durchschnittslinie selbst zu erhalten. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass man die Grösse h ziemlich gross zu nehmen hat, um die Durchschnittslinie möglichst genau zu finden.

D. Barometrisches Höhenmessen.

§. 157. Es ist die Aufgabe dieses Abschnitts der Lehre von den Messungen, die Beziehungen zwischen dem Höhenunterschiede zweier Orte und den an ihnen beobachteten Barometerständen durch eine Gleichung auszudrücken, in welcher alle auf das Endresultat einwirkenden Umstände berücksichtigt sind. Diese Gleichung nennt man die Barometerformel.

Am ausführlichsten wurde diese Formel zuerst von Laplace und später von Poisson, Gauss, Bessel u. A. entwickelt. Im Jahre 1854 glaubte G. S. Ohm in seinen „Grundzügen der Physik" darauf aufmerksam machen zu müssen, dass die auf das Barometer drückende verticale Luftsäule nicht cylindrisch angenommen werden dürfe, wie bis dahin stets geschehen, sondern dass dafür ein Luftkegel zu setzen sei, dessen Seiten die Richtung der Schwere haben und dessen Spitze somit im Mittelpunkte der Erde liegt. Auf diese gewiss richtige Annahme gestützt, entwickelte Ohm eine einfachere Barometerformel, verfiel jedoch dabei in den Fehler, den Seitendruck, welchen die kegelförmige Luftsäule von ihrer Umgebung erfährt, nicht zu berücksichtigen. Dieser Druck hebt aber einen Theil des lothrechten Drucks, den ein isolirter Luftkegel ausüben würde, auf, und bewirkt, wie sich allgemein beweisen lässt, dass die von der Atmosphäre umschlossene kegelförmige Luftsäule auf ihre Grundfläche mit dem Gewichte

eines Luftcylinders von gleicher Basis und Höhe drückt, gleichwie in einem kegelförmigen Wassereimer der Druck auf den horizontalen Boden gleich ist dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Bodenfläche zum Querschnitte und den lothrechten Abstand des Wasserspiegels vom Boden zur Höhe hat. Wir werden demnach bei der nachfolgenden Entwickelung der Barometerformel von demselben Princip ausgehen, welches den bisherigen Formeln zu Grunde liegt, und an diesen nur jene Aenderungen anbringen, welche in Folge neuerer Versuche und Massbestimmungen durchaus nothwendig sind, und worüber wir uns in der Schrift: „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die räumlichen Temperaturänderungen der Atmosphäre" näher ausgesprochen haben.

§. 158. Aufgabe. Die Formel zur Berechnung des Höhenunterschieds zweier Orte aus den an ihnen mit Quecksilberbarometern angestellten Beobachtungen abzuleiten.

Diese Aufgabe (die Barometerformel abzuleiten) verlangt: den Luftdruck als Function der Höhe der drückenden Luftsäule darzustellen, für den Druck sein durch Barometer, Thermometer und Psychrometer bestimmbares Mass zu setzen, und aus der so gebildeten Gleichung die Höhe des Beobachtungsorts zu suchen. Zu dem Ende bezeichne:

r den Halbmesser der Erdkugel bis an die Meeresfläche,
z die Höhe irgend eines Punkts der Atmosphäre über dem Meere,
p den Druck der Luft an diesem Punkte auf die Flächeneinheit,
g die Intensität der Schwere in der Höhe z über dem Meere,
ϱ die Dichtigkeit der durchaus trockenen Luft an dieser Stelle,
τ die mittlere Temperatur der Luftsäule in Centigraden, und
α den Ausdehnungscoefficienten der Luft für einen solchen Grad.

In der analytischen Mechanik wird gezeigt, dass, wenn X, Y, Z die drei auf eine flüssige Materie wirkenden, nach den rechtwinkligen Axen der x, y, z zerlegten Kräfte sind, zwischen diesen Kräften, dem Drucke p und der Dichtigkeit ϱ folgende Differentialgleichung stattfinden muss:

$$dp = \varrho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

In dem vorliegenden Falle legt man am besten die Axe der z in die Richtung der Schwere, also die der x und y wagrecht, wodurch die horizontalen Seitenkräfte X und Y null werden und $Z = -g$ wird. Es folgt also aus der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts der Flüssigkeiten

$$dp = -\varrho\,g\,dz \tag{315}$$

während aus der Physik der Gase die Relation

$$p = k\,\varrho\,(1 + \alpha\,\tau) \tag{316}$$

bekannt ist, in welcher k einen constanten Coefficienten bezeichnet. Dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, so wird ϱ eliminirt und es folgt daraus

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\,dz}{k\,(1 + \alpha\,\tau)}. \tag{317}$$

Ist g_0 die Schwere an der Meeresfläche und lässt man dieselbe im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung vom Erdmittelpunkte abnehmen,[1] so ist

$$g = \frac{g_0 r^2}{(r + z)^2}$$

und daher, wenn man diesen Werth in die letzte Gleichung setzt:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g_0 r^2}{k(1 + \alpha \tau)} \cdot \frac{dz}{(r + z)^2}.$$

Die Temperatur τ der hier betrachteten Luftsäule nimmt mit der Höhe ab, und es ist nach unseren Untersuchungen höchst wahrscheinlich, dass diese Abnahme der Höhendifferenz proportional ist, so dass also die Temperatur τ mit hinreichender Genauigkeit durch das Mittel der beiden Temperaturen T und t, welche an den beiden äussersten Punkten der Luftsäule beobachtet wurden, dargestellt werden kann. Demnach ist für jeden bestimmten Fall τ constant und daher

$$\log p = \frac{g_0 r^2}{k(1 + \alpha \tau)(r + z)} + C.$$

Für einen Punkt z', der um die Höhe $z' - z = h$ über z liegt, sei der Luftdruck p', so gilt für diesen die Gleichung:

$$\log p' = \frac{g_0 r^2}{k(1 + \alpha \tau)(r + z')} + C$$

und es ergibt sich durch Abziehen dieser beiden Gleichungen von einander:

$$\log \frac{p}{p'} = \frac{g_0 r^2 (z' - z)}{k(1 + \alpha \tau)(r + z)(r + z')}.$$

Setzt man $z' - z = h$ und berücksichtigt, dass genau genug

$$(r + z)(r + z') = r^2 \left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)$$

ist, so findet sich aus der letzten Gleichung, wenn man ferner die natürlichen Logarithmen durch gemeine ersetzt und mit m den Modul 0,4342945 bezeichnet:

$$h = \frac{k}{m g_0}(1 + \alpha \tau)\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right) . \log \frac{p}{p'}. \qquad (318)$$

Für die Drückungen p, p' lassen sich die an den Punkten z, z' beobachteten Barometerstände B, b einführen, wenn man sie mit Hilfe der daselbst beobachteten Quecksilbertemperaturen T', t' auf eine und dieselbe Temperatur (am einfachsten auf 0^0) reducirt und ausserdem die Aenderung der Schwere mit der Höhe berücksichtigt.

Es sei nun:

D die Dichte des Quecksilbers bei 0^0 an der Meeresfläche,
γ der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers für 1^0 C,
B_0 der auf 0^0 reducirte Barometerstand der oberen Station,
b_0 der reducirte Barometerstand der oberen Station, und
g' der Werth der Schwere an dieser Station;

[1] Wobei nur die von der Centrifugalkraft herrührende, in den hier zu bestimmenden Höhen aber unmerklich kleine Aenderung dieses Gesetzes vernachlässigt wird.

so ist aus physikalischen Gründen:

$$p = g D B_0, \quad p' = g' D b_0, \quad g : g' = (r + z')^2 : (r + z)^2$$
$$B = B_0 (1 + \gamma T'), \quad b = b_0 (1 + \gamma t')$$

und folglich, wenn man substituirt und in dem Werthe von $g : g'$ eine erlaubte Abkürzung eintreten lässt:

$$\frac{p}{p'} = \frac{g B_0}{g' b_0} = \left(1 + \frac{2h}{r}\right) \cdot \frac{1 + \gamma t'}{1 + \gamma T'} \cdot \frac{B}{b}. \qquad (319)$$

Da γ nur $1/_{5550}$ ist und die Werthe von T' und t' wohl selten 25^0 überschreiten, so darf man $(\gamma T')^2$ gegen 1 vernachlässigen und es ist

$$\frac{1 + \gamma t'}{1 + \gamma T'} = (1 + \gamma t')(1 - \gamma T') = 1 - (T' - t')\gamma \qquad (320)$$

demnach auch, mit Rücksicht auf die Kleinheit des Werths $2h$ gegen r,

$$\log \frac{p}{p'} = \log \frac{B}{b} + \log (1 - (T' - t')\gamma) + 2m \frac{h}{r}. \qquad (321)$$

Was den Coefficienten k betrifft, welcher in dem Ausdrucke für h (Nr. 318) noch enthalten ist, so stellt derselbe nach Gleichung (316) das Verhältniss des Luftdrucks p zur Dichtigkeit ϱ dieser Luft bei der Temperatur τ derselben vor. Dieses Verhältniss haben Biot und Arago im Jahre 1806 bestimmt, und es lag der daraus hervorgegangene Werth von k allen bisherigen Barometerformeln, namentlich denen von Laplace, Poisson, Gauss und Bessel zu Grunde. Die neueren Bestimmungen von Régnault, welche mit Recht für genauer gehalten werden, liefern einen etwas grösseren Werth für k, wesshalb wir hier diesen anwenden. Es ist nämlich für $\tau = 0^0$ und unter 45^0 Breite bei $0^m{,}76$ Barometerstand:

$$k = \frac{p}{\varrho} = \frac{0^m{,}76 \ . \ 13{,}596}{0{,}00129273} = 7993^m{,}13.$$

Da nun die Schwere g_0 unter der Breite ψ zu jener unter der Breite 45^0 in dem Verhältniss von $(1 - 0{,}0026 \cos 2\psi) : 1$ steht, also

$$\frac{1}{g_0} = \frac{1}{1 - 0{,}0026 \cos 2\psi} = 1 + 0{,}0026 \cos 2\psi$$

st, so wird nunmehr der erste Factor der Formel Nr. 318

$$\frac{k}{m g_0} = \frac{7993^m{,}13}{0{,}4342945}(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi) = 18404^m{,}9\,(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)$$

und folglich durch Einsetzung dieses und des Werths Nr. 321 in Nr. 318 der gesuchte Höhenunterschied

$$h = 18404^m{,}9\,(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)(1 + \alpha\tau)\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)\left[\log \frac{B}{b} + \right.$$
$$\left. + \log (1 - (T' - t')\gamma) + 2m \frac{h}{r}\right] \qquad (322)$$

worin $\tau = 1/_2 (T + t)$, $\alpha = 0{,}003665$, $\gamma = 0{,}0001802$, $2m = 0{,}86859$ ist.

Dieser Ausdruck für h ist noch wegen des Einflusses der Luftfeuchtigkeit zu verbessern. Laplace, Poisson, Gauss u. A. bringen dieselbe nach

einem mittleren Feuchtigkeitszustande der Luft in Rechnung, indem sie sowohl die barometrische Constante k als den Coefficienten α etwas grösser nehmen als trockene Luft sie fordert, während Bessel erst das Maximum des Wasserdampfs, das die Luft vermöge ihrer Temperatur aufnehmen kann, nach einem von Laplace gegebenen Ausdrucke berechnet und von dessen Druck denjenigen Theil in der Formel berücksichtigt, welcher den Angaben der auf den beiden Stationen beobachteten Psychrometer entspricht. Dieses Verfahren hat eine sehr verwickelte Rechnung zur Folge, welche kaum im richtigen Verhältniss zu der dadurch erzielten Genauigkeit steht und desshalb durch die nachstehende einfachere Entwickelung ersetzt werden kann. Bezeichnet nämlich:

$\mathfrak{p}$ den Druck der in einem gewissen Raume sich befindenden atmosphärischen Luft,

$\mathfrak{p}'$ den Druck des darin befindlichen Wasserdampfs,

$\mathfrak{v}$ das in der Raumeinheit des Gemisches enthaltene Volumen trockener Luft,

$\mathfrak{v}'$ das in demselben Raume sich befindende Volumen Wasserdampf,

$\mathfrak{d}$ die Dichtigkeit des Gemisches von trockener Luft und Wasserdampf; endlich

$\mathfrak{d}'$ die Dichtigkeit des Wasserdampfs, beide in Bezug auf trockene Luft genommen:

so muss nach dem Dalton'schen Gesetze $\mathfrak{d} = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}'\,\mathfrak{d}'$ und nach dem Gesetze von Mariotte

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'}, \quad \mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'}$$

daher auch, wenn man diese Werthe einführt und $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = \mathrm{p}$ setzt,

$$\mathfrak{d} = 1 - (1 - \mathfrak{d}')\,\frac{\mathfrak{p}'}{\mathrm{p}}$$

sein. Da nun $\mathfrak{d}' = 0{,}6235$, also sehr nahe $= {}^5/_8$, so wird das Verhältniss der Dichtigkeiten der trockenen und feuchten Luft

$$\frac{1}{\mathfrak{d}} = 1 : \left(1 - {}^3/_8 \cdot \frac{\mathfrak{p}'}{\mathrm{p}}\right) = 1 + {}^3/_8 \cdot \frac{\mathfrak{p}'}{\mathrm{p}}$$

womit der aus den Barometerständen abgeleitete Werth von h multiplicirt werden muss, da der Höhenunterschied der beiden Stationen in demselben Masse zunimmt, als die feuchte Luft leichter ist als die trockene. Nennt man nun σ', σ'' und b′, b″ die an den beiden Stationen beobachteten Dampfspannungen und Barometerstände, und setzt

$$\varphi = \frac{\mathfrak{p}'}{\mathrm{p}} = {}^1/_2\left(\frac{\sigma'}{b'} + \frac{\sigma''}{b''}\right)$$

so geht der Ausdruck Nr. 322 über in

$$h = 18404^{m},9\,(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)(1 + {}^3/_8\,\varphi)\left(1 + 0{,}003665\,\frac{T + t}{2}\right) \times \left[\log\frac{B}{b} - 0{,}00008\,.\,(T' - t') + 0{,}86859\,.\,\frac{h}{r}\right] \qquad (323)$$

wenn die Luft- und Quecksilbertemperaturen in Centigraden eingesetzt werden; er wird aber für Temperaturen nach Réaumur:

$$h = 18404^{m},9\,(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)(1 + {}^3/_8\,\varphi)\left(1 + 0{,}00458\,.\right.$$
$$\left.\frac{T + t}{2}\right) \times \left[\log \frac{B}{b} - 0{,}0001\,.\,(T' - t') + 0{,}86859\,.\,\frac{h}{r}\right]. \qquad (324)$$

Diese vollständigen Barometerformeln unterscheiden sich von den bisherigen: erstens durch die Berichtigung der Constanten k und α, zweitens durch Einführung des Feuchtigkeitsfactors $(1 + {}^3/_8\,\varphi)$, und drittens durch die Vermeidung jener willkürlichen Aenderungen der Constanten, welche (ausser Bessel) alle früheren Autoren über barometrische Höhenmessungen in der Absicht vorgenommen haben, eine grössere Uebereinstimmung der letzteren mit trigonometrischen Höhenmessungen zu bewirken.[1]

§. 159. Aufgabe. Die Barometerformel so umzugestalten, dass sie eine bequeme Rechnung gestattet, und Tafeln für diese Rechnung herzustellen.

Zur schnellen Berechnung des Höhenunterschieds zweier Stationen, an denen gleichzeitige Baro- und Thermometerbeobachtungen gemacht wurden, bedient man sich gewöhnlich der drei hypsometrischen Tafeln von Gauss, welche allgemein bekannt sind. Da aber diese Tafeln auf ungenauen Werthen der Constanten k und α, sowie auf der Annahme eines mittleren Feuchtigkeitszustands der Atmosphäre und einer mittleren Meereshöhe der unteren Station beruhen, so können dieselben gegenwärtig nicht mehr genügen und müssen daher durch neue ersetzt werden. Wir haben diese Tafeln umgearbeitet und durch drei weitere vermehrt, aus denen $\log(1 + {}^3/_8\,\varphi)$ entnommen werden kann. Diese Umarbeitung setzte folgende Umwandlung der Formel Nr. 324 voraus.

Man kann nämlich zunächst die Gl. 324 mit 0,86859 multipliciren und mit dem Werthe von $r = 6366740^{m}$ dividiren, wodurch man mit Hilfe einer erlaubten Abkürzung der rechten Seite der Gleichung erhält:

$$0{,}86859\,.\,\frac{h}{r} = \frac{0{,}86859}{6366740}\,.\,18404{,}9\,(1 + 0{,}00229\,(T + t))\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right]$$

Hiermit wird der letzte Factor des Ausdrucks Nr. 324

$$\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000} + 0{,}86859\,\frac{h}{r}\right] = \left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right](1{,}0025 + 0{,}0000057\,(T + t))$$

und folglich (für Meter und Réaumur'sche Temperaturgrade):

$$\log h = \log 18404{,}9 + \log(1{,}0025 + 0{,}0000057\,(T + t)) + \log(1 + 0{,}00229$$

[1] Vor fünf Jahren hat Herr R. Radau in Paris in die vorstehende Formel wieder einige Abkürzungen eingeführt, indem er die beiden Factoren der Temperatur und der Feuchtigkeit zu einem einzigen vereinigte, die Reduction der beobachteten Barometerstände auf Null in sinniger Weise vereinfachte, $h\,(2z + h) = z'^2 - z^2$ und $z' = 18382\,(\log 762 - \log b)$, $z = 18382\,(\log 762 - \log B)$ setzte. Es würde indessen hier zu weit führen, alle diese Abkürzungen näher zu erläutern; man findet sie begründet in der Abhandlung »Sur la formule barometrique« im Moniteur scientifique-Quesneville, 176e livraison du 15 avril 1864.

$$(T + t)) + \log(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi) + \log\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right) + \log(1 + {}^3/_8 \varphi)$$
$$+ \log\left[\log.\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right]. \qquad (325)$$

Die ersten drei Glieder dieses Ausdrucks für log h sind nach Gauss's Vorgange in unserer ersten hypsometrischen Tafel (Nr. VIII der Sammlung von Tafeln) enthalten. Den Eingang dieser Tafel bildet die Summe $T + t$ der Lufttemperaturen. Die mit A bezeichnete Verticalspalte gibt die Summe der drei ersten Logarithmen, wenn h in Metern, die mit A′ bezeichnete, wenn h in Pariser Fuss gesucht wird.

Der vierte Logarithmus, nämlich $\log(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi) = \log G$ findet sich in der zweiten Tafel (Nr. IX d. S.), welche mit der von Bessel übereinstimmt. Das Argument ist hier die geographische Breite ψ der Stationen.

Die dritte Tafel (Nr. X d. S.) gibt das fünfte Glied oder $\log\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)$.

Die vierte Tafel (Nr. XI d. S.) enthält alle den Temperaturen von -16^0 bis $+26^0$ R. entsprechenden Spannungen des Wasserdampfs und dient also dazu, für jede am Psychrometer beobachtete Nasskälte t_1 den zugehörigen Dampfdruck σ' sowohl in Pariser Linien als in Millimetern zu finden.

In der fünften Tafel (Nr. XII d. S.) sind die Werthe des Glieds $\mu(t - t_1)b$ der August'schen Psychrometerformel

$$\sigma = \sigma' - \mu(t - t_1)b$$

enthalten, in welcher σ den Dunstdruck der feuchten Luft, t deren Temperatur und b den Barometerstand bezeichnet. Man kann aus dieser Tafel den Werth von $\mu(t - t_1)b$ und mit Hilfe der vorstehenden Formel und dem aus Taf. XI genommenen Werthe von σ' den von σ sowohl in Pariser Linien als in Millimetern finden.

Die sechste Tafel (Nr. XIII d. S.) enthält endlich die Werthe von $\log(1 + {}^3/_8 \varphi)$, und man findet diese, wenn man mit dem Mittelwerthe des Dunstdrucks an den beiden Stationen in die oberste Horizontalreihe und mit dem Mittel der Barometerstände in die erste Verticalreihe eingeht.

§. 160. **Aufgabe. Mit Hilfe der neuen hypsometrischen Tafeln den Höhenunterschied zweier Stationen zu berechnen, für welche folgende Grössen gegeben sind:**

Höhe der unteren Station über dem Meere oder $z = 815^m{,}36$;
Geographische Breite der Mitte beider Stationen oder $\psi = 47^0\,40'$;
Barometerstände: $B = 307''',43$, $b = 270''',10$;
Quecksilbertemperaturen: $T' = 12^0{,}5$ R, $t' = 5^0{,}7$ R;
Lufttemperaturen: $T = 10^0{,}9$ R, $t = 4^0{,}9$ R;
Nasskälten der Psychrometer: $T_1 = 9^0{,}6$ R, $t_1 = 4^0{,}8$ R.

Man berechnet zuerst das letzte Glied des Ausdrucks Nr. 325, nämlich

$$\log\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right] = \log u$$

fügt hierzu die Summe A der drei ersten Glieder, welche die erste Tafel mit dem Eingange T + t liefert; dazu kommt das vierte Glied aus Tafel 2 mit dem Argument ψ; hierzu das fünfte aus Tafel 3, und endlich das sechste, welches die Tafeln 4 bis 6 ergeben. Die Summe aller dieser Glieder ist log h, zu dem also nur noch die Zahl h aus den Logarithmentafeln zu suchen ist. Die Rechnung stellt sich folgendermassen:

$$\log B = \log 307''',43 = 2{,}48775 \qquad T' = 12^0{,}5$$
$$\log b = \log 270''',10 = 2{,}43152 \qquad t' = 5^0{,}7$$
$$0{,}05623 \qquad 6^0{,}8$$
$$-\ 68$$
$$u = 0{,}05555$$

$$\log u = 8{,}74468 - 10$$
$$A = 4{,}28148 \quad . \ . \quad (1.\ \text{Taf. Arg.}\ T + t = 15^0{,}8)$$
$$3{,}02616$$
$$-\ 11 \quad . \ . \quad (2.\ \text{Taf. Arg.}\ \psi = 47^0\ 40')$$
$$\log h_1 = 3{,}02605$$
$$+\ 18 \quad . \ . \quad (3.\ \text{Taf. Arg.}\ h_1 = 3\ \text{und}\ z = 800^m)$$
$$+\ 204 \quad . \ . \quad (4.\ 5.\ 6.\ \text{Taf. mit den Arg.}\ T_1, t_1, B, b\ \text{und}\ 3''',64\ \text{und}\ 290''')\ [1]$$
$$\log h = 3{,}02827;\ h = 1067^m{,}26;\ h + z = 1882^m{,}62.$$

§. 161. **Aufgabe. Einen Näherungsausdruck für den Feuchtigkeitsfactor der Barometerformel für den Fall, wo keine Psychrometerbeobachtungen vorliegen, aufzustellen.**

Bei genauen Barometermessungen hat man den Factor $(1 + {}^3/_8\,\varphi)$ auf die in den vorausgehenden Paragraphen beschriebene Weise und mit Anwendung unserer hypsometrischen Tafeln 4, 5, 6 in Rechnung zu bringen; wenn aber Barometermessungen ohne Psychrometerbeobachtungen zu berechnen sind, also der genannte Feuchtigkeitsfactor nicht auf Grund besonderer Messungen bestimmt werden kann, so darf man ihn doch keineswegs der Einheit gleich setzen, was auf die Luftfeuchtigkeit keine Rücksicht nehmen hiesse, sondern muss ihn mit einem gewissen Mittelwerthe, welcher der Jahreszeit der Beobachtung entspricht, in Rechnung bringen, wie ja auch Laplace, Gauss, Poisson u. A. nur die mittlere Feuchtigkeit der Atmosphäre berücksichtigten, indem sie sowohl den barometrischen als den Temperatur-Coefficienten um so viel vergrösserten, als nothwendig war, um sie mit den Ramond'schen Höhenmessungen in Uebereinstimmung zu bringen.

[1] Die Berechnung des sechsten Glieds oder des Werths von $\log (1 + {}^3/_8\,\varphi)$ geschieht folgendermassen: Man sucht den mittleren Dunstdruck für beide Stationen. Nach der vierten Tafel (Nr. XI) ist σ' für die untere Station = 4''',620 und für die obere = 3''',076; nach der fünften Tafel (Nr. XII) aber $\mu\,(t - t_1)\,b$ für die untere Station = 0''',390 und für die obere = 0''',027, daher σ für unten = 4,620 − 0,390 = 4''',230 und für oben = 3,076 − 0,027 = 3''',049, folglich der gesuchte Dunstdruck = ½ (4,230 + 3,049) = 3''',64. Ferner ist ½ (B + b) = 288''',77, wofür man hier auch 290''' setzen kann. Mit den Argumenten 3''',64 und 290''' liefert endlich die sechste Tafel

$$\log (1 + {}^3/_8\,\varphi) = 0{,}00168 + 0{,}00034 + 0{,}00002 = 0{,}00204,$$

wie oben angenommen ist.

Wenn man nun weiss,[1] dass der Dunstdruck in unserem Klima sich ziemlich regelmässig ändert, d. h. vom Januar bis Mai von etwa 4 bis 8^{mm} steigt, im Juni, Juli und August 10 bis 11^{mm} beträgt und dann nach und nach wieder auf 4^{mm} fällt, so kann man, wie es Prof. Jordan gethan hat, nach graphischer Ausgleichung der von den meteorologischen Stationen gelieferten monatlichen Mittel der Luftfeuchtigkeit, nachstehende Tafel (IV) berechnen, welche bei mangelnden Psychrometerbeobachtungen unsere oben genannten drei Tafeln zu ersetzen geeignet ist. Mit dieser Tafel würde man das in §. 160 berechnete Beispiel, wenn die Nasskälte T_1 und t_1 unbekannt, dafür aber die Beobachtungszeit (August) bekannt wäre, wie folgt zu Ende führen. Nach Einrechnung des Logarithmus aus der 3. Tafel ist $\log h_1 = 3{,}02623$, und da $\frac{1}{2}(B + b) \doteq 650^{mm}$, so muss nach der Ersatz-Tafel (IV) zu diesem Logarithmus noch der von $\log(1 + \frac{3}{8}\varphi) = 0{,}00275$ hinzugefügt werden, wodurch $\log h_1 = 3{,}02898$ und $h_1 = 1069^m$ statt $1067^m{,}3$ wird. Hätte man die Tafel (IV) gar nicht benützt, so würde man für trockene Luft $h_1 = 1062^m{,}3$ gefunden haben.

Hypsometrische Ersatztafel (IV), welche einen Mittelwerth von $\log(1 + \frac{3}{8}\varphi)$ liefert.

(Die Logarithmen, in Einheiten der fünften Decimale, gelten für die Mitte des betreffenden Monats, und die horizontalen Eingänge bezeichnen das Mittel aus dem an der unteren und oberen Station beobachteten Barometerstande B und b.)

Monat.	Mittlerer Barometerstand in Millimetern.			
	500	600	700	760
Januar	0,00130	0,00110	0,00090	0,00090
Februar	130	110	90	90
März	140	120	100	90
April	180	150	130	120
Mai	230	200	160	150
Juni	300	250	210	200
Juli	330	290	250	230
August	330	300	250	240
September	320	270	230	210
October	260	220	190	170
November	200	170	140	130
December	160	130	110	100

§. 162. Regeln, welche bei barometrischen Höhenmessungen zu beobachten sind.

Zuverlässige Höhenmessungen erfordern zwei vorzügliche, mit einem Normalbarometer verglichene Reisebarometer und zwei August'sche Psychro-

[1] Vergl. Schmid, Lehrbuch der Meteorologie, 1860, S. 622 und Jordan, Taschenbuch der practischen Geometrie, 1872, S. 191.

meter. Diese Instrumente werden an den beiden Stationen so aufgestellt, dass sie gegen das directe Sonnenlicht und so viel als möglich gegen die Strahlung des Bodens oder der Wände, an welche man sie manchmal hängt, geschützt sind. Den nöthigen Schatten gewähren am besten grosse hohe Schirme, die Strahlung gegen die Thermometer vermindern am meisten kleine auf Pfählen errichtete Tische von 1,5 bis 2 Meter Höhe.

Die Aufstellung soll mindestens eine halbe Stunde vor Beginn der regelmässigen Beobachtungen, welche durchaus gleichzeitig stattfinden müssen, vollendet sein, und man soll die Beobachtungszeiten mindestens 15 Minuten von einander abstehen lassen, damit das Ablesen der Instrumente mit der nöthigen Sorgfalt geschehen kann.

Das am Barometer befindliche Thermometer, welches die Temperatur des Quecksilbers anzeigt, wird vor dem Barometerstande abgelesen, damit die Körperwärme den Thermometerstand nicht erhöht. Das Psychrometer gibt zugleich die Lufttemperatur und die Nasskälte. Genaue Aufzeichnung der Ablesungen versteht sich von selbst. Die hier gegebene Einrichtung der Beobachtungsjournale wird genügen.

Station N.

Beobachtungszeit.			Psychrometer.		Barometer.			Windrichtung.	Bemerkungen.
Monat	Tag.	St.	Trockn.	Feucht. Th.	Qu. Temp.	Non. I	Non. II.		
Aug.	20	8	10°,9	9°,6	12°,5	329''',40	21''',72	S W W	Himmel bedeckt.
"	"	8½	12,1	10,3	13,0	38	75	W	Wind sehr schwach.

Kann man nur wenige gleichzeitige Beobachtungen machen, so sollen dieselben wo möglich am Vormittage gegen 10 Uhr und am Nachmittage gegen 4 Uhr stattfinden, weil die Erfahrung lehrt, dass die aus diesen Beobachtungen abgeleiteten Höhenunterschiede am besten mit jenen übereinstimmen, welche man auf trigonometrischem Wege oder durch Nivelliren erhält. Man nimmt allgemein an, dass zu diesen Zeiten der Zustand der Atmosphäre mehr ins Gleichgewicht getreten sei; wir aber glauben, dass die Thermometer gegen 10 und 4 Uhr die Lufttemperaturen am richtigsten geben, weil der Einfluss der Bodenwärme auf sie um diese Zeiten am geringsten ist.

Ist dem Beobachter die Wahl der Stationen überlassen, so soll er wo möglich isolirte Punkte wählen und namentlich Thalabhänge, zumal in der Nähe grosser Gebirge, vermeiden, weil die längs dieser Abhänge häufig stattfindenden Luftströmungen nicht gleichmässig auf die an beiden Stationen aufgestellten Thermometer wirken. Jedenfalls dürfen die Stationen in horizontaler Richtung nicht zu weit auseinander liegen, damit die Aenderungen in dem Zustande der Atmosphäre nicht einseitig bloss auf einer Station fühlbar werden, und wohl auch aus dem Grunde, weil an südlich gelegenen

Punkten die drückende Luftsäule höher und folglich auch schwerer ist als an nördlichen Stationen, wenn diese auch mit jenen in einer Horizontalebene sich befinden.

Beobachtungen, welche bei starkem Winde oder vor Gewittern gemacht werden, geben in der Regel unrichtige Höhenunterschiede, da diese Ursachen schnelle und bedeutende, jedoch nicht immer gleichzeitige Aenderungen der Barometerstände hervorbringen. Solche Beobachtungen schliesst man daher mit Recht aus. Hat man dergleichen aber längere Zeit fortgesetzt, so wird man durch Vergleichung finden, dass in Thälern der Nordwind durchschnittlich ein Steigen, der Südwind ein Fallen des Barometers bewirkt, auf Bergspitzen jedoch oft das Entgegengesetzte stattfindet.

Da bei weit entfernten Stationen die Aenderungen der Barometerstände sehr häufig ebenfalls nicht gleichzeitig erfolgen, und da anzunehmen ist, dass bei grossen Breitendifferenzen der Stationen auch bei ganz ruhiger Luft die drückenden Luftsäulen ungleich hoch sind, also die Barometerstände nicht mehr unter der Voraussetzung gemessen werden, welche bei der Entwickelung der Barometerformel gemacht wurde: so soll man barometrische Höhenmessungen nicht zwischen weit entfernten Stationen und namentlich nicht zwischen Stationen, deren Breiten sehr verschieden sind, vornehmen. Als grösste Entfernungen dürften vielleicht zwei deutsche Meilen und beziehungsweise acht Bogenminuten in dem Falle anzusehen sein, dass nur einige wenige gleichzeitige Beobachtungen zur Bestimmung des Höhenunterschieds zweier Punkte dienen sollen. Diese Maximalentfernungen können aber auf fünf Meilen oder zwanzig Bogenminuten ausgedehnt werden, wenn man den Höhenunterschied zweier Orte aus jahrelang fortgesetzten baro- und thermometrischen Beobachtungen abzuleiten hat.

§. 163. **Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen.** Ueber diese Frage herrschen die verschiedenartigsten Ansichten: Einige schreiben diesen Messungen eine sehr grosse Genauigkeit zu und empfehlen sie selbst zu Nivellementen für Flüsse; Andere sprechen ihnen dagegen jede Zuverlässigkeit ab und verwerfen das Barometer als Höhenmessinstrument; die Mehrzahl aber bekennt sich weder zu dieser noch jener extremen Ansicht und wendet die barometrischen Höhenmessungen an, ohne viel nach dem Grade ihrer Genauigkeit zu fragen; Wenige nur haben sich auf Grund eigener Messungen hierüber geäussert. Der Verfasser fand sich hierdurch im Jahre 1857 veranlasst, eine Reihe von Beobachtungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen anzustellen und deren Ergebnisse in der bereits oben (§. 157) angeführten Schrift, die hier theilweise wieder benützt wird, zu veröffentlichen.

Die Beobachtungsfehler, welche von wesentlichem Einflusse auf das Resultat der Höhenbestimmung sind, können gemacht werden: bei der Messung der Lufttemperaturen (T, t), der Quecksilbertemperaturen (T', t'), der Barometerstände (B, b), und es können diese Fehler, welche wir mit dT, dt u. s. w. bezeichnen wollen, sowohl positiv als negativ sein. Für den

vorliegenden Zweck kann man die Höhe zwischen zwei Stationen genau genug durch die Gleichung ausdrücken:

$$h = k\,(1 + \alpha\,\tau)\,(\log B - \log b - \gamma\,\tau')$$

worin die Constante $k = 18404^{m},9$ und der Coefficient $\alpha = 0{,}0023$ für $\frac{1}{2}\,^{0}$ R, ferner $\tau = T + t$, $\tau' = T' - t'$ und $\gamma = 0{,}0000978 = 0{,}0001$ ist, wenn τ' in achtzigtheiligen Graden ausgedrückt ist. Diese Gleichung liefert, wenn man sie erst logarithmisirt und dann nach den oben bezeichneten Veränderlichen differentiirt:

$$\frac{d\,h}{h} = \frac{\alpha\,.\,d\,\tau}{1 + \alpha\,\tau} + \frac{d\,(\log B - \log b - \gamma\,\tau')}{\log B - \log b - \gamma\,\tau'}$$

oder, wenn man $\log B - \log b - \gamma\,\tau' = u$ und den Modul des briggischen Logarithmensystems $= m$ setzt:

$$\frac{d\,h}{h} = \frac{\alpha\,.\,d\,\tau}{1 + \alpha\,\tau} + \frac{m}{u}\left(\frac{d\,B}{B} - \frac{d\,b}{b} - \frac{\gamma\,d\,\tau'}{m}\right).$$

Berücksichtigen wir, dass $1 + \alpha\,\tau$ von 1 nur wenig verschieden ist und dass $d\,\tau = d\,T + d\,t = \pm\,2\,d\,t$ gesetzt werden kann, so wird das erste Glied dieses Ausdrucks $= 0{,}0046\,.\,d\,t$; und wird quantitativ $d\,B = d\,b$ und $d\,T' = d\,t'$, qualitativ aber $d\,b$ dem $d\,B$ und $d\,t'$ dem $d\,T'$ entgegen gesetzt, so findet sich der grösste relative Fehler:

$$\frac{d\,h}{h} = \pm\left(0{,}0046\,.\,d\,t + \frac{m}{u}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right)d\,b + \frac{2\,\gamma}{u}\,d\,t'\right) \qquad (326)$$

und, wenn man diese Gleichung mit $h = k\,(1 + \alpha\,\tau)\,u$ multiplicirt, der grösste absolute Fehler:

$$d\,h = \pm\,k\,(1 + \alpha\,\tau)\left(2\,\alpha\,d\,t\,.\,\log\frac{B}{b} + m\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right)d\,b + 2\,\gamma\,d\,t'\right). \qquad (327)$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Der relative Fehler der barometrischen Höhenbestimmung wächst mit den Fehlern, welche in der Messung der Temperaturen und der Barometerstände gemacht werden.

2) Die Fehler in den Barometerständen und den Quecksilbertemperaturen wirken um so nachtheiliger, je kleiner der zu bestimmende Höhenunterschied ist.

3) Die fehlerhafte Bestimmung der Lufttemperatur gibt einen und denselben relativen Fehler für grosse und kleine Höhen; ihr Einfluss ist also bei kleinen Höhen bedeutender als bei grossen.

4) Unter sonst gleichen Umständen wird der relative Fehler um so grösser, je höher die untere Station über dem Meere liegt.

5) Der absolute Fehler der Höhe wächst wohl auch mit der Grösse der Fehler $d\,b$, $d\,t$, $d\,t'$ und mit der Höhe h, aber dieser letzteren nicht proportional, sondern in geringerem Masse als die Höhe.

So findet man z. B.

für $B = 322'''$, $b = 300'''$, $T + t = 24^{0}$ R die Höhe $h = 597^{m}$

und für $B = 322'''$, $b = 250'''$, $T + t = 10^{0}$ R die Höhe $h = 2075^{m}$.

Ist nun in beiden Messungen $d\,b = 0''',1$ und $d\,t = d\,t' = 0^{0},5$ R, so erhält

man den grössten absoluten Fehler der Höhe 597^m = 8^m,74 und den der Höhe 2075^m = 12^m,43, während dieser letztere = 30^m,39 sein müsste, wenn die absoluten Fehler den Höhen proportional wären.

Der absolute oder relative Fehler einer einzigen Messung kann, ohne dass die Beobachter etwas versäumten, sehr bedeutend werden:

a) weil die Genauigkeit der Ablesung der Barometerstände nicht wohl grösser als 0''',1 anzunehmen ist und die Fehler d B und d b ebenso oft ungleiche als gleiche Zeichen haben können;

b) weil die Temperatur der Luft wegen der Wärmestrahlung des Erdbodens nicht sicher bestimmt werden kann und die Fehler d T und d t namentlich am Morgen und Abend, (sowie zur Zeit des Wärmemaximums (gegen 2 Uhr) sogar mehr als 2^0 R betragen und qualitativ gleich sein können; endlich

c) weil die Thermometer, welche die Temperatur des Quecksilbers anzeigen sollen, bei Reisebarometern selten in dem Quecksilber selbst stecken, daher auch hier die Fehler d T', d t' leicht 1^0 R betragen und einander entgegengesetzt sein können.

Unsere, im August 1857 am grossen Miesing im bayerischen Hochgebirge angestellten correspondirenden Messungen ergaben in dieser Beziehung folgende Resultate:

1) Unter 100 Messungen betrugen die grössten Fehler in der Strecke

zwischen	I	und	III	auf	1850',8	Höhe:	+ 31',5	oder 0,0170
„	III	„	V	„	1809,0	„	— 39,6	„ 0,0219
„	I	„	V	„	3659,8	„	+ 46,4	„ 0,0127.

2) Die durchschnittlichen Fehler dieser 100 Messungen waren:

zwischen	I	und	III	auf	1850',8	Höhe:	± 10',1	oder 0,0055
„	III	„	V	„	1809,0	„	± 11,4	„ 0,0063
„	I	„	V	„	3659,8	„	± 15,7	„ 0,0043.

3) Die Fehler der arithmetischen Mittel aus 100 Messungen betrugen:

zwischen	I	und	III	auf	1850',8	Höhe:	± 1',3	oder 0,00070
„	III	„	V	„	1809,0	„	± 1,5	„ 0,00082
„	I	„	V	„	3659,8	„	± 2,0	„ 0,00053.

4) Die Fehler der arithmetischen Mittel aus je 4 in Zeit von 1½ Stunden angestellten correspondirenden Messungen waren in der Strecke:

I—III	von 9—10½ Uhr Vorm.	± 6',6	und von 3—4½ Uhr Nachm.	= ± 9',4
III—V	„ „ „ „	± 7,0	„ „ „ „ „	= ± 5,5
I—V	„ „ „ „	± 13,4	„ „ „ „ „	= ± 7,5.

Dieses letztere Ergebniss, verbunden mit der Beobachtung, dass in allen anderen Stunden die Fehler grösser waren als zwischen 9—10½ und 3—4½ Uhr, veranlasst uns zu dem Ausspruche, dass vier oder fünf gleichzeitige Beobachtungen, auf zwei Stationen von geringer horizontaler Entfernung, bei guter Witterung und gegen 10 oder 4 Uhr in Zwischenräumen von etwa 20 Minuten angestellt, den Fehler des arithmetischen Mittels bei 500 Meter Höhenunterschied auf etwa 2 Meter, und bei 1000 Meter Höhen-

unterschied auf etwa 3 Meter einschränken werden. Wir sind demnach der Meinung, dass sorgfältig angestellte, correspondirende Barometermessungen noch immer ein sehr zu empfehlendes Mittel sind für die Bestimmung der Höhen von bewohnten Orten, Bergspitzen, Gebirgsübergängen, Quellen, See'n, Fundorten von Pflanzen und Petrefacten, Grenzen geologischer Formationen, ferner zu vorläufigen Terrainuntersuchungen behufs der Anlage von Strassen und Eisenbahnen, und endlich selbst zur Darstellung der Gebirge mittels Horizontalcurven; wir sind aber auch entschieden der Ansicht, dass überall da, wo Höhenunterschiede genauer als in den vorher bezeichneten Fällen bestimmt sein müssen, dieses nur durch trigonometrische und insbesondere nivellatorische Messungen geschehen kann.

§. 164. **Aufgabe. Die gebräuchlichsten Methoden der Höhenmessung mit dem Federbarometer darzustellen.**

A. Berechnung der Höhe nach der Formel für Quecksilber-Barometer.

Die Formel (180) des ersten Bands, womit man eine bei der Temperatur t^0 am Federbarometer von Naudet gemachte Ablesung B auf die der Temperatur 0^0 entsprechende Länge A_0 der Quecksilbersäule des Normalbarometers zurückführen kann, gestattet die Anwendung der Barometerformel (324) auf die Höhenmessung mit dem Federbarometer unter folgenden Abänderungen. Zunächst ist das vorletzte Glied 0,0001 (T' — t') des letzten Factors, welches die Verbesserung der Quecksilbersäule wegen der Temperatur betrifft, und dann auch das letzte Glied, welches sich auf die Abnahme des Quecksilbergewichts mit der Höhe bezieht, hier null; ausserdem kann man den Factor $(1 + {}^3/_8\, \varphi)$, welcher die Luftfeuchtigkeit darstellt, die aber in dem vorliegenden Falle nicht beobachtet wird, der Einheit gleich setzen. Hiernach geht die Formel (324) in die folgende über:

$$h = 18404^m{,}9\,(1 + 0{,}00229\,(T + t))\,(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)$$
$$(1 + (2z + h) : r) \log \frac{A_0}{a_0} \qquad (328)$$

wobei der Barometerstand auf der unteren Station mit A_0, der auf der oberen mit a_0 bezeichnet ist. In den meisten Fällen wird man auch den dritten und vierten Factor, welche sich auf die Aenderung der Schwerkraft mit der geographischen Breite und der lothrechten Höhe beziehen, weglassen können; behalten wir sie aber vorläufig bei, so kann man mit unseren drei ersten hypsometrischen Tafeln (Nr. VIII, IX, X des Anhangs) die Höhe h sehr einfach berechnen, indem die erste mit dem Eingange T + t (Summe der Lufttemperaturen) die Summe der Logarithmen der beiden ersten Factoren,[1] die zweite die Verbesserung wegen der geographischen Breite und die dritte wegen des Höhenunterschieds beider Stationen gibt.

[1] Nach Formel (325) steckt in der Summe A allerdings auch noch der Logarithmus, welcher dem vorhin erwähnten Gliede $0{,}86859\,\frac{h}{r}$ entspricht, das hier null ist; wegen der Geringfügigkeit des Einflusses dieses Glieds auf A kann man jedoch die bisherige erste Tafel ohne Bedenken beibehalten.

Ist z. B. am Polytechnikum in München, wofür $z = 516^m,7$ und die Breite $\psi = 48^0\,12'$, der Barometerstand $A_0 = 716^{mm},15$, $T = 16^0,9$ R, dann an der Höhenmarke auf der Eisenbahnstation Sauerlach $a_0 = 707^{mm},74$ und $t = 15^0,7$ R beobachtet worden, so beträgt $T + t = 32^0,6$ R und man hat, um h zu finden, folgende Rechnung anzustellen:

$$\begin{aligned}
\text{Es ist } \log A_0 &= \log 716{,}15 = 2{,}855\cdot0021 \\
\log a_0 &= \log 707{,}74 = 2{,}849\cdot8737 \\
u = \log A_0 - \log a_0 &= 0{,}005\cdot1284 \\
\log u &= 7{,}709\cdot98 \\
\text{Aus Tafel VIII mit } T + t: \quad A &= 4{,}297\cdot36 \\
&\ 2{,}007\cdot34 \\
\text{Aus Tafel IX mit } \psi = 48^0: &\ -12 \\
\log h' &= 2{,}007\cdot22 \\
\text{Aus Tafel X mit } \log h' = 2 \text{ u. } z = 500: &\ +8 \\
\log h &= 2{,}007\cdot30
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Höhe $h = 101^m,695$, und mit Weglassung der Verbesserungen aus IX und X: $h = 101,705$: man kann also hier unbedenklich das Product $(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)(1 + (2z + h) : r) = 1$ setzen und die abgekürzte Formel anwenden:

$$h = 18404^m,9\,(1 + 0{,}0029\,(T + t))\log\frac{A_0}{a_0} \qquad (329)$$

oder wenn man $\log A_0 - \log a_0 = u$ schreibt und A aus der ersten hypsometrischen Tafel nimmt:

$$\log h = A + \log u. \qquad (330)$$

Nach dieser Formel sind die nachfolgenden Beobachtungen berechnet, welche der Verfasser behufs eines Versuchs über die Genauigkeit der Höhenmessung mit dem Federbarometer in den ersten Tagen des Octobers 1872 angestellt und theilweise schon auf Seite 416 des ersten Bands mitgetheilt hat. Die gleichzeitigen Beobachtungen in München wurden vom Diener der geodätischen Sammlung, Mechaniker Bürker, gemacht und sind auf die Cote der steinernen Sockelbank am Mittelbau des Polytechnikums[1], welche $345^m,33$ beträgt und $516^m,67$ Meereshöhe entspricht, reducirt.

Für die Centralstation München und die übrigen Stationen ergaben sich als Mittel aus je 4 in Zeitabständen von 15 Minuten gemachten Ablesungen folgende Beobachtungsdata:

Nr.			mm	C		mm	C
1	Octbr. 2, Vorm.	München	B=716,15;	T=20⁰,2	Gr. Hessellohe	b=712,44;	t=18⁰,3
2	„ 2, Mitt.	„	B=716,15;	T=21,1	Sauerlach	b=707,74;	t=19,6
3	„ 2, Nachm.	„	B=715,88;	T=15,6	Holzkirchen	b=701,53;	t=14,4
4	„ 4, Nachm.	„	B=712,50;	T=15,6	Aibling	b=715,30;	t=16,1
5	„ 5, Vorm.	„	B=716,56;	T=12,7	Rosenheim	b=722,57;	t=13,2
6	„ 5, Nachm.	„	B=718,88;	T=14,9	Fischbach	b=722,79;	t=15,1

[1] Vergl. »Das bayerische Präcisionsnivellement« zweite Mittheilung von C. M. Bauernfeind, 1872, S. 29, Fixpunkt Nr. 747.

Aus diesen Daten berechneten wir nachstehende Tabelle:

Nr.	Auf der Strecke	beträgt der Höhenunterschied nach der Barometermessung	beträgt der Höhenunterschied nach dem Präcisions-Nivellement	und die Differenz zwischen beiden:
		m	m	m
1	München-Gr. Hessellohe	+ 44,62	+ 45,50	— 0,88
2	„ -Sauerlach	+101,71	+102,68	— 0,97
3	„ -Holzkirchen	+171,20	+169,46	+ 1,74
4	„ -Aibling	— 33,31	— 34,19	+ 0,88
5	„ -Rosenheim	— 70,03	— 67,73	— 2,30
6	„ -Fischbach	— 45,85	— 48,70	+ 2,85

Unter der Voraussetzung, welche gestattet ist, dass die durch das Präcisionsnivellement erhobenen Höhenunterschiede den barometrisch gemessenen gegenüber als absolut richtig gelten können, folgt aus denselben der mittlere Fehler einer aus 4 Beobachtungen zusammengesetzten Messung:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}} = \pm 1^{m},856$$

und der mittlere Fehler einer einzigen vollständigen Messung:

$$m' = m\sqrt{4} = \pm 3^{m},712.$$

Wollte man die am 5. October angestellten Beobachtungen ausschliessen, weil an diesem Tage der Barometerstand um 4^{mm} sich änderte, so würde sich für die übrigen Messungen ein mittlerer Fehler $m = \pm 1^{m},356$ und $m' = m\sqrt{4} = \pm 2^{m},712$ ergeben. Nach dem ersten Resultate, das der Praxis besser entsprechen dürfte als das zweite, könnte man also aus 4 in etwa einer Stunde angestellten Beobachtungen, zu denen an einer Centralstation ebenso viele correspondirende Beobachtungen gemacht werden, die Höhe eines Punkts über dieser Station bis auf etwa 2^{m} genau finden, vorausgesetzt, dass derselbe nicht mehr als etwa 200^{m} über und 75 Kilometer von der Station liegt.

Wie wichtig die correspondirenden Beobachtungen sind, ergibt am besten ein Vergleich der am 5. October für Rosenheim und Fischbach erhaltenen Aufschreibungen: wollte man Fischbach aus Rosenheim berechnen, so fände man für diese Station eine tiefere Lage, während Fischbach in Wirklichkeit 19^{m} über Rosenheim liegt: es ist eben in der Zwischenzeit der Beobachtungen ein Steigen des Barometers um etwa $2^{mm},3$ eingetreten, das in diesem Falle nicht berücksichtigt würde.

B. Höhenmessung mit dem Federbarometer durch Interpolation.

Wenn es sich lediglich um kleine Höhenunterschiede und geringe Horizontalabstände handelt, so kann man in der Formel (328) nicht bloss die

beiden Factoren $(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)$ und $(1 + (2z + h) : r)$ weglassen, sondern auch in dem zweiten Factor für $T + t$ das doppelte Mittel der auf mehreren Punkten 0, 1, 2, 3 in kurzen Zeitintervallen abgelesenen Lufttemperaturen T_0, T_1, T_2, T_3 einsetzen, so dass, wenn man die auf einander folgenden Ablesungen auf dem Federbarometer mit A_0, A_1, A_2, A_3, die zugehörigen Höhenunterschiede mit h_1, h_2, h_3 bezeichnet und $A_0 - A_1 = u_1$ $A_1 - A_2 = u_2$, $A_2 - A_3 = u_3$ setzt, folgende Gleichungen erhalten werden:

$$h_1 = C \log \frac{A_0}{A_1} = C \log\left(1 + \frac{u_1}{A_1}\right) = C\,M\,\frac{u_1}{A_1}$$

$$h_2 = C \log \frac{A_1}{A_2} = C \log\left(1 + \frac{u_2}{A_2}\right) = C\,M\,\frac{u_2}{A_2}$$

$$h_3 = C \log \frac{A_2}{A_3} = C \log\left(1 + \frac{u_3}{A_3}\right) = C\,M\,\frac{u_3}{A_3}$$

in denen $C = 18404^m{,}9\,(1 + 0{,}00229\,(T + t))$, $T + t = \frac{1}{2}(T_0 + T_1 + T_2 + T_3)$ und $M =$ dem Modul des briggischen Logarithmensystems ist. Aus diesen Gleichungen folgt die Proportion

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{u_1}{A_1} : \frac{u_2}{A_2} : \frac{u_3}{A_3} \tag{331}$$

welche erkennen lässt, wie man die Höhenunterschiede h_1, h_2, h_3 aus den auf den Punkten 0, 1, 2, 3 gemachten Beobachtungen durch Proportional-Interpolation finden kann.

Benützen wir beispielsweise die oben angeführten am 2. October 1872 Vormittags zwischen 9 und 12 Uhr in München, Grosshesselohe und Sauerlach angestellten Beobachtungen:

$$A_0 = 716^{mm}{,}15 \qquad A_1 = 712^{mm}{,}44 \qquad A_2 = 707^{mm}{,}74$$
$$T_0 = \;\; 20^0{,}2\ C \qquad T_1 = \;\; 18^0{,}3\ C \qquad T_2 = \;\; 19^0{,}6\ C$$

so ist $T + t = \frac{2}{3}(T_0 + T_1 + T_2) = 39^0{,}4\ C = 31^0{,}5\ R$; ferner $u_1 = A_0 - A_1 = 3^{mm}{,}71$ und $u_2 = A_1 - A_2 = 4^{mm}{,}70$. Hiermit findet man zunächst $\log C$ aus der Tafel VIII mit dem Eingange $31^0{,}5\ R = 4{,}29634$, während $\log M = 9{,}63778 - 10$ ist. Man erhält somit

$$\log h_1 = \log (C\,M) + \log \frac{u_1}{A_1} = 1{,}65074 \text{ und hieraus } h_1 = 44^m{,}745$$

$$\log h_2 = \log (C\,M) + \log \frac{u_2}{A_2} = 1{,}75635 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad h_2 = 57{,}063.$$

Hiernach ist die Summe $h_1 + h_2 = 101^m{,}808$ und nach dem Präcisionsnivellement $= 102^m{,}68$; es bleibt also noch die Differenz von $0^m{,}872$ auf h_1 und h_2 im Verhältniss von $447 : 571$ zu vertheilen, d. h. es ist $h_1 = 45^m{,}13$ und $h_2 = 57^m{,}55$ zu setzen. Diese letzteren Werthe von h_1 und h_2 hätte man übrigens unmittelbar wie folgt finden können.

Es ist offenbar, wenn man $u_1 : A_1 = v_1$; $u_2 : A_2 = v_2$ und $u_3 : A_3 = v_3$ setzt:

$$H = h_1 + h_2 + h_3 = C\,M\,(v_1 + v_2 + v_3). \tag{332}$$

Wenn nun in einem gegebenen Falle die Brüche v_1, v_2, v_3 berechnet und

addirt werden, so soll $\log H = \log C M + \log (v_1 + v_2 + v_3)$ sein Ist dieses nicht der Fall, so denke man sich das Product C M noch mit einem Factor k multiplicirt, welcher die Gleichheit von H und $k\, C\, M\, (v_1 + v_2 + v_3)$ und also auch von $\log H$ und $\log k\, C\, M\, (v_1 + v_2 + v_3)$ herstellt. Dieser Factor k lässt sich somit aus der Gleichung

$$\log k = \log H - \log C\, M\, (v_1 + v_2 + v_3) \tag{333}$$

berechnen, und wenn er bestimmt ist, so wird

$$h_1 = k\, C\, M\, v_1;\quad h_2 = k\, C\, M\, v_2;\quad h_3 = k\, C\, M\, v_3.$$

In dem vorliegenden Falle ist $v_3 = 0$; $H = 102^m{,}68$; $v_1 = 0{,}005207$; $v_2 = 0{,}006641$; daher

$$\log k = 2{,}01149 - 2{,}00776 = 0{,}00373 \text{ und } k = 1{,}0086$$

$$h_1 = 45^m{,}13;\ h_2 = 57^m{,}55;\ h_1 + h_2 = 102^m{,}68 = H.$$

Hätte man das hier beschriebene Interpolationsverfahren auch noch auf den Punkt Holzkirchen, also nicht bloss auf einen grösseren Höhenunterschied ($H = 169^m{,}46$), sondern auch über einen grösseren Zeitraum für die Beobachtungen (Morgens 9 Uhr bis Abends 6 Uhr) ausdehnen wollen, so hätte sich, da für Holzkirchen $A_3 = 701^{mm}{,}53$ und $T_3 = 14^0{,}4$ C war, die Rechnung wie folgt gestellt:

$$T + t = \tfrac{1}{2}(T_0 + T_1 + T_2 + T_3) = 36^0{,}2\ C = 29^0\ R$$

$$\log C = 4{,}29401 \text{ nach Taf. VIII mit } T + t = 29^0\ R$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0{,}005207 + 0{,}006641 + 0{,}008852 = 0{,}0207$$

$$\log k = 2{,}22907 - 2{,}24776 = 9{,}98131 \text{ und } k = 0{,}95788$$

$$h_1 = 42^m{,}63;\ h_2 = 54^m{,}37;\ h_3 = 72^m{,}46;\ h_1 + h_2 + h_3 = 169^m{,}46 = H.$$

Die Unterschiede zwischen der barometrischen Höhenmessung und dem Präcisionsnivellement ergeben sich hiernach wie folgt:

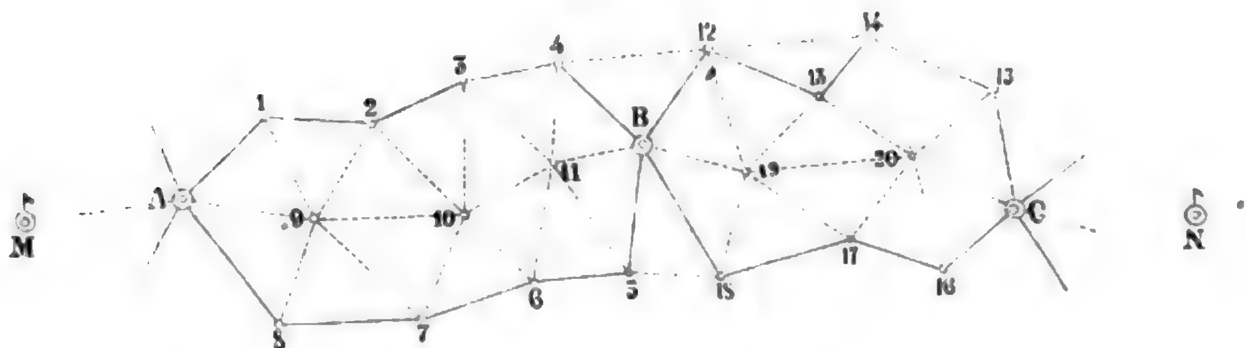
München-Grosshessellohe	$h_1 = 42^m{,}63$ Bar.	$= 45^m{,}50$ Niv.;	$\Delta = -2^m{,}87$
Grosshessellohe-Sauerlach	$h_2 = 54{,}37$ „	$= 57{,}18$ „ ;	$\Delta = -2{,}87$
Sauerlach-Holzkirchen	$h_3 = 72{,}46$ „	$= 66{,}78$ „ ;	$\Delta = +5{,}68.$

Diese Unterschiede sind somit weit grösser als vorhin für die Strecke München-Sauerlach und sprechen deutlich aus, dass man das Höhenmessen durch Interpoliren nur auf geringe Höhen anwenden darf und in kurzer Zeit ausführen muss.

Die Interpolationsmethode eignet sich namentlich zur Aufnahme durchschnittenen oder gebirgigen Terrains mittels Horizontalcurven, wenn für dieses Terrain nach einer oder mehr Richtungen Eisenbahn- oder Präcisions-Nivellemente bestehen, an die man die Barometermessungen anknüpfen und auf die man sie zurückführen kann. Die hier beschriebene Methode hat, richtig angewandt, den grossen Vorzug, dass sie keine gleichzeitigen Beobachtungen mit einem zweiten Federbarometer oder einem Quecksilberbarometer, ja nicht einmal eine Vergleichung des Federbarometers mit dem Normalbarometer erfordert; allein sie setzt viele und gut bestimmte Höhen-Fixpunkte, also das voraus, was in der Regel nicht vorhanden ist, wenn man ein Terrain in Bezug auf seine Tauglichkeit für eine Strasse oder Eisenbahn erst kennen lernen will.

In diesem letzteren Falle bleibt nichts übrig, als für die vorhin erwähnten durch geometrisches Nivellement bestimmten Fixpunkte einen Ersatz dadurch zu schaffen, dass man dergleichen Punkte durch vielfältige Beobachtungen mit dem Federbarometer und Vergleichen derselben mit gleichzeitigen Angaben von Quecksilberbarometern auf Standorten, deren Meereshöhe bekannt ist, herstellt und dann die übrigen Punkte zwischen diesen genauer bestimmten auf die eben angegebene Weise einschaltet.

Fig. 180.



Es seien z. B. in Fig. 180 M und N zwei Städte, deren Meereshöhe aus trigonometrischen Messungen oder aus lange fortgesetzten Barometerbeobachtungen bekannt sind, und auf denen die Beobachtungen am Quecksilber-Barometer noch immer fortgesetzt werden. Zwischen diesen Städten sei das Terrain auf eine gegebene Breite seiner Höhenlage nach darzustellen, und zwar auf Grund von Messungen, die mit zwei Federbarometern angestellt wurden. Beide Federbarometer seien vor der Messung unter sich und mit den Quecksilberbarometern in M und N verglichen, und werden nach der Aufnahme in gleicher Weise wieder untersucht. Die beiden Ingenieure, welche die verlangte Höhenaufnahme besorgen, seien auf dem Punkte A angelangt und machen daselbst auf ihren Instrumenten Nr. I und Nr. II die betreffenden Ablesungen, das Instrument Nr. II durchwandert hierauf die Punkte 1, 2, 10, 11, 3, 4, B, 5, 6, 7, 8, 9 und kommt nach entsprechender Zeit wieder in A an; alsdann macht das Instrument I, das bisher Standbarometer war und von Viertelstunde zu Viertelstunde beobachtet wurde, die Runde von A über B nach A, während das Instrument II jetzt die Function eines Standbarometers übernimmt. Ist Nr. I wieder in A eingetroffen, so sind die Beobachtungen für die Strecke A B geschlossen und werden nun für die folgenden Strecken B C, C D . . . in gleicher Weise wiederholt, bis man am Ende des darzustellenden Terrainbezirks angelangt ist. Dass die Höhen der Punkte A, B, C . . . wegen der grossen Zahl von Beobachtungen, welche auf ihnen angestellt wurden und denen gleichzeitige Beobachtungen der Standbarometer in M und N entsprechen, genauer gefunden werden können als die aller übrigen Punkte, bedarf wohl keines besonderen Nachweises.

Dass man die Beobachtungen zur Darstellung der Höhenverhältnisse des zwischen M und N eingeschlossenen Terrains noch in anderer Weise

anordnen kann, bedarf kaum der Erinnerung. Wenn es z. B. darauf ankäme, die in der Richtung A B C ... gelegenen Punkte 9, 10, 11, 19, 20 ..., welche die vorläufige Traçe einer Strasse oder Eisenbahn markiren, genauer zu bestimmen als die ausserhalb dieser Linie gelegenen Punkte, so dürfte man nur, nachdem das Instrument I in A als Standbarometer aufgestellt ist und beobachtet wird, das Wanderbarometer Nr. II nach 1, 2, 3, 4, B, 11, 10, 9 bringen und beobachten, dann Nr. II in A als Standbarometer aufstellen und Nr. I als Wanderbarometer nach 8, 7, 6, 5, B, 11, 10, 9 bringen und beobachten. Ebenso würde man von B aus zunächst das Polygon 12, 13, 14, 15, C, 20, 19, B, dann 18, 17, 16, C, 20, 19, B mit dem Federbarometer nivelliren, und von C aus würde in gleicher Weise fortgefahren werden. Es ist klar, dass hierdurch die Punkte der Axe 9, 10, 11, 19, 20 ... doppelt so oft bestimmt werden als alle übrigen mit Ziffern bezeichneten Terrainstellen.

Vierter Abschnitt.

Grubenmessungen.

A. Technische Ausdrücke der Bergleute und Markscheider.

§. 165. Der geordnete Betrieb der Bergwerke fordert, dass man die vorhandenen Lagerstätten nutzbarer Mineralien und die Grubenanlagen, welche zu ihrer Ausbeutung dienen, aufnehmen und bildlich darstellen, sowie projectirte Grubenbaue ihrer Grösse und Lage nach abstecken kann. Dieses Geschäft heisst Markscheiden und derjenige, welcher es ausübt, ein Markscheider.

Es handelt sich also auch hier, wie in den beiden vorausgehenden Abschnitten, um Aufnehmen und Abstecken, und so lange der Markscheider nicht in der Grube, sondern im freien Felde arbeitet, sind seine Hilfsmittel und Operationen von denen des practischen Geometers nicht verschieden, oder sollten es jedenfalls nicht sein. Eine Verschiedenheit der Instrumente und Messmethoden tritt nur bei Arbeiten in engen Grubenräumen ein, welche die Anwendung geodätischer Instrumente nicht gestatten. Wo jedoch Raum für diese gegeben ist, zieht sie der wissenschaftlich gebildete Markscheider auch bei seinen unterirdischen Arbeiten den weniger genauen Hilfsmitteln, welche er zur Messung horizontaler und verticaler Winkel in dem Hängecompass und dem Gradbogen besitzt, vor.

In die Lehrbücher der Markscheidekunst wird in der Regel auch die Lehre von den Horizontal- und Verticalmessungen im freien Felde, oder nach bergmännischem Ausdrucke, die Lehre von den Tagemessungen

aufgenommen und entweder im Sinne der practischen Geometer auf die vollkommeneren Messinstrumente der Neuzeit, oder im Sinne der alten Markscheider auf deren unbehilfliche und ungenaue Werkzeuge gegründet. Da wir aber diese Messungen im ersteren Sinne bereits abgehandelt haben, so brauchen wir sie nicht weiter zu berühren, als um ihre Verknüpfung mit den unterirdischen Messungen oder mit anderen Worten, den Anschluss der Grubenmessungen an die Tagmessungen zu zeigen.

Da die Markscheidekunst nur für den Bergbau vorhanden ist und vorzugsweise von Bergleuten ausgeübt wird, so begreift sich leicht, dass in derselben viele bergmännische Ausdrücke üblich sind, welche der practische Geometer und der Ingenieur in der Regel nicht kennen, und welche ihnen desshalb erklärt werden müssen, wenn sie in den Stand gesetzt werden sollen, die Bergleute zu verstehen oder sich ihnen verständlich zu machen. Diese Kunstwörter beziehen sich zum Theil auf geognostische Verhältnisse, insofern sie die Lagerstätten der Mineralien betreffen; zum Theil bezeichnen sie die technischen Anlagen und Arbeiten, welche zur Gewinnung der brauchbaren Mineralien dienen; und theilweise werden sie zur Bezeichnung geometrischer Begriffe (in diesem Falle also gleichbedeutend mit den Ausdrücken der Geometer) gebraucht. Wir theilen nachstehend eine grössere Anzahl bergmännischer Kunstwörter mit, ohne uns jedoch zu verpflichten, die geometrischen auch da beizubehalten, wo es bereits allgemein gebräuchliche gute Namen zur Bezeichnung von hiehergehörigen Dingen und Begriffen gibt.

§. 166. **Geognostische Ausdrücke.** Die grossen zusammenhängenden Massen, welche die Hauptbestandtheile der Erdrinde bilden, heissen Gebirgsmassen. Sind diese Massen auf beträchtliche Weite durch parallele Ebenen in Lagen von mässiger Dicke getheilt, so nennt man sie geschichtet, die Lagen selbst Schichten. Jene Schichten, welche aus Mineralmassen bestehen, die der Hauptgebirgsmasse fremdartig und untergeordnet sind, heissen Lager. Von diesen hat man diejenigen Lagen verschiedenartiger Mineralmassen zu unterscheiden, welche die Gebirgsschichten durchschneiden und Gänge genannt werden. Lager und Gänge nennt man zusammen Lagerstätten. Erstrecken sich diese bis an die Erdoberfläche, so sagt man von ihnen, sie gehen zu Tage aus; das Hervortreten einer Lagerstätte an das Tageslicht nennt man wohl auch das Ausbeissen derselben. Die Schichten, auf denen eine Lagerstätte ruht, heissen das Liegende, jene, welche sie bedecken, das Hangende, und die Ebenen, welche die Lagerstätte vom Liegenden und Hangenden trennen, die Salbänder der Lagerstätte. Der senkrechte Abstand der beiden Salbänder einer Lagerstätte wird deren Mächtigkeit genannt. Ist die Mächtigkeit eines Lagers im Verhältniss zu seiner Länge sehr gross, so heisst es ein Stock.

§. 167. **Bergmännische Ausdrücke.** Unter dem Abbau einer Lagerstätte versteht man die Gewinnung der in ihr vorkommenden nutzbaren Mineralien. Der Raum, welchen ein Grubenbesitzer (Lehenträger, Gewerk)

abbauen darf, heisst das Grubenfeld. Zur Bezeichnung der Grenzen eines solchen Felds dienen an der Erdoberfläche (über Tage) die Lochsteine und in der Grube (unter Tage) die in das Gestein eingehauenen Markscheidestufen.

Der Abbau der Lagerstätten geschieht durch Stollen und Schächte. Ein Stollen ist ein in einen Berg führender (getriebener) Gang von sehr geringer Neigung und mässigem Querschnitte.[1] Dient er zum Aufsuchen einer neuen oder zur näheren Untersuchung einer alten Lagerstätte, so heisst er Schurfstollen, werden durch ihn die Grubenwässer abgeleitet, Erbstollen; soll er den Gruben gute Luft zuleiten, Wetterstollen; geschieht durch ihn der Transport der gewonnenen Mineralmassen, Förderstollen; und wenn er vorhandene Gänge verbindet oder verkreuzt, Zubaustollen. Das zu Tage gehende Ende eines Stollens heisst sein Mundloch, das entgegengesetzte der Feldort; Boden, Decke und Seitenwände nennt man beziehlich Sohle, First, Ulmen.

Unter Schacht versteht man eine von der Erdoberfläche ausgehende lothrechte oder geneigte Grube von rechteckigem Querschnitte. Dient er zum Auf- und Niedersteigen (Aus- und Einfahren), so heisst er Fahrschacht; soll er frische Luft zuführen, Wetterschacht; werden durch ihn mittels Maschinen (Künste) die Grubenwässer weggeschafft (gelöst), Kunstschacht; dient er zur Hebung der gewonnenen Mineralmassen, Förderschacht; und wenn dieses Heben durch besondere Maschinen geschieht, Treibschacht. Das untere Ende eines Schachtes heisst dessen Sohle, seine Längenausdehnung die Teufe.

Eine nicht von der Erdoberfläche, sondern von einem Stollen ausgehende lothrechte oder schiefe Grube nennt man ein Gesenke, und einen nicht von einem Bergabhange, sondern von einem Schachte ausgehenden Stollen eine Strecke. Eine von einem Stollen rechtwinklig abzweigende Strecke heisst ein Querschlag, ausserdem ein Flügelort. Die Oerter, welche so niedrig sind, dass die Bergleute nur sitzend darin arbeiten können, nennt man Sitzörter, und jene weiten, welche unter einem Förderschachte liegen und zur Einfüllung der Kübel und Tonnen dienen, Füllörter.

Stollen, Strecken, Schächte und Gesenke werden überall, wo Felsen es nicht unnöthig macht, zur Vermeidung des Einsturzes ausgezimmert (manchmal auch ausgemauert). Die Zimmerung eines Stollens geschieht mit Thürstöcken, die nach Erforderniss dicht beisammen oder eine halbe Lachter von einander stehen. Die in den Seitenwänden stehenden Holzstämme heissen Stämpel, die darauf liegenden Kappen.

§. 168. **Geometrische Ausdrücke.** Eine söhlige Linie oder Ebene ist mit einer wagrechten, eine seigere mit einer lothrechten Linie oder Ebene gleichbedeutend. Demnach bedeutet Seigerteufe eine in die Tiefe gehende Verticallinie und Seigerebene eine Verticalebene. Unter einer flachen

[1] Die Höhe beträgt in der Regel nur 5/4, die Breite 1/2 Lachter, die Steigung höchstens 1/2 Procent.

oder tonnlägigen Linie oder Ebene wird jede gegen den Horizont geneigte Linie oder Ebene verstanden.

Denkt man sich durch den einen Endpunkt einer geneigten Linie eine Horizontalebene gelegt und den anderen Endpunkt darauf projicirt, so heisst dessen Projection der Seigerpunkt, während die Horizontal-Projection der Linie selbst deren Ebensohle genannt wird. Der Neigungswinkel der flachen Linie gegen den Horizont heisst der Fallwinkel und der horizontale Winkel, den die Ebensohle mit der Mittagslinie bildet, der Streichwinkel der flachen oder tonnlägigen Linie.

Zieht man auf einer Lager- oder Gangebene (in der Regel auf einem Salbande) eine horizontale (söhlige) Linie, so heisst dieselbe die Streichlinie dieser Ebene. Misst man den horizontalen Winkel, welchen diese Linie mit dem Meridian bildet, so hat man den Streichwinkel des Lagers oder des Gangs, wobei nur noch anzugeben ist, von welcher Seite der Mittagslinie aus er gezählt wird. Eine in der Gang- oder Lagerebene senkrecht zur Streichlinie gezogene Gerade heisst die Falllinie der Ebene, und der Neigungswinkel dieser Linie gegen den Horizont der Fallwinkel der Lagerstätte, zu welcher jene Ebene gehört. Die Ebene des Fallwinkels nennt man die Fallebene der Lagerstätte. Zwei Gänge fallen rechtsinnig, wenn ihre Falllinien nach gleichen Himmelsgegenden gerichtet sind, und widersinnig, wenn das Gegentheil stattfindet.

Statt des Worts Abstecken bedienen sich die Markscheider des Ausdrucks Abgeben (einen Punkt, eine Linie abgeben); das Aufnehmen nennen sie Verziehen, und die bildliche Darstellung oder das Auftragen einer Figur Zulegen. Für Horizontalprojection brauchen sie das auch sonst übliche Wort Grundriss, für erste Verticalprojection oder Aufriss den Ausdruck Seigerriss, und für zweite Verticalprojection das Wort Queroder Kreuzriss.

B. Grundoperationen in der Grube.

§. 169. Die Arbeiten, welche der Markscheider in der Grube oder „unter Tage" vorzunehmen hat, bestehen wie die des Feldmessers in der Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten, und folglich in dem Aufnehmen und Abstecken von Punkten, Linien und Winkeln. Die zusammengesetztesten Markscheide-Aufgaben erfordern zu ihrer Lösung weiter Nichts als eine entsprechende Combination von Linien- und Winkelmessungen; wer daher als Markscheider Etwas leisten will, muss vor allen Dingen mit diesen Messungen vertraut sein und sich ausserdem durch ein gründliches Studium der darstellenden Geometrie die Befähigung erworben haben, die Lösung zusammengesetzter Aufgaben über die gegenseitige Lage von Linien und Ebenen auf die Construction und Messung von Linien und Winkeln zurückzuführen.

Jede Messung in der Grube muss an einem fixen Punkte (Anhalts-

punkt) beginnen und schliessen; ausgedehnte Messungen erfordern auch zwischen den Enden Fixpunkte, um an sie spätere Messungen anschliessen zu können. Diejenigen Punkte, welche nur für kurze Zeit bezeichnet werden, nennt man, im Gegensatze zu den Fixpunkten, verlorene Punkte. Die Anhaltspunkte werden auf verschiedene Weise bezeichnet.

§. 170. Aufgabe. Es sollen die gebräuchlichsten Arten Fixpunkte in den Gruben zu bezeichnen, angegeben werden.

Beginnt eine Messung an einem Stollenmundloche (Ein- oder Ausgang), so wird an demselben ein Fixpunkt angebracht, der zugleich für die Verbindung der Messung in der Grube mit der über Tage dient. Ist der Stollen mit Holz abgesteift, so begnügen sich manche Markscheider damit, in der Kappe des Thürstocks oder in dessen Pfosten ein Kreuz (†) einzuschneiden und dieses als Fixpunkt anzusehen; ein solcher Punkt ist aber zu unsicher und zu vergänglich, als dass er den Namen Fixpunkt verdiente. Dauerhafter sind jene Zeichen, welche aus 0,m1 bis 0,m15 langen hölzernen Dübeln bestehen, die entweder in das feste Gestein oder das Mauerwerk des Stollenmundloches eingetrieben sind, um beim Verrichten des Zugs eine Verziehschraube oder ein 0,m18 langes und am Kopfe 0,m03 breites Punkteisen (Band I, Fig. 96) aufzunehmen. Am sichersten und geeignetsten aber erscheinen besondere Fixsteine, welche man vor dem Stollenmundloche auf ein festes Fundament so weit versenkt, dass sie nur etwa 0,m03 über die Sohle des Stollens vorstehen (Fig. 181). Dergleichen Steine (a) sind Prismen von 0,1 Quadratmeter Grundfläche und 0,m5 bis 1,m0 Höhe, in welche oben ein 0,m05 tiefes Loch gebohrt ist, das den Anfangspunkt vorstellt. Zur Schonung des Steins ist es gut, denselben mit einem Deckel zu versehen, der bei Messungen abgenommen wird; ausserdem ist seine Lage gegen andere unveränderliche Gegenstände in horizontaler und verticaler Projection genau einzumessen, um sich jederzeit von dem unverrückten Stande desselben überzeugen zu können.

Fig. 181.

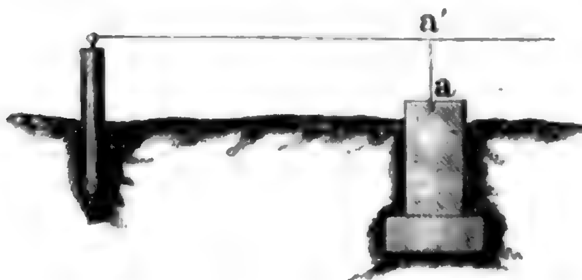
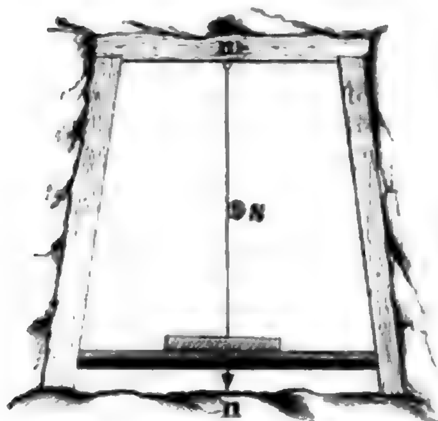


Fig. 182



In den Firsten von Stollen oder Strecken werden diejenigen Punkte, von denen bloss herabgesenkelt wird, durch die im ersten Bande Fig. 97 abgebildeten und beschriebenen Senkeleisen bezeichnet. Fig. 182 stellt einen solchen Fall dar, wobei das Loth m n die gespannte Schnur s berührt.

Als Fix- oder Anhaltspunkte für die Nivellemente von Stollen dienen Sohlnägel (Band 1, Fig. 98), welche in hölzerne Schwellen oder, in

Ermangelung derselben, in hölzerne Dübel, die in das Gestein eingelassen sind, eingeschlagen werden.

§. 171. **Aufgabe. Eine geneigte oder tonnlägige Linie abzustecken und auszumessen.**

Das Abstecken von Linien in der Grube muss sich wegen Mangels an Aussicht und Tageslicht von dem Abstecken über Tage wesentlich unterscheiden. Sind es hier die Lichtstrahlen, welche gerade Linien bezeichnen, so dienen in den finstern und engen Grubenräumen Schnüre und Seile (manchmal auch Dachlatten) zur Verkörperung dieser Linien, und an die Stelle der Absteckstäbe treten alsdann die Verzieh- oder Markscheideschrauben.

Wie die 20 bis 30 Klafter lange, $2^1/_2$ bis 3 Linien dicke und auf eine Spule gewickelte Mess- oder Verziehschnur mittels der eben genannten Schrauben in der Grubenzimmerung oder in besonderen Spreizen befestigt und die Schnurlänge zwischen zwei Schrauben mit Hilfe der Lachterkette bestimmt wird, ist bereits aus §. 191 bekannt; hier ist nur noch beizufügen, wie man die Schnurlänge mit den Lachterstäben findet.

Der Markscheider muss hierzu zwei Stäbe und einen Gehilfen haben; jener führt den Massstab Nr. I, dieser Nr. II, und jeder hält seinen Stab so mit den beiden Händen, dass dieser je im ersten Drittel von den Enden her, unten vom Daumen, oben von den übrigen Fingern umschlossen ist, und die Theilung nach oben kommt. Ist nur der halbe Lachterstab bis auf Linien getheilt, so richte man ihn so, dass seine fein getheilte Hälfte gegen das Ende der zu messenden Linie liegt. Den Stab Nr. I legt der Markscheider so über die gespannte Schnur, dass sein Beschläg die Mitte des Stengels der ersten Schraube (A) berührt, und dass das Gewicht der Schnur auf dem Daumen noch fühlbar ist. Auf den Ruf „gut" schiebt der Gehilfe vorsichtig seinen Stab Nr. II an den des Markscheiders, bis ein leiser Klang gehört und das Schnurgewicht auf dem Daumen gefühlt wird. Wenn dieses der Gehilfe durch das Wort „gut" angezeigt hat, setzt der Markscheider seinen Stab ab, zählt laut „eins" und fügt ihn wieder an Nr. II an. Hierauf nimmt der Gehilfe, die Zahl „zwei" aussprechend, seinen Stab weg, legt ihn an Nr. I, worauf der Markscheider seine Lachter mit dem Rufe „drei" und dann wieder der Gehilfe seinen Stab mit dem Rufe „vier" abschiebt. In dieser Weise wird mit der Messung bis an's Ende der Linie fortgefahren und dabei darauf gesehen, dass der Markscheider fortwährend die ungeraden, der Gehilfe aber die geraden Lachterlängen auszusprechen hat, weil darin eine gewisse Sicherung gegen irriges Abzählen liegt.

Das Ende der Schnur wird in der Regel von der zweiten Schraube (B) aus rückwärts gemessen, da es häufig nicht möglich ist, den letzten Stab über das Ende hinausragen zu lassen, und da, wenn dieses auch möglich wäre, die Ablesung über der Schraube nicht so sicher ist, als am Ende (c) des vorletzten Lachterstabs, welcher in Fig. 183 mit Nr. II bezeichnet ist. Der Stab Nr. I wird wie auf dem Anfangspunkte A über die Mitte der

Fig. 183.

Schraube B gelegt und neben den ersten gehalten, so dass die Länge Bc leicht abzunehmen ist. Während der Markscheider diese Länge bestimmt und in sein Notiz- oder Zugbuch einschreibt, hält der Gehilfe beide Stäbe, und der Controle wegen lesen beide Messende die Länge Bc laut ab.

§. 172. Aufgabe. Eine lothrechte oder seigere Linie abzustecken und auszumessen.

Ist die Linie nicht über 25 Lachter lang, so bedient man sich der Messschnur, ausserdem aber eines Treibseils zur Absteckung. Da jede solche Linie in einen seigeren Schacht hinabführt, so wollen wir sofort annehmen, es sei die Tiefe eines solchen Schachtes auszumessen.

1. Die Tiefe betrage nicht über 25 Lachter. Fig. 184. Stellt bc den seiner Tiefe nach auszumessenden Schacht vor, so handelt es sich darum, den lothrechten Abstand de zwischen der auf der Sohle liegenden Grundschwelle b und der durch eine Latte mn vorgestellten Oberfläche des Tagkranzes ac zu finden. Man bringe desshalb in einem Balken (g) des Schachthauses eine Verziehschraube an, befestige an ihr die unten mit einem Steine beschwerte Messschnur und errichte in dem Schachtfenster bh in passender Höhe eine Spreize i, welche gestattet, eine Latte if mittels einer Setzwage horizontal zu legen. Ist der Senkel zur Ruhe gekommen, so bemerke man an der Schnur die Stellen e und f durch Bindfaden und messe mit dem Lachterstab die Höhe bi. Hierauf zieht man den Senkel nach und nach aus der Grube und misst die Länge ef auf ähnliche Weise wie die Schnurlänge einer geneigten Linie. Nachdem nämlich die Schnur so weit gehoben ist, dass der Punkt e etwa einen Fuss über dem Boden steht, legt der Markscheider den Lachterstab Nr. I an die Schnur, worauf diese wieder gehoben wird. Ist das untere Ende des ersten Stabs einen Fuss über ac gekommen, so legt der Messgehilfe den Stab Nr. II an, der Markscheider setzt ab, zählt „eins" und legt wieder an. Dasselbe thut dann der Gehilfe, „zwei" zählend. Hierauf nimmt der Markscheider die dritte, der Gehilfe die vierte Lachter ab, und so fahren beide fort, bis das untere Zeichen f des Senkels eingemessen ist. Es versteht sich von selbst, dass bei dieser Messung der Stein fortwährend an der Schnur bleibt, damit sich deren Länge so wenig als möglich ändert. Nach der Figur ist die Tiefe des Schachts $de = ef + df$.

2. Die Tiefe des Schachts betrage mehr als 25 Lachter. Fig. 185. Das Verfahren zur Messung der Tiefe ist dem vorigen gleich, nur der Senkel ist ein anderer. Das Treibseil, welches jetzt an die Stelle der Schnur tritt, und welches wie diese schon längere Zeit hindurch gebraucht sein soll,

Fig. 184.

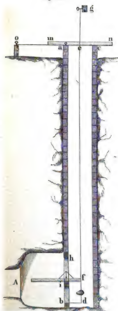
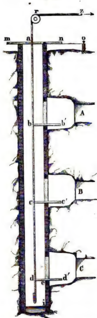


Fig. 185.



liegt auf einer Rolle (r) und wird von irgend einer Hebmaschine in der Richtung rz gehalten. Vermöge seines grossen Gewichts nimmt es von selbst eine lothrechte Richtung an; es bedarf also keiner Beschwerung. Hat man durch horizontal gelegte Latten und Bindfaden die Stellen bezeichnet, deren Entfernungen gemessen werden sollen, so lässt man das Seil langsam über die Rolle treiben und misst dabei die gesuchten Längen wie vorhin mit Lachterstäben. Kommt das erste Seilzeichen (b) an, so wird mit dem Auftreiben des Seils so lange inne gehalten, bis die Länge des ersten Laufs in das Zugbuch eingetragen ist; dasselbe geschieht bei jedem folgenden Laufe. Da die Seilzeichen leicht so beschmutzt werden

können, dass man sie übersieht, so bindet man gewöhnlich noch ein Stückchen Holz mit an, welches die Nummer des Laufs enthält, dessen Seigertiefe gesucht wird.

§. 173. **Aufgabe. Den Höhen- oder Tonnlagewinkel einer geneigten Linie zu bestimmen.**

Dieser Winkel kann nach Umständen mit dem Gradbogen, dem Setzniveau oder dem Grubentheodolithen gemessen werden.

1. Messung des Winkels mit dem Gradbogen. (Fig. 186.) Ist die Linie durch eine Schnur bezeichnet, so lässt sich nur der Gradbogen (Bd. I, Fig. 274) zur Messung ihres Neigungswinkels anwenden. Dieser Bogen soll immer in der Mitte der Schnur und nicht, wie manche Markscheider zu thun pflegen, unterhalb derselben aufgehängt werden. Je steiler der Zug, desto kürzer soll er sein. Hat man den Winkel auf der einen Seite der Schnur abgenommen und gestattet es der Raum, den Bogen umzuhängen, so nimmt man den Winkel o c b = B A C zum zweiten Male auf. Differiren beide Aufnahmen, so sieht man das arithmetische Mittel der Ablesungen als den richtigen Tonnlagewinkel an. Behufs des Ablesens hält der Messgehilfe das Grubenlicht hinter den Gradbogen, damit der Schatten des Senkelhaares nicht mit diesem selbst verwechselt werde. Durch geeignetes Entgegenhalten des Zugbuchs kann der Markscheider das Licht an die Stelle leiten, wo die Ablesung stattfindet. In vielen Fällen ist es nöthig, erst den in den Stollen oder Strecken herrschenden Zug zu hemmen, um den Senkel zur Ruhe zu bringen. Da das Haar des Senkels leicht reisst, soll der Markscheider immer eines im Vorrath haben und bei dem Aus- und Einpacken, sowie bei dem Aufhängen des Gradbogens sehr vorsichtig verfahren.

Fig. 186.

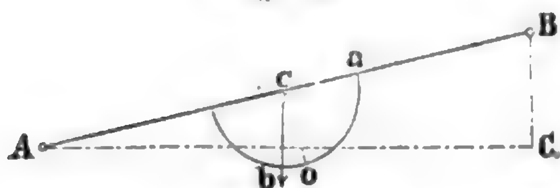
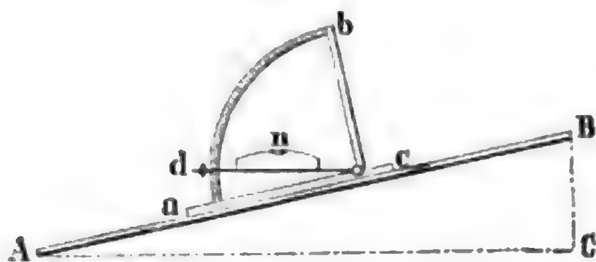


Fig. 187.



2. Messung des Winkels mit dem Setzniveau. (Fig. 187.) Stellt A B eine feste unbiegsame Latte vor und wird auf derselben ein eingetheilter Quadrant a b c, der auf einem messingnen Lineale a c ruht, vertical und so aufgestellt, dass die Linie c a, welche durch den Nullpunkt der Theilung geht, mit der tonnlägigen Linie A B parallel läuft, so gibt die durch die Libelle n horizontal gestellte Alhidade c d mittels des bei d befindlichen Nonius den Tonnlagewinkel B A C = a c d bis auf einzelne Minuten an, während dieser Winkel mit dem Gradbogen höchstens auf 3 Minuten genau erhalten werden kann. Ueber die nähere Einrichtung des durch a b c d angedeuteten Setzniveau's sehe man Bd. I, §. 229.

3) Messung des Winkels mit dem Grubentheodolithen. (Fig. 188.) In

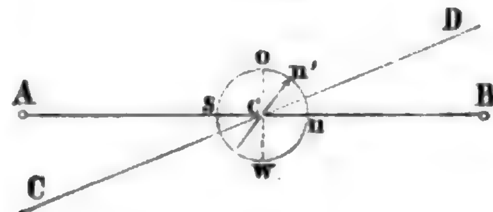
diesem Falle ist die geneigte Linie AB am ersten Endpunkte (A) durch die Drehaxe des Fernrohrs und am zweiten (B) durch die Mitte des leuchtenden oder beleuchteten Signals (I. Band, S. 260 und 261) vorgestellt. Hat man in dem Punkte A den Höhenwinkel BAC gemessen, so kann man auch noch den Tiefenwinkel ABC' bestimmen, indem man die Stative D, E stehen lässt, das Signal von B mit dem Theodolithen in A vertauscht und von B nach A zurück visirt. Die Höhen- und Tiefenwinkel sollen genau gleich sein, da, nach der im I. Bande beschriebenen Einrichtung der Leuchtsignale für Gruben, die Visirlinie BA mit AB zusammenfällt. Findet eine Abweichung zwischen beiden Ergebnissen der Messung statt und hat man sich überzeugt, dass diese nicht von den ungleichen Höhen des Instruments und des Signals herrührt, so kann man das arithmetische Mittel als den richtigen Verticalwinkel ansehen.

Fig. 188.

§. 174. Aufgabe. Den Streichwinkel einer wagrechten oder geneigten (söhligen oder tonnlägigen) Linie zu bestimmen.

Würde die gegebene Linie AB (Fig. 189), deren Streichwinkel gefunden werden soll, eine andere Gerade CD schneiden, deren Neigung gegen die Mittagslinie bekannt wäre, und gestattete der Raum das Aufstellen eines Theodolithen und der ihm entsprechenden Signale, so erhielte man den Streichwinkel der Geraden AB ohne Zweifel am genauesten, indem man den Horizontalwinkel der Linien AB und CD zu dem Azimuth der letzteren addirte oder von ihm subtrahirte, je nach der Lage der Linien.

Fig. 189.



Sind aber diese Bedingungen nicht gegeben und hat man sich vorher überzeugt, dass sich in der Nähe keine Eisenstücke (z. B. Geräthe, Eisenschienen etc.) oder Gebirgsarten (z. B. Eisensteine, Kobalt, Nickel, Basalt, Serpentin, Grünstein etc.) befinden, welche auf die Nadel störend einwirken: so hängt man den in Bd. I, §§. 141 bis 143 dargestellten Hängecompass auf die aus Fig. 178 näher ersichtliche Weise an der gespannten Verziehschnur AB (Fig. 189) und zwar gewöhnlich ausserhalb der Mitte so auf, dass der mit Stunde 0 = Stunde 24, oder auch mit 360° bezeichnete Nordpunkt des Compassrings in der Richtung von A nach B liegt.

Sobald der Hängecompass ruhig steht, stellt sich der Markscheider vor den Nordpol der Nadel um abzulesen, wobei der Gehilfe so leuchtet,[1] dass weder der Reflex des Glasdeckels noch der Schatten der Nadel dieses Geschäft stören. Hierauf macht man auch am Südpole eine Ablesung und

[1] Dass die Grubenlampe nicht von Eisen, sondern nur aus Kupfer oder Messing sein darf, versteht sich von selbst.

nimmt aus den zwei Resultaten das arithmetische Mittel als den gesuchten Streichwinkel. Ehe man jedoch dieses Mittel in das Zugbuch einträgt, bringt man die Nadel erst noch einmal zum Schwingen und sieht zu, ob ihre Enden sich wieder wie vorhin stellen oder nicht. Sollten merkliche Abweichungen stattfinden, welche nur magnetischen Störungen zugeschrieben werden können, so muss man vorläufig auf die Abnahme des Stundenwinkels verzichten und dieselbe zu einer mehr geeigneten Zeit (vor 10 Uhr Morgens und nach 2 Uhr Nachmittags) vornehmen.

Ist der Gradring nicht von 0^0 bis 360^0 oder von Stunde 0 bis Stunde 24, sondern in zweimal 180^0 oder zweimal 12 Stunden getheilt, so ist nach Bd. I, S. 217 die östliche oder westliche Richtung des Streichens mit zu bemerken.

Der Streichwinkel, welchen man durch das eben beschriebene Verfahren erhält (der beobachtete oder observirte Streichwinkel), ist auf die Magnetlinie bezogen; will man ihn auf die Mittagslinie beziehen, so muss er um die Abweichung der Magnetnadel vergrössert oder verkleinert werden, und in dieser Gestalt heisst er der verbesserte oder reducirte Streichwinkel.

Bezeichnet δ die Abweichung der Magnetnadel, und ist ω der auf einem von rechts nach links (widersinnig) in 360^0 oder 24 Stunden getheilten Compass beobachtete Streichwinkel, so ist der verbesserte Streichwinkel: bei der östlichen Abweichung der Magnetnadel gleich

$$\omega' = \omega + \delta \tag{334}$$

und bei der westlichen Abweichung gleich

$$\omega'' = \omega - \delta. \tag{335}$$

Wäre der Compass, wie die Kreise der Theodolithen, von links nach rechts (rechtssinnig) beziffert, so würde $\omega' = \omega - \delta$ und $\omega'' = \omega + \delta$ sein. Da in diesem Jahrhundert die Declination der Magnetnadel westlich bleibt so hat man bei widersinnigen Gradringen fortwährend nur die letztere Formel anzuwenden.

Wo die Abweichung der Magnetnadel unbekannt ist, kann man dieselbe dadurch bestimmen, dass man sich nach §. 125 eine Mittagslinie zieht, über diese die Bussole stellt, nach einem in der Mittagslinie stehenden Signal visirt und am Nordende der Nadel abliest. Diese Ablesung, mehrmals wiederholt und durch die Ablesung am Südende verbessert, gibt die gesuchte Abweichung der Magnetnadel, welche die Bergleute auch das Streichen der Mittagslinie nennen. Dieses ist selbstverständlich östlich, wenn die Abweichung der Nadel westlich ist, und umgekehrt.

§. 175. **Aufgabe. Den Neigungswinkel zweier geraden Linien zu bestimmen.** (Fig. 190.)

Schneiden sich die Geraden ab, cd und lässt sich im Schnittpunkte ein Theodolith aufstellen, so misst man den gesuchten Winkel mit diesem Instrumente am genauesten. Dasselbe ist auch der Fall, wenn die beiden Geraden ab, cd sich selbst nicht schneiden, aber von einer dritten Geraden

a c so geschnitten werden, dass sich in den Schnittpunkten a, c der Theodolith aufstellen lässt. In diesem Falle misst man den Winkel $bac = \alpha$, $acd = \gamma$ und berechnet daraus den Neigungswinkel $\beta = \alpha + \gamma - 180^0$.

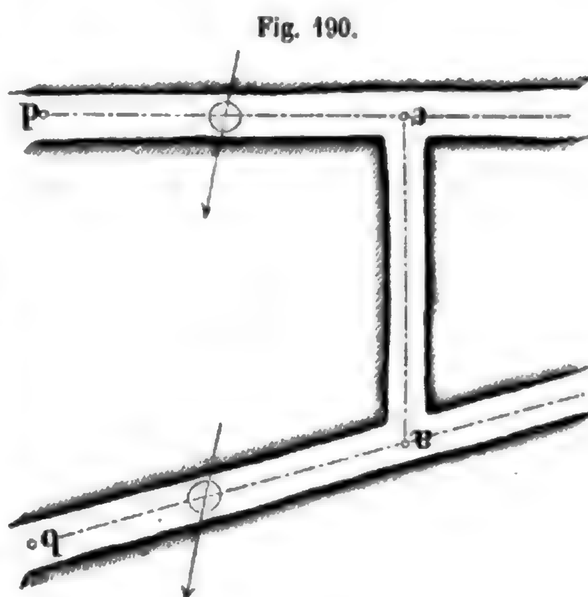


Fig. 190.

Besitzt man keinen Theodolithen oder ist er nicht anwendbar, so bestimmt man das Streichen beider Linien mit dem Hängecompass und berechnet daraus den Neigungswinkel β. Ist der Streichwinkel der Linie cd, welche als der rechte Schenkel angesehen werden soll, $= \alpha'$ und der der Linie ab, welche somit der linke Schenkel ist, $= \alpha''$, so erhält man

$$\beta = \alpha' - \alpha'' \qquad (336)$$

so lange beide Linien (ab, cd) zugleich auf der östlichen oder westlichen Seite der Nadel liegen; liegt aber der rechte Schenkel östlich und der linke westlich, so wird, wie man sich leicht überzeugt,

$$\beta = 360^0 + \alpha' - \alpha'' \qquad (337)$$

dagegen erhält man β wieder aus der Gleichung (336), wenn der rechte Schenkel östlich und der linke westlich liegt, und wenn, wie bisher, die Ablesungen α' und α'' auf einem widersinnig und von 0^0 bis 360^0 oder von 0^h bis 24^h bezifferten Gradringe gemacht werden.

§. 176. **Aufgabe. Das Streichen und Fallen von Lagerstätten unter verschiedenen Bedingungen zu bestimmen.**

Würden die Lagerstätten auf eine grosse Ausdehnung in der Grube entblösst sein, wie es mit geschichteten Steinen über Tage oft der Fall ist, so wäre die Bestimmung des Streichens und Fallens eine leichte Arbeit: man würde mittels einer Latte und einer Setzwage auf der Lagerstätte eine horizontale Linie abstecken, längs dieser Linie eine Schnur spannen, den Compass aufhängen, das Streichen gegen die Magnetlinie ablesen und dieses beobachtete Streichen mittels der bekannten Declination der Magnetnadel auf die Mittagslinie reduciren; hierauf zöge man zu der horizontalen Streichlinie eine in der Lagerstattebene liegende Senkrechte, spannte in deren Richtung über die Ebene eine Schnur, hinge daran den Gradbogen und bekäme hierdurch den gesuchten Fallwinkel oder das Verflächen der Lagerstätte.

Allein die Natur der Lagerstätten und die Art ihres Abbaues gewähren keine so grossen Entblössungen, wie sie hier vorausgesetzt werden: der Markscheider muss sich vielmehr mit sehr kleinen Theilen der Lagerstätten begnügen, um aus den auf ihnen erhobenen Daten auf das allgemeine Streichen und Fallen jener Stätten zu schliessen. Hierauf beziehen sich die folgenden Anweisungen:

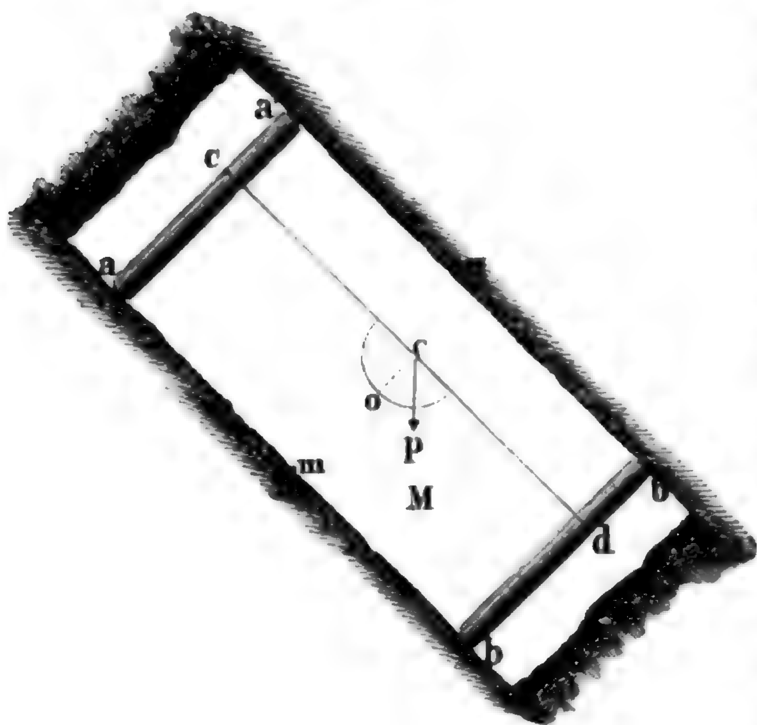


Fig. 191.

1) Stellt in Fig. 191 H das Hangende und L das Liegende eines Steinkohlenflötzes vor und ist dieses einige Lachter weit entblösst, so suche man vor allen Dingen mit einer etwa zwei Lachter langen Latte und einer Setzwage auf dem Liegenden eine horizontale Linie und errichte darauf mit einem Winkelmasse eine Senkrechte a b. Denken wir uns den Schnitt des Flötzes nach dieser Senkrechten genommen, so stelle man auf derselben zwei Stämpel a a', b b' senkrecht gegen a b auf, mache a c = b d oder a' c = b' d und spanne die Schnur c d, so wird diese mit a b in einer Ebene liegen und dem Dache (H) und der Sohle (L) des Flötzes parallel sein. Wird an die Schnur c d der Gradbogen gehängt und der Winkel o c p abgelesen, den der Pendelfaden anzeigt, so hat man damit das Fallen des Flötzes in der Strecke M gefunden. Errichtet man ebenso an den Endpunkten der horizontalen Geraden m n (Fig. 192) zwei Stämpel m m', n n' entweder senkrecht auf das Liegende und Hangende oder lothrecht, macht m u = n v oder m' u = n' v, zieht die Schnur u v und hängt an derselben den Compass C auf, so findet man das Streichen des Flötzes in dieser Strecke.

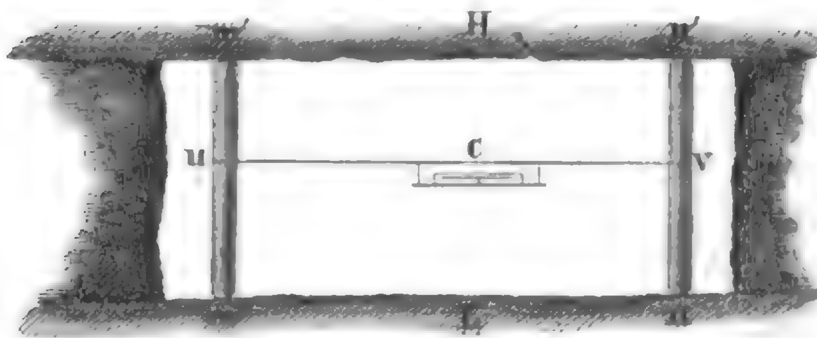


Fig. 192.

2) Sollte es wegen zu beschränkten Raums nicht möglich sein, erst eine Horizontallinie des Hangenden oder Liegenden und darauf die Verflächungslinie herzustellen, so sucht man letztere, wenn das Hangende entblösst ist, dadurch, dass man (wie in Fig. 193 angedeutet) auf einer parallelepipedischen Latte r einen Gradbogen so befestigt, dass der durch den Nullpunkt gehende Halbmesser senkrecht zur Axe der Latte steht, und diese Latte so lange an dem Hangenden hin und her bewegt, bis der Neigungswinkel, den das Loth anzeigt, seinen grössten Werth erlangt hat: in diesem Falle gibt die Latte die Richtung der Linie des stärksten Falls an und folglich der Gradbogen die Verflächung des Flötzes. Wäre nur das

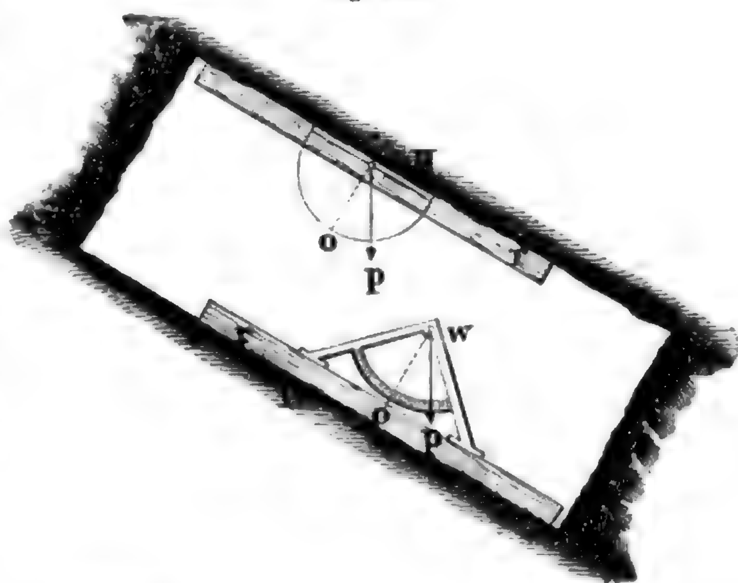


Fig. 193.

Liegende entblösst, so würde man auf die Latte r statt eines Gradbogens eine Bergwage w (Bd. I, §. 221) aufsetzen, um so den grössten Neigungswinkel und damit die Verflächung des Liegenden zu erfahren. In manchen Fällen genügt es auch, das Liegende mit Staub oder Bohrmehl zu bestreuen und eine Kugel darüber rollen zu lassen: ihre Bahn bezeichnet die Linie des grössten Falls und es braucht dann nur noch deren Neigung gemessen zu werden.

3) Ist das Fallen einer Lagerstätte bestimmt und lässt sich parallel mit der Linie des grössten Falls eine Schnur spannen, so kann deren Streichen mittels des Hängecompasses bestimmt werden. Ist aber dieses sogenannte Kreuzstreichen bekannt, so erhält man das Hauptstreichen, indem man jenes um 90^0 vermehrt, so dass also

$$\sigma = 90^0 + \sigma' \qquad (338)$$

wenn σ das Haupt- und σ' das Kreuzstreichen vorstellt. Ueberschreitet die Summe $90^0 + \sigma'$ die Grösse eines ganzen Kreises (2π), so sind selbstverständlich 360^0 von $90^0 + \sigma'$ oder 270^0 von σ' abzuziehen, um σ zu erhalten. Wäre z. B. $\sigma' = 316^0\ 50'$, so erhielte man, da $316^0\ 50'$ schon im vierten Quadranten liegen, also $90^0 + \sigma' > 360^0$ ist, $\sigma = 90^0 + \sigma' - 360^0 = \sigma' - 270^0 = 46^0\ 50'$.

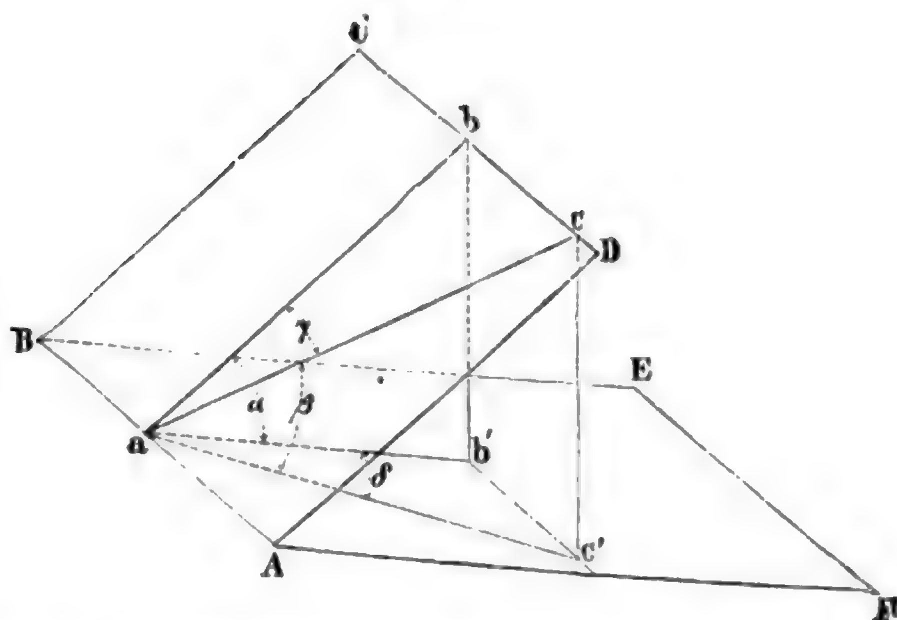
Dass die Gleichung $\sigma = 90^0 + \sigma'$ richtig ist, wird sich der Leser leicht klar machen, wenn er bedenkt, dass die Horizontalprojectionen der Fall- und Streichungslinie auf einander senkrecht stehen, und dass das Kreuzstreichen das Streichen der Projection der Falllinie ist.

4) Kann man bloss das Streichen einer Lagerstätte und den Neigungswinkel derselben nach einer gegebenen Richtung, welche aber nicht die des grössten Falls ist, unmittelbar bestimmen: so lässt sich aus diesen Daten die Verflächung der Lagerstätte berechnen. Denn stellt in Fig. 194 A C die Lagerstattebene, B F die Horizontalebene und A B den horizontalen Schnitt beider vor; zieht man ferner in A C die Linie a b und in B F die a b' senkrecht zu A B und b b' senkrecht auf a b', so dass a b b' ein rechtwinkliges Dreieck und $b a b' = \alpha$ der Fallwinkel der Lagerstattebene wird; projicirt man endlich die Linie a c horizontal = a c', vertical = c c' und in der Ebene A C = a b und setzt den Neigungswinkel $c a c' = \beta$, $c a b = \gamma$, $c' a b' = \delta$: so finden zwischen den Winkeln α, β, γ, δ folgende leicht zu beweisende Beziehungen statt:

$$\sin \beta = \sin \alpha \,.\, \cos \gamma \qquad (339)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \,.\, \cos \delta. \qquad (340)$$

Fig. 194.



Ist nun der Neigungswinkel β der Linie a c und der Winkel δ der Fallebene a b b' gegen die projicirende Ebene a c c' der Linie a c bekannt, so findet man den Fallwinkel α aus der Gleichung (340). Nun wurde aber β direct gemessen und δ ergibt sich aus dem beobachteten Streichen der Horizontalen A B und der Linie a c; denn ist σ das Streichen der söhligen Linie A B, so ist das Kreuzstreichen σ' der Falllinie a b oder ihrer Projection a b' nach Gleichung (338) $= \sigma - 90^0$, und wenn man dieses von dem beobachteten Streichen σ'' der Linie a c oder ihrer Projection a c' abzieht, so findet man

$$\delta = 90^0 + \sigma'' - \sigma. \tag{341}$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (340) und berücksichtigt, dass

$$\cos(90^0 + \sigma'' - \sigma) = \sin(\sigma - \sigma'')$$

so erhält man den gesuchten Fallwinkel α aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(\sigma - \sigma'')} \tag{342}$$

in welcher nur die direct gemessenen Grössen σ, σ'', β vorkommen.

C. Von den Markscheidezügen.

§. 177. Gleichwie der Geometer die Vermessung eines Flurbezirks an ein vorher aufgenommenes Polygon anknüpft, also schliesst auch der Markscheider die Detailaufnahme eines grösseren Grubengebäudes an eine Reihe unter sich verbundener gerader Linien oder an ein Polygon an, das er nach Erforderniss entweder auf der Erdoberfläche oder durch unterirdische Räume zieht. Ein solches Polygon nennt er einen Markscheidezug; liegt es unter der Erdoberfläche, so heisst der Zug ein Grubenzug, ausserdem aber ein Tagezug. In den meisten Fällen wird der Grubenzug mit dem Tagezug so in Verbindung gebracht, dass man die gegenseitige Lage der über und unter Tage liegenden aufgenommenen Punkte bestimmen kann.

Aeltere Markscheider verrichten auch die Tagezüge mit Schnur und Compass; dieses Verfahren kann jedoch wegen seiner Ungenauigkeit und Umständlichkeit nicht gebilligt werden. Indem wir voraussetzen, dass man die Horizontalprojection eines Tagezugs mit dem Messtische oder Theodolithen und die Verticalprojection desselben mit dem Nivellirinstrumente nach Anleitung der Abschnitte II und III aufzunehmen wisse, nehmen wir hier von den Tagezügen Nichts weiter als ihre Verbindung mit den Grubenzügen auf. Letztere allein beschäftigen uns, und in der Regel unter der Voraussetzung so enger Grubenräume, dass die Anwendung von Schnur und Compass gerechtfertigt erscheint.

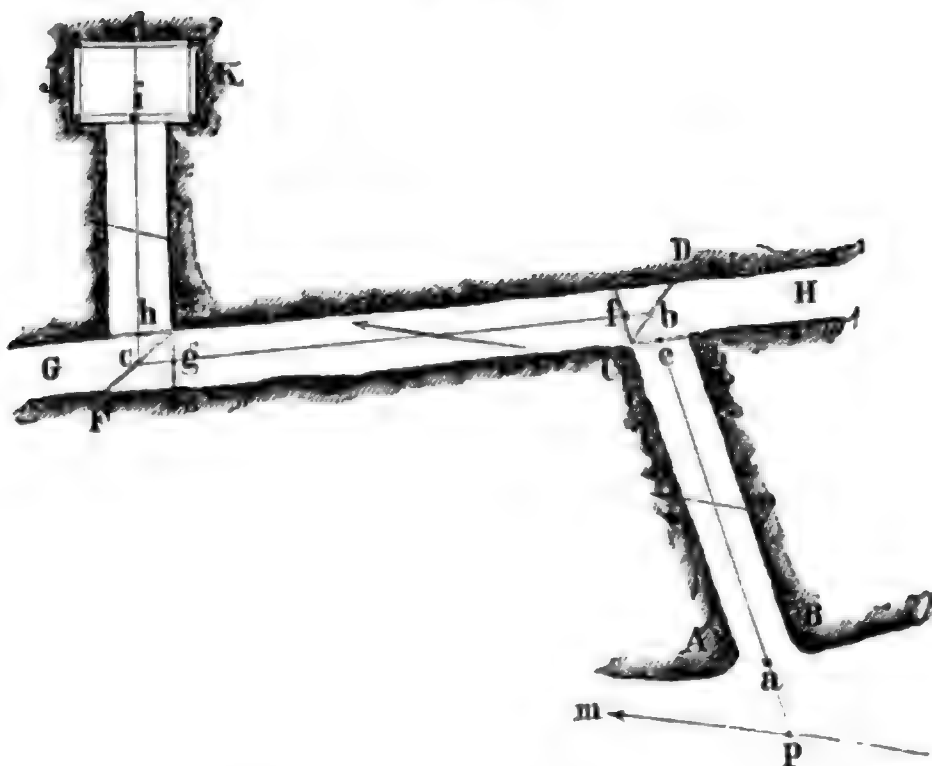
§. 178. Aufgabe. Einen Markscheidezug in Strecken von geringer Neigung vorzunehmen und zu berechnen.

Aus denselben Gründen, warum es für die Aufnahme eines Flurbezirks nothwendig ist, dass sich der Geometer erst eine Kenntniss des aufzunehmenden Terrains verschaffe und dieses in einer Handzeichnung darstelle, muss sich auch der Markscheider vor der Ausführung eines Markscheidezugs über alle Verhältnisse der Grube unterrichten und eine vorläufige Zeichnung der letzteren entwerfen. Auf dieser Zeichnung hat er zugleich Alles zu bemerken, was zur Aufnahme gehört, wie z. B. an welcher Stelle ein Gestein, eine Mauerung oder Zimmerung anfängt oder aufhört, wo sich eine Gesteinscheide, eine wasserführende Kluft befindet, wo Querschläge, Flügelörter, Gesenke etc. von der Strecke abgehen u. s. w. Damit er aber namentlich die geognostischen Verhältnisse einer Strecke richtig erkennen kann, ist es nöthig, dass diese vor dem Beginne der Aufnahme frisch „bestuft" oder entblösst werde. Die vorliegende Aufgabe kann unter zwei Voraussetzungen gelöst werden; es sind nämlich die Räumlichkeiten entweder so beschränkt, dass nur Compass und Gradbogen anwendbar sind, oder sie sind so gross, dass man Theodolith und Nivellirinstrument gebrauchen kann.

1) Lösung der Aufgabe mit Compass und Gradbogen. Stellt die Fig. 195 den Grundriss der aufzunehmenden Strecken vor, die wir uns der Einfachheit halber sehr kurz denken, so wird man zunächst vor dem Stollenmundloche AB einen Pfahl p in den Boden schlagen und auf ihm und der Spreize CD eine Schnur ab so ziehen, dass sie (wie in Fig. 196) über den Fixstein a in einer Höhe von 3 bis 4 Fuss weggeht. Ferner wird man, um die Neigung der Sohle des Stollens zu erhalten, auf der Grundschwelle CL einen Sohlnagel e lothrecht unter der Schnur ab befestigen. Weiter zieht man alsdann die Schnur bc mittels der auf den Spreizen CD und EF befestigten Schrauben und schlägt in der Verticalebene dieser Schnur die Nägel f und g in zwei Sohlschwellen der Strecke GH ein. Endlich zieht man die Schnur cd, wobei d eine in der Zimmerung des Schachtes IK befestigte Schraube vorstellt, und h und i wieder Sohlnägel sind.

Ist die Messung in dieser Weise vorbereitet, so misst man bei a (nach Fig. 196) die Seigerhöhe aa' von a bis zur Schnur und die horizontalen

Fig. 195.



und senkrechten Abstände der Seitenwände A, B von der Schnur ab. Die Linie a a' erscheint als die Schnur Nr. 1 mit einem Tonnlagewinkel von 90^0 und einem Streichen = 0. Die Schnur Nr. 2 umfasst die Länge a e: auf dieser wird der Tonnlage- und Streichwinkel nebst ihrer Länge gemessen. An dem Punkte e, dessen Höhe die Schnur Nr. 3 vorstellt, wird wie bei a verfahren. Die vierte Schnur besteht aus der Linie e b; von dieser ist das Streichen und die Neigung schon aus der Schnur Nr. 2 bekannt; es bleibt also nur noch die Länge e b zu messen. In ähnlicher Weise verfährt man längs der Geraden b c und c d. Die Messungsresultate werden in das sogenannte Zugbuch (d. i. ein in Leder gebundenes Notizbuch von der Grösse eines Achtelbogens Schreibpapier) nach einem bestimmten Formulare, z. B. dem folgenden (A) eingeschrieben und zu Hause weiter verarbeitet.

Fig. 196.

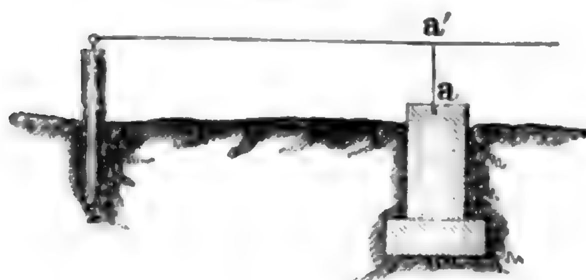


Tabelle A.

Schnur.	Tonnlagewinkel.		Steigen: + Fallen: −	Schnurmass.	Streichwinkel.		Anmerkungen.
Nr.	Grad.	Min.		Lachter.	Grad.	Min.	
1	90	0	+	0,472	—	—	Vom Fixstein a bis zur Schnur a b; A a = 0,32, a B = 0,28 Lachter.
2	2	30	+	7,218	65	10	
3	90	0	−	0,367	—	—	Vom Sohlnagel e bis zur Schnur a b; C e = 0,27; e L = 0,33 Lachter.
4	2	30	+	0,741	65	10	
5	3	55	−	0,812	335	30	
6	90	0	−	0,278	—	—	Vom Sohlnagel f bis zur Schnur b c; E f = 2,15 Lachter.
7	3	55	−	6,410	335	30	
8	90	0	−	0,325	—	—	Vom Sohlnagel g bis zur Schnur b c; E g = 0,30 Lachter.
9	3	55	+	1,015	335	30	
10	4	25	+	0,874	82	45	
11	90	0	−	0,288	—	—	Vom Sohlnagel h bis zur Schnur c d; E h = 0,28 Lachter.
12	4	25	+	3,421	82	45	
13	90	0	−	0,327	—	—	Bis zur vorderen Grundschwelle des Schachtes I K.
14	4	25	+	1,250	82	45	
15	90	0	−	0,320	—	—	Bis zur hinteren Grundschwelle desselben Schachtes.
							Mit dem Compass Nr. 2, dessen Abweichung 15° 20′ betrug, aufgenommen am ... durch N. N.

Nachdem alle Messungen gemacht sind, werden deren Ergebnisse nebst den daraus berechneten Grössen mit Tinte in das Schinbuch (welches die Grösse eines ganzen Bogens Schreibpapier hat) nach dem Formulare B (S. 367) eingetragen. Zu berechnen sind alle jene Stücke des Zugs, welche zur Darstellung des Grubengebäudes nöthig sind, aber sich nicht unmittelbar aus dem Zugbuche ergeben. Hierher gehören: die Reduction der Schnurlängen auf den Horizont (Berechnung der Ebensohlen), das Berechnen der absoluten Steigungen und Gefälle (Seigerhöhen), das Reduciren des beobachteten Streichens, die Berechnung der Coordinaten aller Zugpunkte in Bezug auf die Mittagslinie. Bezeichnet:

l die Länge der flachen Schnur,
τ deren Neigungs- oder Tonnlagewinkel,
σ den reducirten Streichwinkel der Schnur,
s die Horizontalprojection oder Ebensohle der Schnur l,
z die Verticalprojection oder Seigerhöhe derselben,
x die Projection der Ebensohle auf die Mittagslinie (Breite, Streichungscosinus der Linie l),
y die Projection der Ebensohle auf das Perpendikel zur Mittagslinie (Länge, Streichungssinus der Linie l):

so gelten folgende von selbst verständliche Beziehungen:

$$\begin{aligned} s &= l \cos \tau \\ z &= \pm\, l \sin \tau \\ x &= s \cos \sigma \\ y &= s \sin \sigma \end{aligned} \qquad (343)$$

Da der Winkel σ von 0^0 bis 360^0 gezählt wird, so ergeben sich die Zeichen von x und y aus der Grösse dieses Winkels.

Vorstehende Ausdrücke beziehen sich immer nur auf eine einzige Schnur; will man aber die gegenseitige Lage aller Punkte besser übersehen, so legt man durch den Anfangspunkt der Messung drei rechtwinklige Coordinatenaxen, welche beziehlich horizontal und vertical sind und wobei die Axe der x durch die Mittagslinie des Anfangspunkts, die der y durch das Perpendikel zur Mittagslinie in demselben, und die der z durch das Loth auf die Ebene xy in jenem Punkte vorgestellt wird.

Demnach wird für irgend einen (den n^{ten}) Punkt:

$$\begin{aligned} X &= s_1 \cos \sigma_1 + s_2 \cos \sigma_2 + s_3 \cos \sigma_3 + \ldots + s_n \cos \sigma_n \\ Y &= s_1 \sin \sigma_1 + s_2 \sin \sigma_2 + s_3 \sin \sigma_3 + \ldots + s_n \sin \sigma_n \\ Z &= l_1 \sin \tau_1 + l_2 \sin \tau_2 + l_3 \sin \tau_3 + \ldots + l_n \sin \tau_n \end{aligned} \qquad (344)$$

Denkt man sich unter n den letzten Punkt des Markscheidezugs, so stellt X dessen **Hauptbreite** oder den **Hauptstreichungscosinus**, Y die **Hauptlänge** oder den **Hauptstreichungssinus** und Z die **Haupthöhe** oder den **Hauptsummenrest der Seigerhöhen**, d. i. das Gesammtgefäll oder die Gesammtsteigung zwischen Anfangs- und Endpunkt vor, während der aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \Sigma = \frac{Y}{X} \qquad (345)$$

berechnete Winkel Σ den Hauptstreichungswinkel des ganzen Zugs bezeichnet.

Nach diesen Erklärungen wird die folgende auf Fig. 195 sich beziehende Tab. B durch specielle Berechnung einiger Nummern hinreichend erläutert sein.

Nr. 1. Der Ursprung der Coordinaten liegt im Anfangspunkte a der ersten Schnur, welche lothrecht genommen wurde und daher weder Ebensohle noch Streichen, weder Länge noch Breite hat.

Nr. 2. Die Seigerhöhe ist $= 7{,}218 \sin 2^0\,30' = 0{,}337$; die Ebensohle $= 7{,}218 \cos 2^0\,30' = 7{,}212$; die Breite $X = 7{,}212 \cos 65^0\,10' = 2{,}952$; die Länge $Y = 7{,}212 \sin 65^0\,10' = 6{,}544$; die Höhe $Z = 0{,}472 + 0{,}337 = 0{,}809$.

Nr. 3. Eine Lothlinie hat kein Streichen und keine Ebensohle; es gilt folglich für ihren Fusspunkt die Länge und Breite ihres Kopfes; die Höhe Z aber ist, da der Zug abwärts geht, $= 0{,}809 - 0{,}367 = 0{,}442$.

Nr. 4. Die Seigerhöhe über den Endpunkt von Nr. 2 ist $= 0{,}741 \sin 2^0\,30' = 0{,}032$; die Ebensohle $= 0{,}741 \cos 2^0\,30' = 0{,}740$; die Breite $X = 2{,}952 + 0{,}74 \cos 65^0\,10' = 3{,}255$; die Länge $Y = 6{,}544 + 0{,}74 \sin 65^0\,10' = 7{,}216$; die Höhe $Z = 0{,}809 + 0{,}032 = 0{,}841$.

Tabelle B.

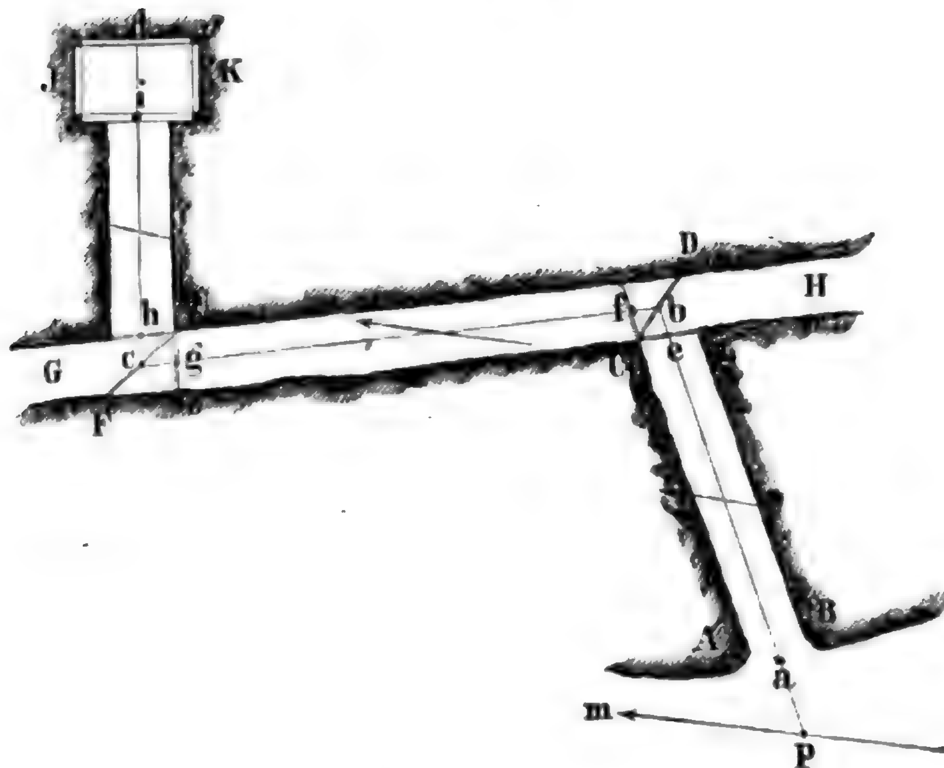
Schnur.	Schnurmass.	Steigen + Fallen −	Tonnlagewinkel.		Streichwinkel.		Seigerhöhe.	Ebensohle.	Breite X.	Länge Y.	Höhe Z.	Bemerkungen.
Nr.	Lachter.	±	Grad.	Min.	Grad.	Min.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	
1	0,472	+	90	—	—	—	+ 0,472	0	0	0	0,472	Anfangspunkt am Stollenmundloche.
2	7,218	+	2	30	65	10	+ 0,337	7,212	2,952	6,544	0,809	
3	0,367	—	90	--	—	—	— 0,367	0	2,952	6,544	(0,442)	Fusspkt der Schnur Nr. 3.
4	0,741	+	2	30	65	10	+ 0,032	0,740	3,255	7,216	0,841	
5	0.812	—	3	55	335	30	— 0,055	0,810	3,992	6.880	0,786	
6	0,278	—	90	—	—	—	— 0,278	0	3,992	6,880	(0,508)	Fusspkt der Schnur Nr. 6.
7	6.410	—	3	55	335	30	— 0,438	5,833	9,300	4,461	0.348	
8	0,325	—	90	—	—	—	— 0,325	0	9,300	4,461	(0,023)	Fusspkt der Schnur Nr. 8.
9	1,015	+	3	55	335	30	+ 0,068	1.014	10,210	4,046	0,416	
10	0,874	+	4	25	82	45	+ 0,067	0,871	10,320	4,910	0,483	
11	0,288	—	90	—	—	—	— 0,288	0	10,320	4,910	(0,195)	Fusspkt der Schnur Nr. 10.
12	3,421	+	4	25	82	45	+ 0,263	3,411	10,750	8,294	0,746	
13	0,327	—	90	—	—	—	— 0,327	0	10,750	8,294	(0,419)	Fusspkt der Schnur Nr. 13.
14	1,250	+	4	25	82	45	+ 0,096	1,246	10,907	9,530	0,842	
15	0,320	—	90	—	—	—	— 0,320	0	10,907	9,530	(0,522)	Endpunkt an der hinteren Grundschwelle des Josephschachts; zugleich Fusspunkt der Schnur Nr. 15.

Nr. 5. Die Breite X ist $= 3{,}255 + 0{,}81 \cos 335^0\, 30' = 3{,}255 + 0{,}737 = 3{,}992$; die Länge $Y = 7{,}216 + 0{,}81 \sin 335^0\, 30' = 7{,}216 - 0{,}336 = 6{,}880$.

Nr. 15. Die Hauptbreite des ganzen Zugs ist $= 10{,}907$; die Hauptlänge $= 9{,}530$; die Haupthöhe $= 0{,}522$; der Hauptstreichwinkel Σ, welcher sich aus der Gleichung $10{,}907 \operatorname{tg} \Sigma = 9{,}530$ ergibt, $= 41^0\, 8'$.

2) Lösung der Aufgabe mit dem Theodolithen und Nivellirinstrument. Mit Bezug auf Fig. 195 wird man zuerst den Theodolithen in b aufstellen und nach einander zwei in a und c angebrachte Signale, wovon a ein Tagsignal ist, anvisiren, um den Horizontalwinkel a b c zu erhalten. Hat man sonst kein Mittel, das Polygon a b c i zu orientiren, so misst man mit dem auf dem Grubentheodolithen befestigten Compass auch den Streichwinkel der Linie b c, womit zugleich die Lage des Schenkels a b gegen die Mittagslinie bestimmt ist. Ebenso misst man, nachdem vorher in b und i Grubensignale aufgestellt wurden, in dem Punkte c den Horizontalwinkel b c i und nochmals das Streichen der Linie c b. Mit dem Winkel b c i ist alsdann auch das Streichen der Linie c i bekannt. Wäre über Tage, etwa in dem Punkte p, die Richtung der Mittagslinie p m gegeben, so dürfte man nur in p den Horizontalwinkel m p b messen, um damit auch die Neigung aller Polygonseiten a b, b c, c i gegen die Mittagslinie zu finden. Die horizontalen

Fig. 195.



Entfernungen a e, a b, b f, b g, b c . . . werden mit der Lachterkette oder dem Lachterstabe bestimmt, welche man am zweckmässigsten auf Dachlatten, die in den Richtungen des Zugs liegen, abzieht oder abschiebt. Ist auf die angegebene Weise die Horizontalprojection des Markscheidezugs festgestellt, so nimmt man die Verticalprojection desselben entweder mittels des früher erwähnten Setzniveau's oder auch mit einem gewöhnlichen Nivellirinstrumente auf. Die Handhabung des Setzniveau's ergibt sich aus Bd. I, §. 229, und was das Nivelliren betrifft, so unterscheidet sich dasselbe vom Nivelliren über Tage gar nicht und ist darüber lediglich zu bemerken, dass man wegen der Finsterniss in den Grubenräumen, welche das Ablesen durch das Fernrohr verbietet, statt der Reichenbach'schen Nivellirlatte eine Schieblatte anwendet, deren Zieltafel in der Mitte eine horizontale, von hinten erleuchtete Spalte (h f, Fig. 269 im I. Band) hat, die in die Visirlinie eingestellt wird.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass, wenn einmal nach den Seiten a b, b c, c d Latten gelegt sind, die Horizontalabstände der Punkte e, b, f am kürzesten mittelbar aus den schiefen Entfernungen und den mit dem Setzniveau gemessenen verticalen Neigungswinkeln bestimmt werden, und dass die Aufzeichnungen in dem Zug- und Schinbuche nur zum Theil nach den Tabellen A und B geschehen können und eines anderen leicht zu findenden Schema's bedürfen.

§. 179. **Aufgabe. Einen Markscheidezug in einem Schachte und einer Strecke von starker Neigung vorzunehmen und zu berechnen.**

In sehr stark geneigten Strecken, wie Fig. 198 zwischen A und B eine vorstellt, lässt man stets eine flache Schnur mit einer seigeren abwechseln.

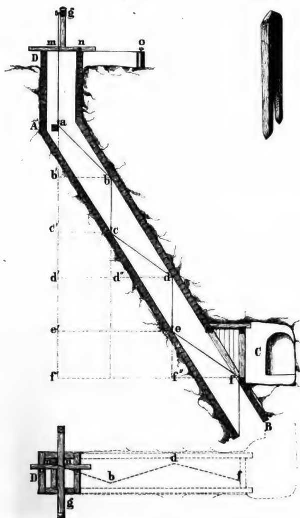


Fig. 198. Fig. 199.

Die erste Schnur geht hier von einem in dem Balken g des Schachthauses befestigten Senkeleisen aus und reicht bis zu der Stelle a, wo die geneigte Strecke beginnt: sie wird nach §. 172 behandelt. Von a aus zieht man die zweite Schnur a b an das Hangende, misst sie nach §. 171 aus und bestimmt nach den §§. 173 und 174 ihren Streich- und Tonnlagewinkel. Hat man ferner den Punkt b auf das Liegende bei c gesenkelt und die Seiger-

höhe b c gemessen, so verfährt man mit der Schnur c d wie mit a b; senkelt dann d nach e, misst d e, und zieht endlich e f bis zur Grundschwelle f der Strecke c, worauf man wieder die Länge, das Streichen und die Tonnlage von e f misst. Reicht die Strecke A B noch weiter hinab, so wiederholt sich das oben angedeutete Verfahren so oft, bis die tiefste Stelle der Strecke erreicht ist.

Die Aufzeichnungen des in Rede stehenden Zugs geschehen nach dem Schema A, die Berechnungen nach den Formeln Nr. 343 bis Nr. 345 und die Einschreibungen in das Schinbuch nach dem Schema B, Seite 367. Man wird hiernach leicht im Stande sein, die gesammte Tiefe des Schachtes A D und der Strecke $A B = m f' = m a + a b' + b' c' + c' d' + d' e' + e' f'$, sowie den Horizontalabstand der Punkte m und $f = f f' = b b' + d d'' + f f''$ anzugeben und, wenn auch die Abstände der Ulmen von den Schnüren gemessen und aufgezeichnet wurden, den Grund- und Aufriss des Schachtes und der Strecke A B zu zeichnen.

Bei starken Neigungen der Schnur muss dafür gesorgt werden, dass der Compass und der Gradbogen nicht rutschen. Dieses Rutschen wird aber entweder durch die im ersten Bande, §. 191 beschriebenen Zwingen, welche von Messing sein müssen, damit sie nicht auf die Magnetnadel wirken, oder durch ganz einfache hölzerne Kluppen (Fig. 199), welche etwa 3 Zoll lang, $^1/_2$ Zoll breit und $^1/_4$ Zoll dick und so weit ausgeschlitzt sind, dass sie auf die Schnur gezwängt werden können, verhindert.

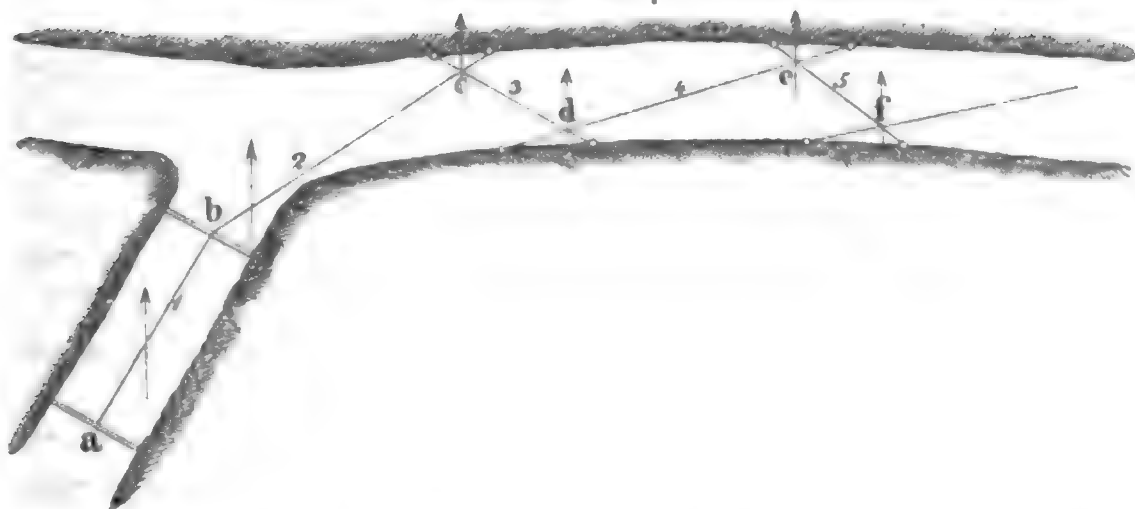
§. 180. Aufgabe. Einen Markscheidezug in solchen Gruben vorzunehmen, wo die Magnetnadel abgelenkt wird.

Gestatten es die Räumlichkeiten, so nimmt man den Zug mit dem Grubentheodolithen oder Messtische vor und setzt die Aufnahme nach einer oder zwei Richtungen so weit fort, dass schliesslich eine Orientirung gegen die Mittagslinie stattfinden kann. Muss aber wegen beschränkten Raums mit dem Hängecompass gearbeitet werden, so bedient man sich am zweckmässigsten des von Rittinger empfohlenen Verfahrens, durch welches die aus der Abweichung der Magnetnadel entspringenden Fehler eliminirt werden.

Dieses Verfahren beruht auf der richtigen Voraussetzung, dass die Ablenkung der Magnetnadel an ein und derselben Stelle während der Messung des Winkels zweier Richtungen sich nicht ändert, und besteht demzufolge darin, dass man zwei an den Scheiteln der Winkel sich kreuzende Schnüre zieht, an den Kreuzungspunkten die (um die Ablenkung δ falschen) Streichwinkel jeder Schnur abnimmt, und den Zug so weit fortsetzt, bis wenigstens eine Schnur ausserhalb des Bereichs der magnetischen Ablenkung kommt.

In Fig. 200 stelle a b diese Schnur vor, während die übrigen in einer Strecke liegen, die magnetische Ablenkungen veranlasst. An der Schnur a b wird nun die Länge, die Tonnlage und das Streichen, an allen übrigen Schnüren b c, c d, d e . . . aber nur die Länge und Tonnlage auf bekannte Weise gemessen. Die Horizontalwinkel b c d, c d e, d e f . . . ergeben

Fig. 200.



sich dadurch, dass man den Compass in dem Punkte c zuerst an die Schnur b c und dann an die Schnur c d, in dem Punkte d zuerst an die Schnur c d und hierauf an d e, in dem Punkte e zuerst an e d und hierauf an e f hängt und jedesmal den Stand der Nadel abliest. Sind nun die Ablesungen in c um die Grösse δ falsch, so gibt ihre Differenz doch den richtigen Winkel b c d, weil jede Ablesung um δ falsch ist; beträgt die Ablenkung in d den Winkel δ', so erhält man aus den beiden Ablesungen in d, indem man sie in der rechten Weise subtrahirt, doch den richtigen Winkel c d e; und ebenso findet man d e f und alle übrigen Horizontalwinkel des Zugs.

Ueber die practische Ausführung dieser Art des Verziehens ist zu bemerken, dass die Kreuzung der Schnüre nicht unter zu stumpfen Winkeln erfolgen soll, wesshalb man gerne zwischen zwei längere Schnüre eine kürzere (wie c d zwischen b c und d e, e f zwischen e d und f g) einschaltet; ferner dass die kreuzenden Schnüre, nachdem sie angespannt sind, an der Kreuzungsstelle sich gerade berühren und der Sicherheit wegen daselbst mit Bindfaden verbunden werden sollen; ferner dass der Drehpunkt der Magnetnadel bei den zwei Lagen des Compasses lothrecht unter dem Kreuzungspunkte sich befinden soll; und dass endlich bei den Aufschreibungen im Zugbuche angemerkt werden muss, ob die folgende Schnur von der vorhergehenden sich rechts oder links abwendet, wenn man sich in den Winkel gestellt und auf den Scheitel blickend denkt. Das Schema der Aufschreibung kann mit Bezug auf die Fig. 200 etwa das auf nächster Seite folgende sein.

Zur Erläuterung dieser Aufschreibung fügen wir noch folgende Anmerkungen bei:

1) Würden die Ablenkungen der Magnetnadel an allen Stellen gleich sein, so müssten die abgelesenen vorangehenden und nachfolgenden Streichwinkel einer jeden Schnur gleich sein, was sie hier nicht sind.

2) Der äussere Vieleckswinkel, durch Verlängerung der vorhergehenden Schnur entstehend, wird durch Subtraction der beiden Ablesungen erhalten, wenn, wie hier geschehen, bei der Aufhängung des Compasses der Null-

Tabelle C.

Schnur Nr.	Wendung der Schnur.	Abgelesenes Streichen der voran-gehenden Schnur.	Abgelesenes Streichen der nach-folgenden Schnur.	Aeusserer Vielecks-winkel.	Wahres Streichen gegen die Magnetlinie.	Wahres Streichen gegen die Mittagslinie.	Bemerkungen.
1			30° 40′		30° 40′	15° 15′	Orientirungslinie. Bei b noch keine Ablenkung bemerkbar.
2	rechts	30° 40′	65° 15′	34° 35′	65° 15′	49° 50′	
3	rechts	66° 30′	115° 50′	49° 20′	114° 35′	99° 10′	
4	links	115° 25′	45° 10′	70° 15′	44° 20′	28° 55′	
5	rechts	45° 10′	138° 35′	93° 25′	137° 45′	122° 20′	

Mit dem Compass Nr. 3, dessen westliche Abweichung 15° 25′ betrug, aufgenommen am . . . . durch . . . .

punkt des Gradrings immer vor dem Winkelscheitel, also bei c z. B. gegen b und den linken Anfangspunkt der Schnur Nr. 3 liegt.

3) Das wahre Streichen gegen die Magnetlinie ergibt sich aus dem wahren Streichen der Orientirungslinie a b und den Polygonwinkeln, indem man bei rechtsseitigen Wendungen der Schnur die äusseren Polygonwinkel zu dem Streichen der vorhergehenden Schnur addirt, bei linksseitigen Wendungen aber subtrahirt.

4) Zieht man endlich von dem Streichen gegen die Magnetlinie die westliche Declination der Magnetnadel, nämlich 15° 25′, ab, so ergibt sich schliesslich das wahre Streichen gegen die Mittagslinie. Alle übrigen Aufzeichnungen können nach dem Schema A geschehen.

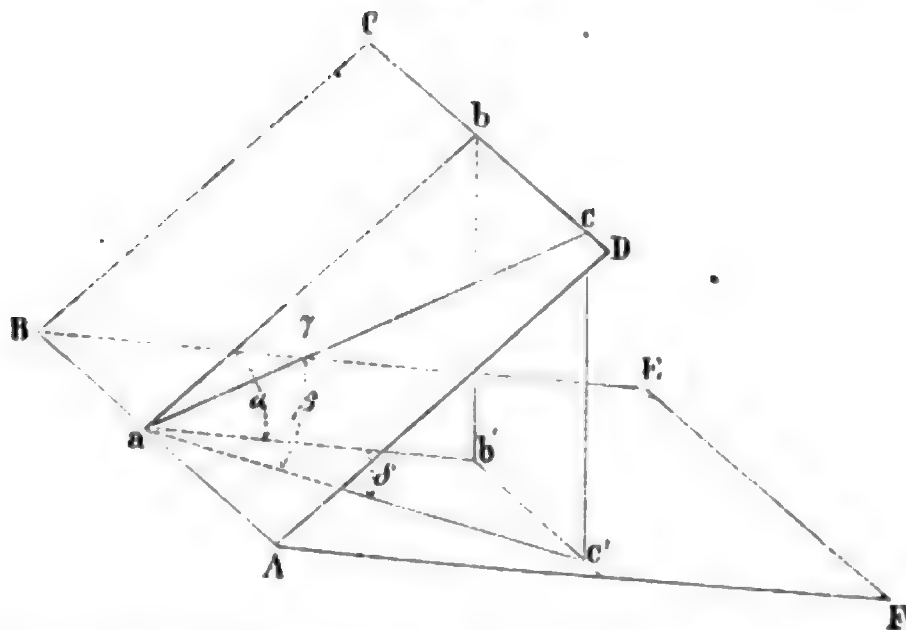
Ausser dem eben beschriebenen Verfahren lässt sich auch noch ein anderes anwenden, welches darin besteht, dass man durch die ganze Strecke zusammenhängende Schnurdreiecke bildet, deren drei Seiten und Tonnlagewinkel misst, und dieses Dreiecksnetz an eine bereits orientirte Seite anschliesst. Diese Operation ist aber umständlicher und auch weniger genau als die vorhergehende, da sich sehr spitze und sehr stumpfe Dreieckswinkel nicht vermeiden lassen, ohne eine grosse Anzahl von kleinen Dreiecken. Sie findet daher wenig Anwendung. Dasselbe gilt auch von dem Verziehen mit der Eisenscheibe, welche ein unbehilfliches Ersatzmittel für den Grubentheodolithen ist.

D. Markscheide-Aufgaben.

§. 181. Aufgabe. Aus dem bekannten Fallen einer Lagerstätte die Richtung einer Strecke von bestimmter Steigung, welche darauf getrieben werden soll, anzugeben.

Es sei A C in Fig. 201 die Lagerstattebene, A E eine Horizontalebene, a b die Falllinie, a b′ deren Ebensohle, a c die gesuchte Streckenrichtung

Fig. 184.



und a c' ihre horizontale Projection. Beobachtet sei der Fallwinkel b a b' $= \alpha$ und gegeben die Steigung der Strecke a c $= \beta$; gesucht wird entweder der Winkel b a c $= \gamma$, welchen die Strecke mit der Falllinie bildet, oder dessen horizontale Projection b' a c' $= \delta$.

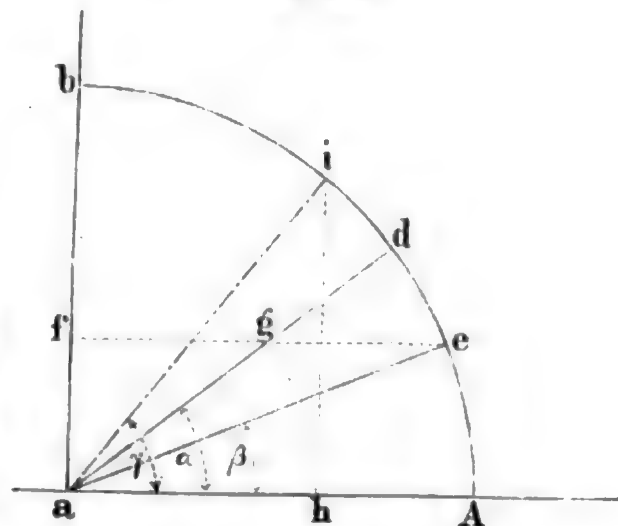
Die Lösung der vorstehenden Aufgabe ist bereits durch die Gleichungen (339) und (340), welche mit Bezug auf die vorstehende Figur entwickelt wurden, gegeben; denn man erhält aus der ersteren

$$\cos \gamma = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

und aus der letzteren

$$\cos \delta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Fig. 202.



Will man den Winkel γ durch Construction finden, so zeichne man nach Fig. 202 einen rechten Winkel A a b, in welchem a b die Falllinie und A a die Streichlinie vorstellt. Ueber demselben beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser a b $=$ r einen Viertelkreis und trage an den Schenkel a A den Winkel $\alpha =$ A a d und $\beta =$ A a e an. Fällt man von dem Punkte e aus die Senkrechte e f auf a b, beschreibt mit a g den Kreisbogen g h, macht h i senkrecht zu a A und zieht schliesslich die Gerade i a: so stellt i a h den gesuchten Winkel γ vor. Denn es ist nach der Construction

$$\text{a f} = \text{a e} \,.\, \sin \beta = \text{a g} \,.\, \sin \alpha = \text{a h} \,.\, \sin \alpha$$

und folglich

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\text{a h}}{\text{a e}} = \frac{\text{a h}}{\text{r}}.$$

Ferner ist der Winkel b a i = a i h und nach der Figur

$$\sin (a\,i\,h) = \frac{a\,h}{a\,i} = \frac{a\,h}{r}.$$

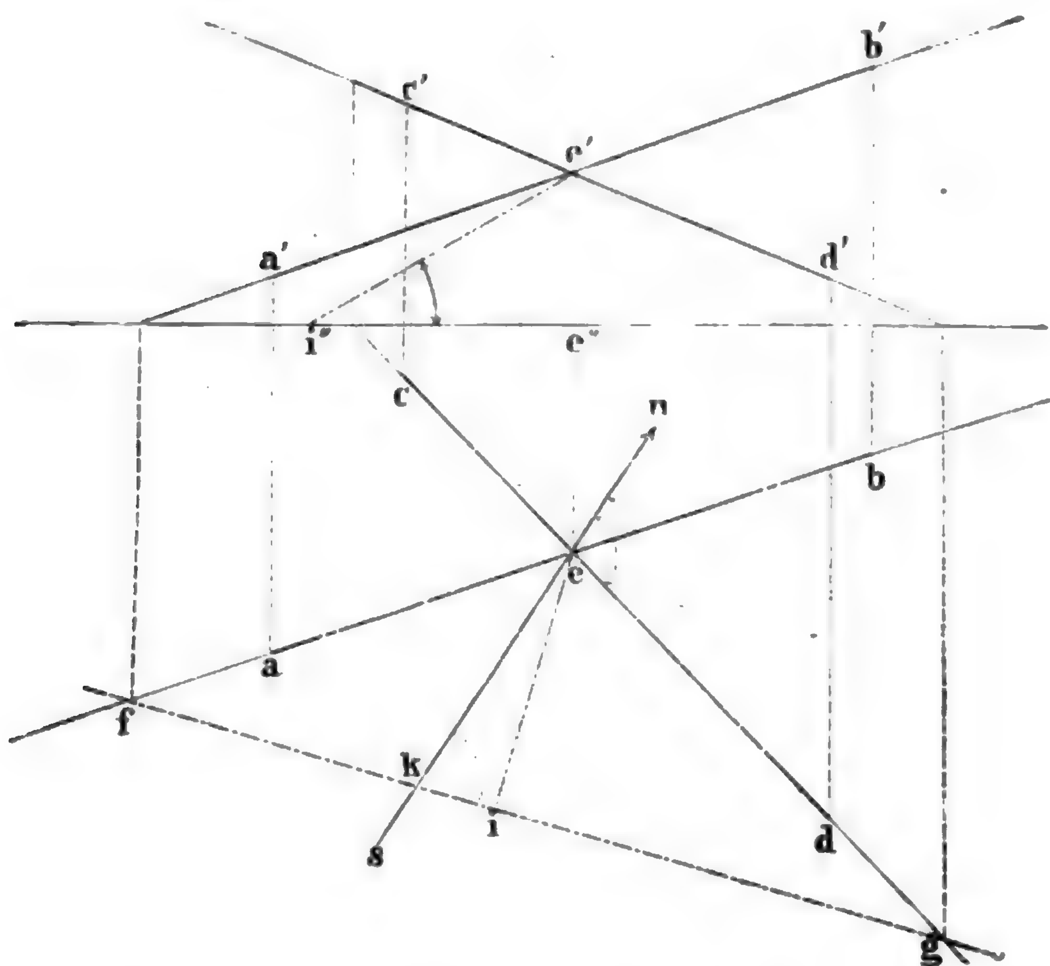
Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sin (a\,i\,h) = \cos (i\,a\,h);$$

da aber das Verhältniss von $\sin \beta : \sin \alpha = \cos \gamma$ ist, so muss nothwendig $i\,a\,h = \gamma$ sein.

§. 182. **Aufgabe. Von zwei in einer Lagerstattebene sich kreuzenden Strecken kennt man die horizontalen und verticalen Projectionen: es soll hieraus das Streichen und Fallen jener Ebene abgeleitet werden.**

Fig. 203.



Reicht zur Bestimmung des Streichens und Fallens die Zeichnung aus, so suche man zunächst die Schnittlinie der durch die Strecken gegebenen Lagerebene mit der horizontalen Projectionsebene und ziehe darauf die bekannte Richtung der Mittagslinie, so ist der Streichwinkel gefunden, da jene Schnittlinie die Streichlinie ist. Alsdann lege man durch den Schnittpunkt der Strecken eine Senkrechte zur Streichlinie und bestimme deren Neigungs-

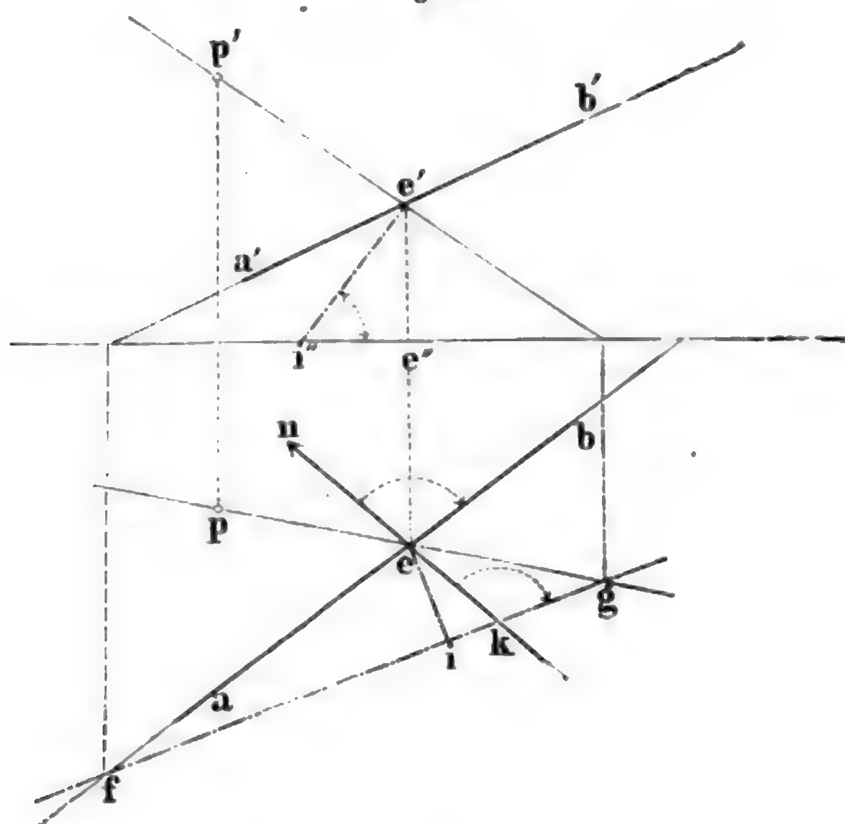
winkel mit der horizontalen Projectionsebene: so ist dieses der gesuchte Fallwinkel.

Sind a b, a' b' und c d, c' d' in Fig. 203 die horizontalen und verticalen Projectionen der in dem Punkte e, e' sich schneidenden geraden Strecken A B, C D, so findet man auf bekannte Weise die horizontalen Durchgänge f und g der Geraden A B und C D; daher die Streichlinie = f g. Stellt s n die Mittagslinie vor und verlängert man dieselbe bis zu f g, so ist, wie man leicht sieht, der erhabene Winkel f k e dem gesuchten Streichwinkel gleich.

Zieht man weiter e i senkrecht zu f g, macht e'' i'' = e i und verbindet e' mit i'', so ist e' i'' e'' der gesuchte Fallwinkel.

Wer mit den Rechnungen der analytischen Geometrie vertraut ist,

Fig. 204.



wird hiernach die beiden gesuchten Winkel auch berechnen können; wer es aber nicht ist, dem nützt auch eine Ableitung dieser Winkel Nichts. Wir übergehen daher die Bestimmung des Fallens und Streichens durch Rechnung um so mehr, als in den meisten practischen Fällen der vorliegenden Art die Construction allein ausreicht.

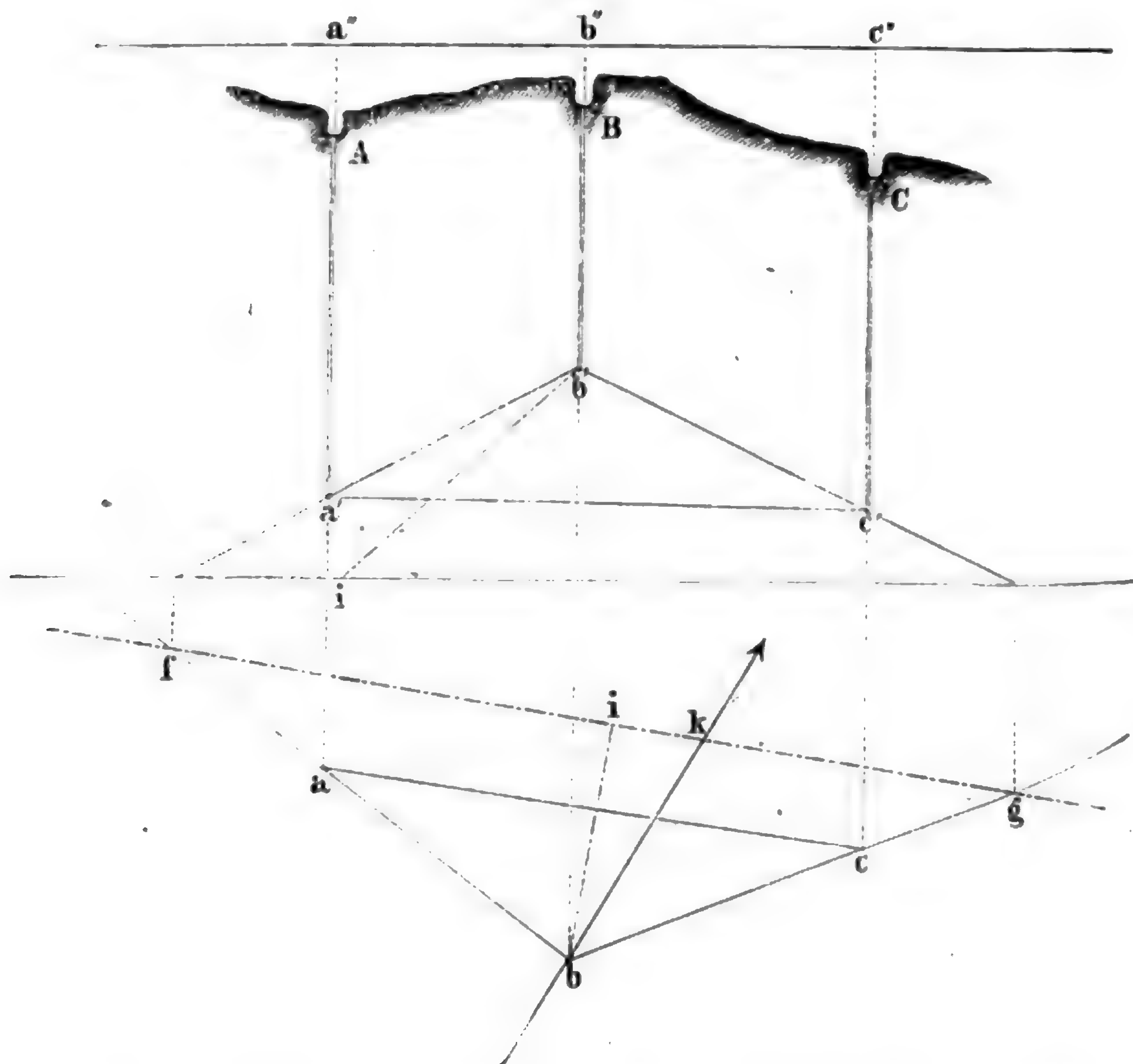
§. 183. Aufgabe. Von einer Lagerstattebene sind eine gerade Strecke und ein Punkt durch ihre Projectionen gegeben: man soll das Streichen und Fallen dieser Lagerstätte bestimmen.

Die Lösung dieser Aufgabe führt sofort auf die des vorhergehenden Paragraphen zurück, wenn man sich durch den gegebenen Punkt p, p' (Fig. 204) eine Gerade p e, p' e' gelegt denkt, welche die gegebene Strecke

a b, a' b' unter einem beliebigen Winkel schneidet. Man findet alsdann die Streichlinie f g aus den Horizontaldurchgängen f, g der Linien a b, a' b' und p e, p' e' und damit den Streichwinkel g k e, wenn e k die Richtung der Mittagslinie ist. Ebenso erhält man aus der Senkrechten e i und dem Abstande e e'', indem man das rechtwinklige Dreieck e' e'' i'' construirt, den gesuchten Fallwinkel = e' i'' e''.

Hinsichtlich der Berechnung des Fallens und Streichens, welche auch an die Stelle der Construction treten kann, gilt die Schlussbemerkung des vorhergehenden Paragraphen.

Fig. 205.



§. 184. **Aufgabe. Aus drei ihrer gegenseitigen Lage nach bekannten Punkten einer Lagerstätte deren Streichen und Fallen zu bestimmen.**

Es kommt im practischen Bergbaue sehr oft vor, dass man eine Lagerstätte bloss aus drei Bohrlöchern, welche bis zu derselben hinabführen, zu bestimmen hat. Soll diese Bestimmung möglich sein, so muss man die Coordinaten der Fusspunkte jener drei Bohrlöcher gegen drei Axen kennen,

wovon eine lothrecht steht und zwei horizontal sind, und von denen wiederum eine mit der Mittagslinie parallel läuft; oder mit anderen Worten: es müssen die horizontalen und verticalen Projectionen jener drei Punkte und die Richtung der Mittagslinie bekannt sein.

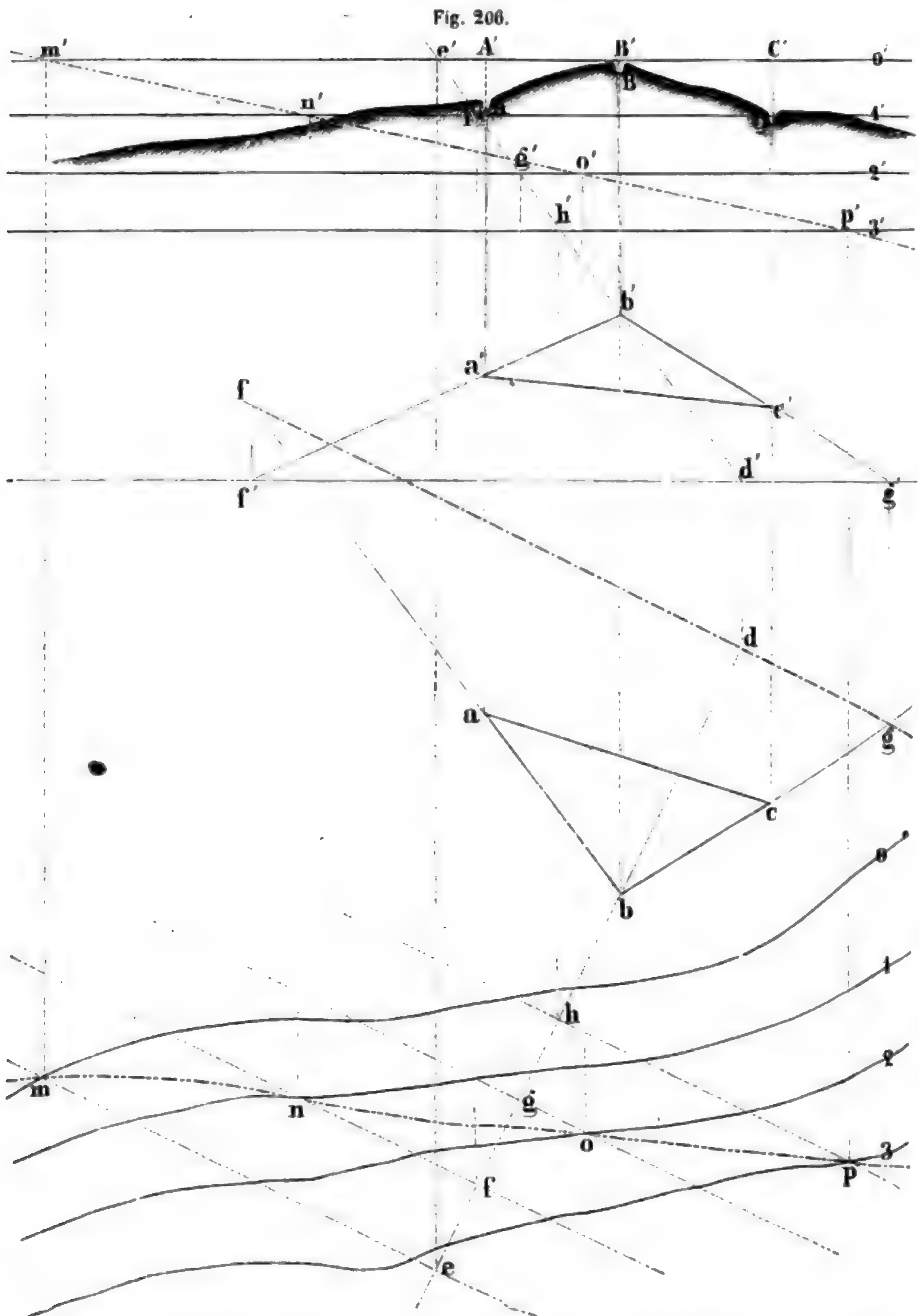
Sind A, B, C (Fig. 205) die drei Stellen, von denen aus die Bohrlöcher abgeteuft werden, so hat man erstens die horizontale Projection a b c des Dreiecks A B C und die Neigung einer Seite desselben gegen die Mittagslinie auf bekannte Weise zu bestimmen, zweitens die drei Punkte A, B, C in Bezug auf eine beliebige Horizontalebene einzunivelliren, und drittens die Tiefen A a', B b', C c' an den Erdbohrern abzunehmen, ehe zur Bestimmung des Streichens und Fallens der Lagerstätte geschritten werden kann. Kennt man aber diese Daten, so lässt sich die Aufgabe auf constructivem Wege nach §. 182 lösen, da durch die Projectionen a, b, c und a', b', c' dreier in der Lagerstätte liegenden Punkte auch drei Paare sich kreuzender Richtungen gegeben sind.

§. 185. Aufgabe. Das Ausbeissen einer Lagerstätte über Tage zu bestimmen, wenn deren Streichen und Fallen aus drei Bohrlöchern bekannt ist.

Es seien in Fig. 206 A, B, C die drei Bohrlöcher und a, a', b, b', c, c', die Projectionen ihrer Fusspunkte; f g, f' g' stelle die gegebene Streichlinie, b d, b' d' die zu f g senkrechte Falllinie vor und 0, 0', 1, 1', 2, 2', 3, 3' .... seien die Projectionen der Schnitte der Terrainoberfläche durch horizontale Ebenen, welche gleichweit (etwa 10') von einander abstehen: die Aufgabe ist, die Linie m n o p, m' n' o' p' zu suchen, nach welcher das Lager zu Tage ausgeht. Verlängert man die Falllinie bis zur obersten Horizontalebene, so wird diese und jede andere Horizontalebene von ihr geschnitten. Zieht man nun in dieser Ebene durch die Schnittpunkte zur Streichlinie parallele Gerade, so liegen diese gleichzeitig auch in der Lagerebene und stellen deren Horizontalschnitte vor. Jeder solche gerade Schnitt wird, hinreichend erweitert, die seiner Ebene angehörende Horizontalcurve der Terrainfläche treffen, und jeder solche Durchgang ist ein Punkt der gesuchten Ausbeissungslinie.

Um die Zeichnung nach dieser Anleitung auszuführen, verlängere man die Verticalprojection b' d' bis e' und bestimme die Horizontalprojection e des Punkts e, e'. Durch e ziehe man e m parallel zu f g bis die Horizontalcurve 0 in m getroffen wird, so ist m, m' ein Ausbeissungspunkt. Ebenso suche man zu dem Schnittpunkte h' die Horizontalprojection h, lege durch h die Parallele h p zu f g und verlängere sie, bis die Horizontalcurve 3 von ihr geschnitten wird, so ist p, p' abermals ein Punkt der Ausbeissungslinie. Zwischen e' und h' liegen die Schnittpunkte f', g' in gleichen Entfernungen: darum theile man in der Horizontalprojection den Abstand e h in drei gleiche Theile und ziehe durch f, g die Parallelen f n, g o, so ergeben sich schliesslich auch noch die Punkte n, n' und o, o' der gesuchten Linie m n o p, m' n' o' p'.

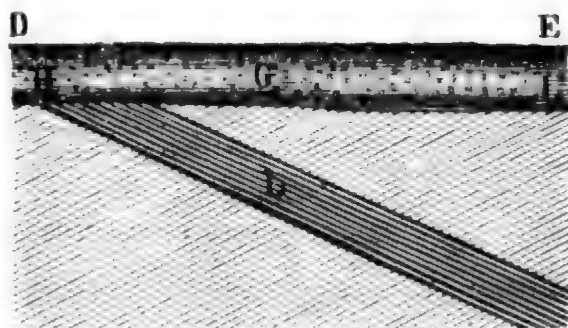
Fig. 206.



Wäre nach Fig. 207 das Lager L von einem jüngeren Gebilde G überdeckt, so dass jenes nicht zu Tage austreten könnte, so dürfte man sich nur vorstellen, dass die Horizontalcurven 0, 1, 2, 3 .... nicht der Terrainoberfläche D E, sondern der Grundfläche H J des überdeckenden Gebilds

angehören, um nach der vorstehenden Anleitung das Ausbeissen unter der Voraussetzung zu finden, dass die Ueberlagerung entfernt worden sei. Sollte nun die Lagerstätte an ihrem oberen Rande entblösst werden, so wäre lediglich die Horizontalprojection m n o p auf dem Terrain abzustecken und überall die Mächtigkeit des Gebildes G zu durchsenken.

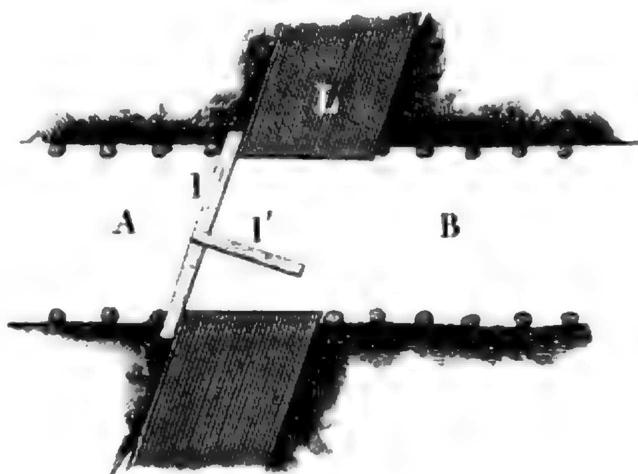
Fig. 207.



§. 186. **Aufgabe. Das wahre Streichen und Fallen einer Lagerstätte anzugeben, welche bloss durch einen Schlag gekreuzt wird.**

Stellt L in Fig. 208 die Lagerstätte vor, welche weder auf der Sohle noch auf dem Dache entblösst ist, sondern nur von einer Strecke oder einem Schlage A B gekreuzt wird, so durchfahre man erst die ganze Mächtigkeit des Lagers und suche hierauf mittels einer Latte (l) und Setzwage an dem Hangenden oder Liegenden (hier an dem Hangenden) der Lagerstätte durch Abgraben zwei Punkte (m, n) auf, welche in einer Horizontalebene liegen, und messe hiernach das Streichen mit dem Setzcompass. Alsdann lege man eine zweite Latte (l′) senkrecht zur ersten und so, dass sie ober- oder unterhalb der letzteren an einem Punkte des Hangenden oder Liegenden (hier des Hangenden) ansteht und folglich in die Dach- oder Sohlebene (hier in die Dachebene) der Lagerstätte fällt. Misst man nun den Neigungswinkel dieser Latte gegen den Horizont mit dem Gradbogen oder dem Setzniveau, so stellt dieser das gesuchte Fallen der Lagerstätte vor.

Fig. 208.



§. 187. **Aufgabe. Ein in der Grube gegebener Punkt soll in seiner Verticallinie über Tag, und ausserdem die Länge dieser Linie angegeben werden.**

Diese Aufgabe, welche sich bergmännisch auch so ausdrücken lässt: „einen Grubenpunkt seiger an den Tag überzutragen,“ oder so: „den Feldort eines Grubenpunkts anzugeben,“ hat der Markscheider sehr oft zu lösen; denn angenommen z. B., es sei nach Fig. 209 der Tagstollen a b sehr lang, so wird die Luft in dem Kreuzschlage b c sowohl das Brennen der Lichter als das Athmen der Bergleute sehr erschweren, wesshalb zur Verbesserung der Luft entweder ein Wetterbohrloch oder ein Wetterschacht

abgeteuft werden muss. Soll nun die Abteufung in einem bestimmten Punkte c der Grube eintreffen, so ist dessen Oertung über Tage (Feldort, Projection) genau anzugeben.

Um dieses zu bewirken, wird man vor allen Dingen einen Markscheidezug in der Grube ausführen und diesen an die vor dem Stollenmundloche a ausgesteckte Mittagslinie s n anknüpfen: hierdurch findet man die Länge, Breite und Höhe des Punkts c in Bezug auf den Fixpunkt p und die rechtwinkligen Axen p s, p o, p z, von denen die letztere lothrecht ist. An diese Axen und den Fixpunkt p anschliessend, steckt man über Tage ein Polygon p q r t u v bis zu einer Stelle hin aus, von der man glaubt, dass sie lothrecht über c liege. Dieses Polygon wird auf bekannte Weise nach seiner horizontalen und verticalen Projection aufgenommen und von jedem Eckpunkte werden die Coordinaten (x, y, z) oder Länge, Breite und Höhe berechnet. Unter den horizontalen Coordinaten werden zwei der Länge und

Fig. 209.

Breite von c ziemlich nahe kommen; wir wollen annehmen, die von v. Von diesem Punkte aus und im Anschlusse an die Polygonseite u v wird man nun leicht den Feldort c' finden. Denn trägt man an v die Mittagslinie s' n' an und errichtet darauf die Senkrechte o' w', so hat man die Axen parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung und die Coordinaten des Punkts v in die Lage v s', v o', v z' verschoben: es sind daher leicht die Coordinaten von c in Bezug auf diese neuen Axen zu berechnen und abzustecken. Hat man dieses aber gethan, so ist die Aufgabe gelöst, weil der Feldort c' und die Seigerhöhe c c', welche die Länge der Wetterführung angibt, bekannt sind.

§. 188. Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebener Punkt soll in die Grube übergetragen oder projicirt werden.

Diese Aufgabe behandelt den umgekehrten Fall der vorigen, wesshalb wir darauf verweisen und die Fig. 209 wiederholt anwenden.

Man wird demnach den Punkt c', dessen gesuchte Projection (Oertung) unter Tage ist, mit einem Fixpunkte p, der vor einem Stollenmundloche a steht, durch einen Polygon c u t r q p verbinden und die Coordinaten x, y, z aller Eckpunkte in Bezug auf die Axen p s, p o, p z berechnen. Hierauf schliesst man an dieselben Axen einen Grubenzug p a b f an und berechnet aus diesem einen Punkte b, der so liegt, dass, wenn von ihm aus ein Kreuzschlag b g unter einem Winkel $\beta = i\,b\,k$ gegen die Mittagslinie i b geführt wird, dieser Schlag durch das Loth von c' gehen, also zur unterirdischen Oertung c des Punkts c' führen muss, sobald die Strecke b c berechnet und hergestellt ist.

Um aber den Punkt b zu erhalten, verfahre man wie folgt. Es sei die Abscisse p e des Punkts $c = x_1$ und die Ordinate $c\,e = y_1$; die Richtung b c bilde mit der Mittagslinie den Winkel $i\,b\,c = \beta$ und die Richtung a b mit der Ostwestlinie den Winkel $b\,p\,o = \alpha$. Setzt man nun die gesuchte Abscisse von $b = p\,i = x$, die Ordinate $b\,i = y$ und den ebenfalls noch unbekannten Abschnitt $i\,k = m$, so ist (von den Vorzeichen abgesehen) aus der Aehnlichkeit der Dreiecke b i k und k c e:

$$m\,y_1 = (x_1 - x - m)\,y.$$

Setzt man in diese Gleichung die aus den rechtwinkligen Dreiecken b p i und b k i folgenden Werthe von $y = x \operatorname{tg} \alpha = x\,t$ und $m = y \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \beta = x\,t\,t'$, so findet man nach einander die gesuchten Coordinaten:

$$x = \frac{x_1 - y_1\,t'}{1 + t\,t'} \tag{346}$$

$$y = \frac{(x_1 - y_1\,t')\,t}{1 + t\,t'} \tag{347}$$

und hieraus die Hypotenuse p b des Dreiecks i p b gleich

$$l = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{x_1 - y_1\,t'}{(1 + t\,t') \cos \alpha}. \tag{348}$$

Mit dem berechneten Werthe von l kann man den Punkt b in der Grube abstecken, und ist dieser gefunden, so lässt sich die Richtung b c, deren Horizontalprojection die Länge

$$l' = \frac{y + y_1}{\cos \beta} = \frac{t\,x_1 + y_1}{(1 + t\,t') \cos \beta} \tag{349}$$

hat, leicht bezeichnen. Ist nun der Querschlag b g bis auf die horizontale Länge l' von b aus in den Berg getrieben, so kann c abgemessen und die Aufgabe als gelöst betrachtet werden.

§. 189. **Aufgabe. Eine auf dem Felde gegebene Markscheide soll in die Grube übergetragen werden.**

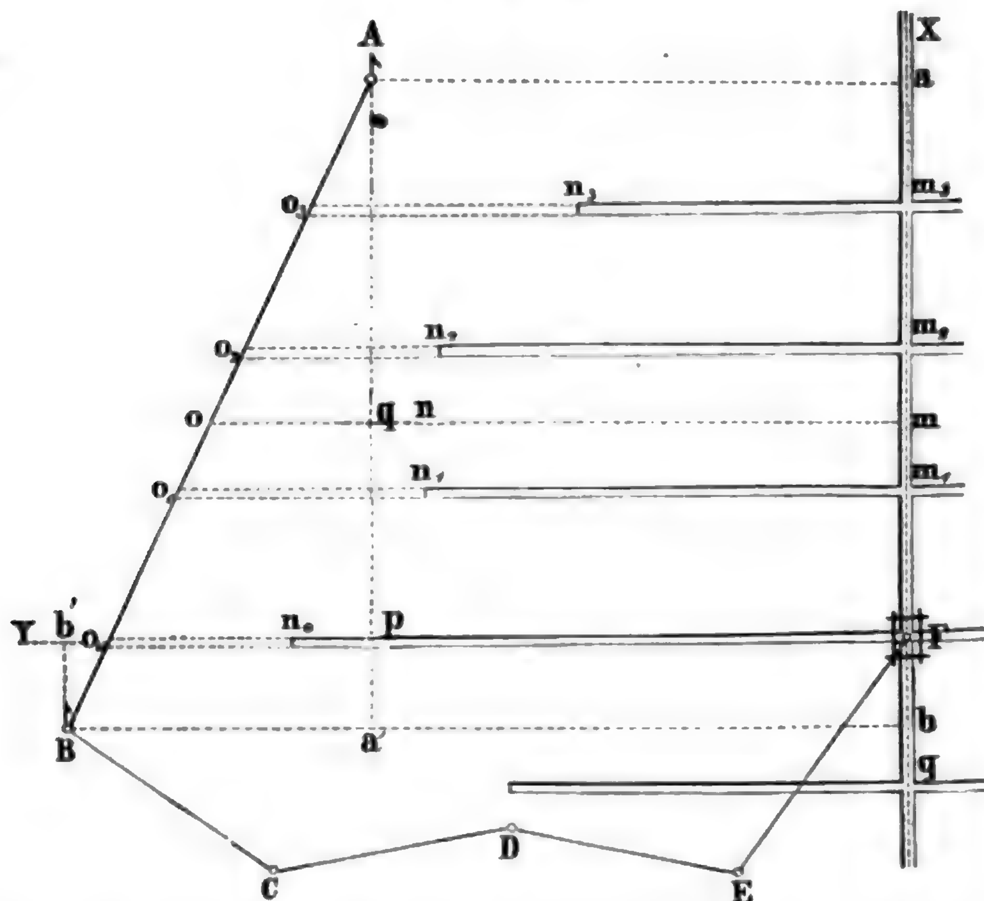
Die Markscheide sei auf dem Felde durch die Fixsteine A, B (Fig. 210) bezeichnet und die Grube, in welcher die durch A B gehende Verticalebene abzustecken ist, sei eine Kohlengrube. Für den Abbau des Kohlenflötzes seien bereits der Schacht F, in der Richtung des Falls F X die Strecke F a und in der Richtung des Streichens die Strecken $F\,n_0$, $m_1\,n_1$, $m_2\,n_2$, $m_3\,n_3$ . . . . angelegt. Es handelt sich also nur darum, die Längen $F\,o_0$

$= y_0$, $m_1 o_1 = y_1$, $m_2 o_2 = y_2$, $m_3 o_3 = y_3$ anzugeben, welche von F X bis an die Verticalebene A B reichen.

Zu dem Ende stecke man über Tage zwischen der Markscheide A B und dem Schachte F ein Polygon A B C D E F aus, nehme es in bekannter Weise auf und berechne die Coordinaten von A und B in Bezug auf die rechtwinkligen Axen F X und F Y. Das Ergebniss dieser Messung und Rechnung sei:

$$A p = + x', \quad A a = y'$$
$$B b' = - x'', \quad B b = y''.$$

Fig. 210.



Für irgend eine mit der Y-Axe parallele Strecke m n, deren Horizontalabstand von F = F m ist, erhält man die Länge

$$m o = \lambda = m q + q o = y' + \eta,$$

wobei A a' parallel der X-Axe gezogen und $q o = \eta$ gesetzt ist. Schreibt man

$$\mathrm{tg}\,(B A a') = \frac{B a'}{A a'} = \frac{y'' - y'}{x'' + x'} = t,$$

so folgt sofort aus dem rechtwinkligen Dreiecke A q o, wenn $F m = \zeta$ gesetzt wird:

$$\eta = (x' - \zeta)\, t$$

und daher durch Substitution dieses Werths in den Ausdruck für m o die Gleichung

$$\lambda = y' + (x' - \zeta)\, t. \tag{350}$$

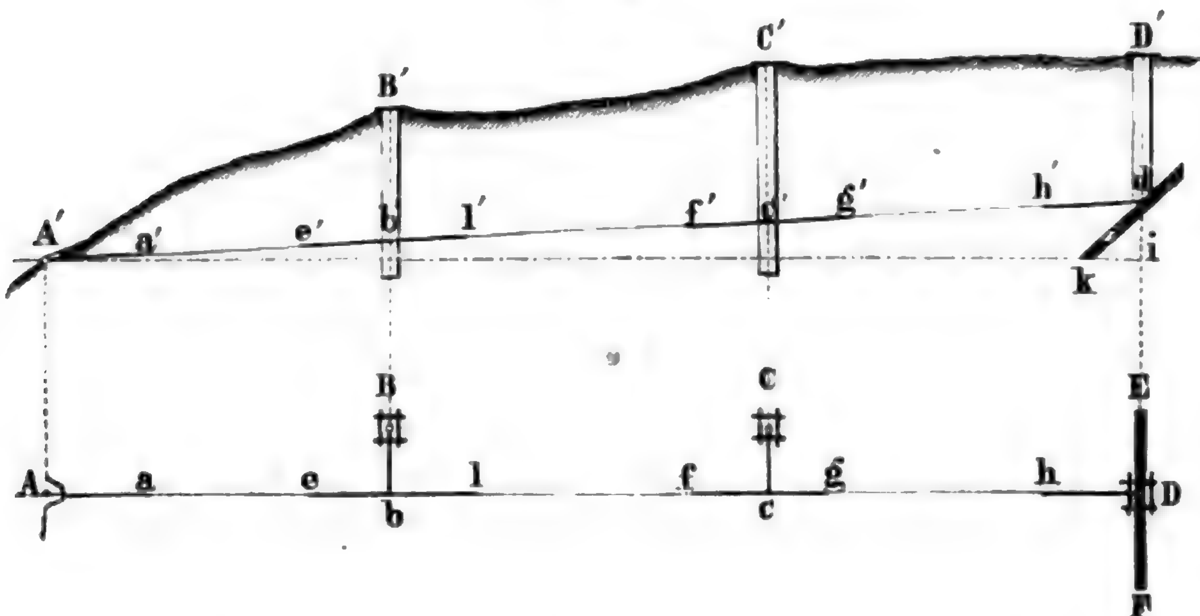
Setzt man hierin nach und nach für ζ die Werthe $0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots,$ so

findet man λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 .... und kann folglich damit, wenn die zugehörigen Strecken weit genug in den Berg getrieben sind, die Grenzpunkte o_0, o_1, o_2, o_3 .... durch Markscheidestufen und die Grenze selbst durch einen Querschlag bezeichnen.

§. 190. Aufgabe. **Einen Stollen mit Lichtschächten und Gegenortspunkten abzustecken.**

Stellt in Fig. 211 der schwarze Streifen EF den wagrechten und kd den lothrechten Durchschnitt einer Lagerstätte vor und soll von dem gegebenen Tagpunkte A, A' aus ein Stollen an diese Lagerstätte so geführt werden, dass er die kleinste Länge erhält und das Lager möglichst tief untersetzt: so muss seine Richtung senkrecht zur Streichlinie EF der Lagerstätte stehen, und seine Steigung α die kleinstmögliche sein. Ist nun durch einen Markscheidezug die Lage des gegebenen Punkts A, A' gegen die mit

Fig. 211.



EF parallele Streichlinie bestimmt, so steht damit auch die horizontale Projection AD der Stollenaxe fest, insofern sie EF senkrecht schneidet; und wenn man von A' aus eine Linie A'd mit der gegebenen Steigung α gegen die Horizontale Ai zieht, so hat man auch die verticale Projection A'd der Axe des Stollens.

Da die Lage des Punkts A gegen die Streichlinie der Lagerstätte als bekannt vorausgesetzt wird, so lässt sich die Absteckung der zur Streichlinie senkrechten Stollenrichtung auf dem Terrain nach den bereits bekannten Methoden für die Absteckung gerader Linien leicht bewirken. Diese Absteckung vorausgesetzt, erhält man die Lage des Endpunkts d des Stollens auf folgende Weise.

Man nivellirt die ausgesteckte Gerade bis zu einem (in Fig. 211 nicht mehr angedeuteten) Punkte L, an welchem die Lagerstätte entweder ausbeisst oder entblösst ist. Hierdurch erfährt man den Höhenunterschied $= h$ und die Horizontalprojection von $A'L = A'm = l$. Da auch der

Fallwinkel L k m = β bekannt ist, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke L k m die Länge von

$$k\,m = h \,.\, \cot \beta$$

und aus dem ebenfalls rechtwinkligen Dreiecke A′ m n die absolute Steigung des Stollens bis zur Verticalen L m gleich

$$m\,n = l \operatorname{tg} \alpha.$$

Mit diesen Grössen findet man aber leicht, was über die Lage von d zu wissen nöthig ist, nämlich

$$A'i = \frac{h - l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = s$$

$$d\,i = s \operatorname{tg} \alpha$$

$$A'd = \frac{s}{\cos \alpha}.$$

Sobald man A′ i kennt, kann man in der abgesteckten Stollenrichtung den Punkt D′ auf der Terrainoberfläche abmessen und somit die Oertung des Punkts d angeben. Aus dem Nivellement von A′ bis D′ ergibt sich auch die Tiefe des Schachtes D′ d.

Sollen in den Punkten B, C zur Seite der Geraden A D zwei Lichtschächte bestimmt werden, so erhält man die Tiefe derselben (B′ b′ und C′ c′) bis auf die Sohle des Stollens aus dem an die Linie A D geknüpften Nivellement der Punkte B, B′ und C, C′ in Verbindung mit den bekannten absoluten Steigungen des Stollens auf die Längen A b und A c. Die Schächte werden um 1 bis 2 Lachter tiefer gemacht, als die berechneten Grössen B′ b′ und C′ c′ verlangen, damit sich in der Vertiefung oder dem Sumpfe das Grubenwasser absetzen kann; die 3 bis 4 Lachter langen Querschläge B b und C c sind aber in der Höhe der Stollensohle anzulegen.

Damit man die Gegenortspunkte b, b′ und c, c′, von denen aus der Stollen nach b e, b l und c f, c g hin getrieben wird, genau erhält, müssen erstens die Richtungen B b und C c in dem Kreuzstreichen des Stollens angelegt und die aus der Lage von B und C bekannten Abstände B b und C c genau abgemessen, und zweitens die Punkte b′ und c′ von B′ und C′ aus in den Schächten abgesenkelt und in den Querschlägen scharf einnivellirt werden. Sind diese Punkte ihrer horizontalen und verticalen Projection nach bekannt, so ergeben sich die Richtungen b e, b l und c f, c g aus dem bekannten Streichen und die Neigungen b′ e′, b′ l′ und c′ f′, c′ g′ aus dem vorgeschriebenen Gefälle der Stollenaxe. Die Lage der Linien e l, e′ l′ und f g, f′ g′ oder der Feldörter e′, l′, f′, g′ wird in den die Breite des Stollens durchbrechenden Querschlägen B b und C c durch Fixpunkte (Einstemmungspunkte) genau bezeichnet, und während des Stollenbetriebs findet eine wiederholte Controle der Absteckung durch den Markscheider statt, um jede Abweichung von den im horizontalen und verticalen Sinne vorgeschriebenen Richtungen des Stollens sofort zu verhindern.

Will man die horizontalen Richtungen der Querschläge und Gegenörter des Stollens nicht mit der Magnetnadel, sondern, was mehr zu rathen ist,

mit dem Grubentheodolithen bestimmen, so kann man in der Weise verfahren, dass man in jedem Schachte zwei Punkte hinabsenkelt, welche möglichst weit von einander entfernt sind und deren Richtung gegen den Meridian und die Stollenaxe über Tage genau bestimmt ist. Mit dieser bereits orientirten und durch die Senkelung in die Grube übergetragenen Linie lässt sich, wie leicht einzusehen, der zu jedem Schachte gehörige Querschlag und, wenn dieser ausgeführt ist, die Stollenaxe abstecken.

Fünfter Abschnitt.

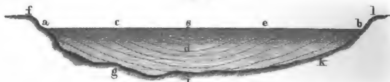
Wassermessungen.

§. 191. Nachdem im sechsten Abschnitte der ersten Abtheilung nur diejenigen Messinstrumente betrachtet wurden, welche zur unmittelbaren Messung der Geschwindigkeiten fliessender Gewässer dienen, wird hier auch nur von den hydrometrischen Arbeiten die Rede sein, welche an Gerinnen, Bächen, Flüssen und Strömen vorzunehmen sind, um deren Geschwindigkeiten, Wassermengen und sogenannte Wasserkräfte kennen zu lernen. Es ist somit hier nicht die Rede von den Messungen, durch welche man die Geschwindigkeiten und Wassermengen sehr kleiner Wasserläufe, wie die der Quellen und Röhrenleitungen, erfährt, oder welche das Steigen und Fallen der Wasserstände der Flüsse betreffen und mit dem Ausdrucke „Pegelbeobachtungen" bezeichnet werden; denn diese Messungen würden zu weit in das Gebiet des Flussbaues, jene aber zu tief in das der Hydraulik eingreifen.

A. Geschwindigkeitsmessungen.

§. 192. Die Geschwindigkeit eines fliessenden Wassers ist selbst an solchen Stellen, wo das Flussbett regelmässig beschaffen und von Wehren, Buhnen und anderen auf die Bewegung des Wassers störend einwirkenden Bauwerken entfernt ist, nicht in dem Sinne gleichförmig, dass alle Wasserfäden gleiche Geschwindigkeit besitzen, sondern nur insofern, als ein und derselbe Wasserfaden auf eine ziemliche Länge seine Geschwindigkeit nicht merklich ändert. Es fliessen immer diejenigen Wasserfäden, welche sich näher an den Ufern oder in grösserer Tiefe befinden, langsamer als die mittleren und höher gelegenen, so dass sich nach Fig. 212 in jedem Querprofile Linien (wie a i b, c d e) angeben lassen, welche die Schnittpunkte der Wasserfäden von gleicher Geschwindigkeit vereinigen.

Fig. 212.



Das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeiten der Wasserfäden nach der Tiefe und den Seiten eines Querprofils abnehmen, ist nicht bekannt, obwohl es nicht an Formeln fehlt, welche diese Abnahme darzustellen suchen.[1] Würde man dieses Gesetz kennen, so reichte es hin, die Geschwindigkeit des Stromstrichs zu messen, um daraus die mittlere Geschwindigkeit des Wassers durch Rechnung zu finden; so lange aber jene Kenntniss mangelt, ist man darauf angewiesen, die mittlere Geschwindigkeit des Wassers auf anderen Wegen zu suchen.

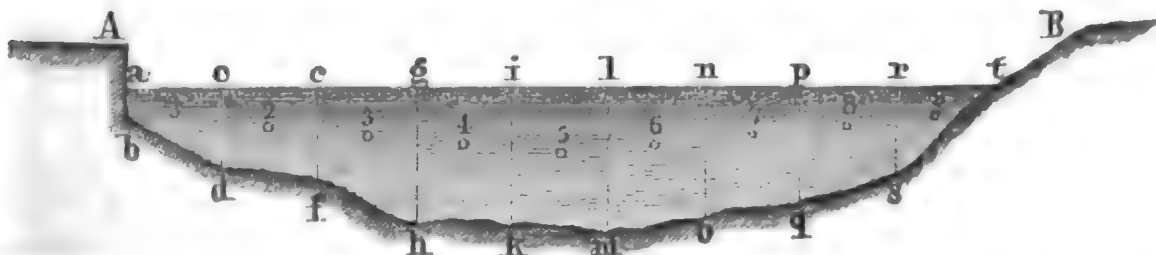
Einer dieser Wege besteht darin, dass man die von Eytelwein und Anderen entwickelten Formeln, welche die mathematischen Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Wassers und den Abmessungen eines regelmässigen Gerinns darstellen, auch auf Flüsse überträgt und aus den Dimensionen einiger Querprofile und der Grösse des Wasserspiegelgefälls die mittlere Geschwindigkeit berechnet. Dieses Verfahren ist als eine mittel-

[1] Eine Zusammenstellung und Kritik der wichtigsten hierher gehörigen Formeln findet man in Hagen's Handbuch der Wasserbaukunst, II. Theil, 3. Auflage, S. 283 bis 297. Hiernach wies im Anfange des 18. Jahrhunderts zuerst Mariotte nach, dass die Geschwindigkeit des Wassers mit der Tiefe nicht zu- sondern abnimmt. Pitot stellte mit seiner aus dem ersten Bande bekannten Röhre gleichfalls Geschwindigkeitsmessungen in verschiedenen Tiefen an und kam zu demselben Ergebnisse wie Mariotte. Dubuat bemühte sich nicht bloss für jede Lothlinie, sondern für ein ganzes Flussprofil die Stelle anzugeben, in der die mittlere Geschwindigkeit stattfindet: er setzte diese Geschwindigkeit $v = u - \sqrt{u} + 0{,}5$, wobei u die Geschwindigkeit in der Oberfläche bezeichnet. Woltmann vermuthete auf Grund der Messungen von Brünings im Niederrhein, dass die Curve, welche durch ihre horizontalen Ordinaten die Geschwindigkeiten des Wassers in einer Lothrechten darstellt, eine Parabel sei, deren Axe vertical ist und deren Scheitel in derjenigen Tiefe unter dem Wasserspiegel liegt, wo die Geschwindigkeit aufhört. Da diese Tiefe 130 bis 160 Parameter betragen sollte, so war die Woltmann'sche Parabel sehr wenig gekrümmt. Eytelwein empfiehlt für die mittlere Geschwindigkeit in einer Verticalen folgende Formel: $v = u\,(1 - 0{,}004\,t)$, in der u die Geschwindigkeit an der Oberfläche und t die ganze Tiefe des Flusses ist. In neuester Zeit (1861) stellten die americanischen Ingenieur-Officiere Humphreys und Abbot in ihrem von H. Grebenau (1867) übersetzten und aufs Dringendste empfohlenen Werke »Report upon the physics and hydraulics of the Missisippi River« auf Grund zahlreicher Messungen die Behauptung auf, dass die Geschwindigkeitsscalen Parabeln mit horizontalen und unter dem Wasserspiegel liegenden Axen sind. Die Geschwindigkeit wäre hiernach in einiger Tiefe unter der Oberfläche am grössten und nähme von da aus nach oben und unten mit den Ordinaten der Parabel ab. (A. a. O. S. 288 bis 292). Hagen leitet aus den besseren der in Rede stehenden americanischen Messungen zwar auch eine Parabel, aber mit lothrechter Axe ab, wie er dieses schon früher in einer Abhandlung über die Bewegung des Wassers in Strömen gethan hatte, und schliesst (S, 295) seine Kritik mit folgenden zwei beachtungswerthen Bemerkungen: erstens, dass die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche am grössten ist und bis zur Sohle stetig sich vermindert, und zweitens, dass die Auffindung eines allgemein gültigen Gesetzes, wonach man aus einer Messung an der Oberfläche oder in irgend einer bestimmten Tiefe die mittlere Geschwindigkeit finden könne, in Folge der von den Unregelmässigkeiten des Stroms abhängenden inneren Bewegungen des Wassers unmöglich zu sein scheine.

bare Messung der Geschwindigkeit zu bezeichnen, insofern Nivellirinstrumente und Längenmesser ausreichen, es zu vollziehen; es kann aber nur für solche Fälle empfohlen werden, in denen entweder gar keine unmittelbare Messung stattfinden kann, oder in welchen nur sehr geringe Genauigkeit gefordert wird.

Der andere Weg, die mittlere Geschwindigkeit eines Flusses auszumitteln, besteht darin, dass man, wie in Fig. 213 angedeutet, das Querprofil in eine entsprechende Anzahl Trapeze (a d, c f, e h . . . . s t) abtheilt, in deren Mittelpunkten (1, 2, 3 . . . 9) die Geschwindigkeiten direct misst, die durch jedes Trapez fliessende Wassermenge berechnet, und aus der Gesammtwassermenge durch Division derselben mit dem Flächeninhalte des Querprofils die mittlere Geschwindigkeit sucht. Dieses Verfahren wird dem vorigen gegenüber als eine unmittelbare Messung der mittleren Geschwindigkeit des Flusses bezeichnet und liefert, wenn die einzelnen Geschwindigkeiten mit dem Woltmann'schen Flügel gemessen werden, unter allen bis jetzt bekannten Methoden die zuverlässigsten Resultate, wie bereits bei der Beschreibung der Instrumente zum Geschwindigkeitsmessen hervorgehoben wurde.

Fig. 213.



§. 193. **Eytelwein'sche Formel.** Da die mittelbaren Geschwindigkeitsmessungen von der mathematischen Beziehung zwischen der Geschwindigkeit, dem Gefälle und dem Querprofile eines Wasserlaufs abhängen, so ist vor Allem dieser Zusammenhang darzustellen.

Die ersten richtigen Ansichten über die Abhängigkeit der Geschwindigkeit eines Flusses von dessen Gefälle und Querprofile sprach A. Brahms in seinen vor hundert Jahren erschienenen „Anfangsgründen der Deich- und Wasserbaukunst" aus; er unterliess es aber, eine algebraische Formel, welche die von ihm aus Versuchen erkannte Gesetzmässigkeit ausdrückte, aufzustellen. Später beschäftigten sich in Frankreich namentlich Dubuat und Prony, in Deutschland Woltman und Eytelwein mit Herleitung eines Ausdrucks für die Geschwindigkeit des Wassers in Canälen und Flussbetten. Die Arbeiten von Eytelwein sind ohne Zweifel die gründlichsten und fanden daher auch die meiste Anerkennung und Anwendung.

Die nachstehend entwickelte Formel gilt eigentlich nur für ganz regelmässige Gerinne, in welchen die Querprofile gleich gross sind; für Flüsse gaben ihr Eytelwein und Prony eine etwas veränderte Gestalt. Vergleicht man jedoch die Ergebnisse directer Messungen mit den aus den zusammen-

gesetzten Formeln berechneten Geschwindigkeiten, so sind die Abweichungen immer noch so gross, dass man die völlige Richtigkeit der Annahmen, worauf die Entwickelung der Formeln für die Flüsse beruht, bezweifeln muss. So lange diese Unsicherheit noch besteht, ist es daher wohl gerechtfertigt, sich des einfacheren Ausdrucks zur Berechnung der Geschwindigkeit aus dem Gefälle und Querprofile zu bedienen.

Bei der Herleitung dieses Ausdrucks ging man von der natürlichen Annahme aus, dass die Beschleunigung der Bewegung des Wassers, welche in Folge seines Falls über eine schiefe Ebene eintreten müsste, wenn keine Hindernisse entgegen wirkten, durch die Cohäsions- und Reibungs-Widerstände an der Sohle und den Seitenwänden des Canal- oder Flussbetts aufgehoben wird. Mit dieser Annahme hatte man einen Massstab zur Messung der Widerstände, und es kam nur mehr darauf an, festzustellen, wovon die Widerstände und die Beschleunigung abhängen. Durch Beobachtungen hielt man sich für berechtigt anzunehmen, dass der Widerstand zunächst mit der Grösse der vom Wasser berührten Fläche des Flussbetts wächst und abnimmt. Zieht man nun eine Flussstrecke von der Länge 1 in Betracht und abnimmt. Zieht man nun eine Flussstrecke von der Länge 1 in Betracht und ist p der benetzte Umfang des Querprofils dieser Strecke (in Fig. 212 ist $p = a\,g\,i\,k\,b$ und in Fig. 213 $p = a\,b\,d\,\ldots\,s\,t$), so ist die widerstandleistende Fläche $= p$. Ferner glaubte man nach Beobachtungen über die Bewegung des Wassers in Flüssen annehmen zu müssen, dass der Widerstand gegen die Bewegung auch mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachse, insofern bei doppelter Geschwindigkeit doppelt so viele Theile und jeder Theil in der halben Zeit von der benetzten Wand abgerissen werden müsse. Bezeichnet man nun den Widerstand mit w, die Geschwindigkeit in der Secunde mit v, den benetzten Umfang des Querprofils mit p und eine noch unbekannte, von den Reibungsverhältnissen des Wassers abhängige constante Grösse mit i, so ist nach den vorstehenden Erörterungen

$$w = i\,p\,v^2.$$

Nennt man ferner α das relative Gefäll des Wasserspiegels der durch das Querprofil q fliessenden Wassermasse, und bezeichnet g die Beschleunigung der Schwerkraft der Erde, so beträgt die Beschleunigung der Bewegung jeder cubischen Einheit der in Rede stehenden Wassermasse $\alpha\,g$, da diese Beschleunigung der Neigung der schiefen Ebene (hier dem Gefälle des Wassers) proportional ist. Für die Länge 1 der Flussstrecke beträgt die Gesammtwassermasse q Raumeinheiten und folglich ist deren Beschleunigung $= \alpha\,g\,q$.

Nach der schon erwähnten Annahme über die Vernichtung der Beschleunigung durch die Widerstände der Bewegung muss nunmehr

$$\alpha\,g\,q = i\,p\,v^2$$

und somit die Geschwindigkeit des Wassers

$$v = \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot \sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha}$$

gesetzt werden. Nimmt man, wie es in der Regel geschieht, das Verhältniss von g zu i als constant an und setzt

$$k = \sqrt{\frac{g}{i}}$$

so geht die vorstehende Formel in folgende über:

$$v = k\sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha} = k\sqrt{t\,\alpha}. \tag{351}$$

Das Verhältniss von q : p, welches hier = t gesetzt ist, nennen die Hydrotechniker häufig auch den mittleren Halbmesser des Querprofils, während es annähernd nur die mittlere Tiefe vorstellt.

Soll nun die Geschwindigkeit in der Secunde in preussischen oder rheinländischen Fuss ausgedrückt werden, wenn q und p in demselben Masse gegeben sind, so ist nach Eytelwein k = 90,9 zu setzen. Für Metermass, d. h. v in Meter per Secunde, p in Meter und q in Quadratmeter, wird k = 50,8.

Der Coefficient k kann nicht für jeden Fluss denselben Werth haben, sondern muss sich mit der Beschaffenheit des Flussbetts ändern. Wie viel diese Aenderung in einzelnen Fällen beträgt, lässt sich nicht allgemein angeben; jedenfalls aber hat die Beschaffenheit des Flussmaterials einen wesentlichen Einfluss darauf. Will man den Werth von k, welcher einem gegebenen Flusse möglichst gut entspricht, durch Versuch bestimmen, so braucht man nur an diesem Flusse die Grössen q, p, α, v so genau als möglich unmittelbar zu messen und nach Gleichung (351) den Werth von

$$k = \frac{v}{\sqrt{\alpha\, t}} \tag{352}$$

zu berechnen, wobei anzunehmen ist, dass v die mittlere Geschwindigkeit im Querprofile q vorstellt.

§. 194. **Aufnahme der Querprofile.** Zur mittelbaren Bestimmung der Geschwindigkeit aus der Gleichung (351) gehört zunächst die Kenntniss der Werthe von q und p, welche sich aus der Aufnahme einiger Querprofile an einer geeigneten Flussstrecke ergeben. Hierzu dient jede gerade oder wenig gebogene Flussstrecke, welche von Wehren, Schützen, Buhnen, Brücken etc. ziemlich entfernt liegt und deren Querprofile nahezu gleiche Breite, Tiefe und Flächeninhalte haben.

1) Ist der Fluss nicht sehr breit, so kann man aus starken Bohlen oder langen Leitern einen gegen die Ufer senkrecht gerichteten Steg über denselben legen, darauf die Breite des Betts in gleiche Theile theilen und mittels einer Peilstange, die wie der Schaft des Reichenbach'schen Strommessers beschaffen ist, damit sie keine merkliche Stauung des Wassers veranlasst, an den Theilungspunkten die lothrechten Wassertiefen messen. Der Steg gibt somit die Abscissen und die Peilstange die Ordinaten des Querprofils, welches hiernach gezeichnet und berechnet werden kann.

Hat man an den beiden Enden und in der Mitte der Flussstrecke

Querprofile aufgenommen, und hat sich während der Aufnahme der Wasserstand nicht geändert, was man an einem am Ufer befestigten Massstabe erkennen kann: so gibt das arithmetische Mittel aus den Flächen der drei Profile den gesuchten Werth von q und das Mittel aus den drei benetzten Umfängen den Werth von p, welcher in die Formel (351) einzusetzen ist. Der bei der Messung der Profile stattfindende Wasserstand muss angemerkt werden, damit bei eben demselben das Gefäll des Wasserspiegels bestimmt werden kann.

2) Ist der Fluss breit aber nicht tief, so dass ein Arbeiter die Nivellirlatte in demselben noch halten kann, so lässt sich zur Sommerzeit das Querprofil dadurch aufnehmen, dass man über den Fluss eine starke in Leinöl getränkte, mit Wachs abgeriebene und in gleichen Abständen mit farbigen Läppchen versehene Leine spannt, an den durch die Läppchen bezeichneten Stellen die Nivellirlatte von dem im Flusse stehenden Arbeiter auf der Sohle des Flussbetts lothrecht aufstellen lässt, alle diese Punkte in Bezug auf einen am Ufer befindlichen Fixpfahl, dessen Kopf über den Wasserspiegel reicht, einnivellirt, ferner den Abstand des Wasserspiegels von dem Pfahlkopfe misst und endlich den Wasserstand an dem am Ufer stehenden Massstabe abnimmt. Man sieht, dass sich diese Aufnahme des Querprofils eines Flusses von der eines trockenen Bodens nur dadurch unterscheidet, dass hier noch der Abstand des Wasserspiegels in Bezug auf den am Ufer befindlichen Fixpfahl einzumessen ist.

Fig. 214.

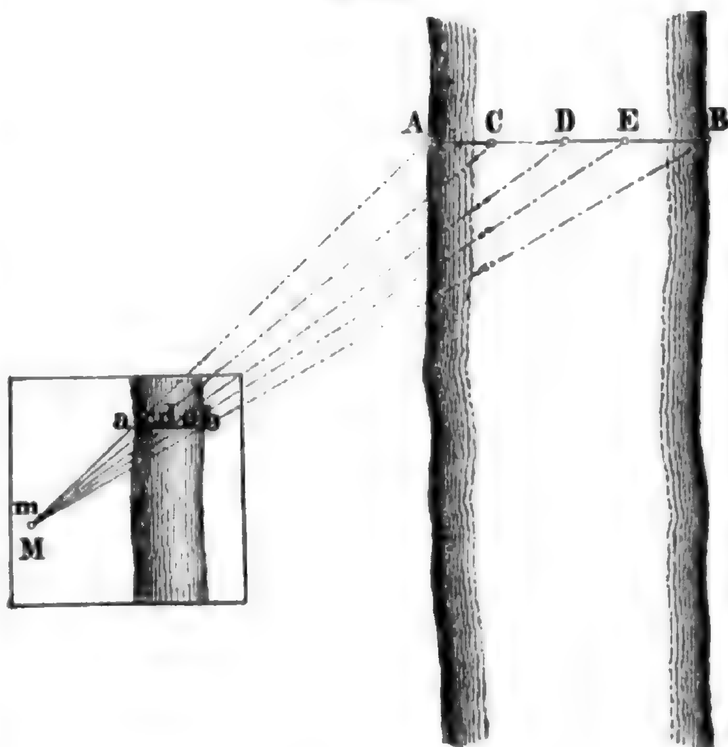
3) Ist der Fluss so breit und tief, dass die vorhergehenden Methoden zur Messung der Abscissen und Ordinaten nicht mehr angewendet werden können, so müssen die Abscissen vom Ufer und die Ordinaten von einem Kahne aus gemessen werden, was in folgender Weise geschehen kann.

Es stehe ein Kahn (K, Fig. 214) oder statt dessen eine Verbindung von zwei Kähnen zur Verfügung, in deren Mitte eine Messfahne aufgestellt ist, die zum Einrichten des Fahrzeugs dient. An den Ufern werden die Stäbe A und B eingesteckt, welche eine Gerade bezeichnen, die dem in der Richtung A' B' aufzunehmenden Querprofile parallel ist und von diesem um die halbe Schiffslänge absteht. An der Spitze (D') des Kahns werden die Tiefen abgepeilt, sowie dort auch die Geschwindigkeiten mit dem Woltman'schen Flügel gemessen werden, wenn es sich um unmittelbare Mes-

sungen handelt. Um nun die Länge von A B zu erfahren und in gleiche Theile zu theilen, verlängere man dieselbe bis F, errichte dort eine Senkrechte F H und stecke in H eine Parallele H J zu F B ab. Misst man auf F H einen Punkt G so ab, dass G H = m . F G ist und von H J aus über G die ganze Linie A B übersehen werden kann, und verlängert man A G und B G rückwärts bis zu H J, so wird hierauf die Linie a b abgeschnitten, welche zu A B in dem Verhältniss von 1 : m steht. Es ist also A B = m (a b). Theilt man nun a b in so viele gleiche Theile, als A B erhalten soll, so werden die Absehlinien b G, c G, d G .... diese Theile auf A B bestimmen, vorausgesetzt, dass die Messfahne auf dem Schiffe auch in die an den Ufern bezeichnete Linie A B eingerichtet ist. Dieses Einrichten kann ohne Beihilfe vom Schiffe aus geschehen, wenn man das Prismenkreuz oder das fünfseitige Winkelprisma anwendet; ohne dieses ist ein Gehilfe erforderlich, der von A oder B aus das Einwinken besorgt.

4) Ist der Strom in einem grossen Massstabe geometrisch aufgenommen, so kann man die Länge A B auf dem Plane abgreifen und mittels des Messtisches und der Kippregel in gleiche oder beliebige Theile theilen, wie aus Fig. 215 ohne Weiteres hervorgeht. Dabei versteht es sich übrigens von selbst, dass das Einstellen in die Linie A B vom Ufer oder vom Schiffe aus, wie vorhin angedeutet, nicht verabsäumt werden darf.

Fig. 215.



Wird es wegen grosser Tiefe oder Geschwindigkeit des Stroms zu schwer, die Peilstange lothrecht festzuhalten, so wendet man zur Tiefenmessung ein Senkblei an, dessen Leine eingetheilt ist und am unteren Ende ein etwa 5 Kilogramm schweres Gewicht trägt. Damit die Leine bei der Messung möglichst lothrecht gehalten werden kann, muss man das Gewicht so weit oberhalb des Punkts, an dem die Tiefe gesucht wird, einwerfen, als es während des Sinkens durch den Stoss des Wassers abwärts getrieben wird. Wie viel dieses Abwärtstreiben beträgt, erfährt man bald durch Uebung.

Da jede Profilmessung an Strömen längere Zeit dauert, so hat man fortwährend den Wasserstand an einem in der Nähe eingestellten Massstab zu beobachten, damit man die gemessenen Tiefen alle auf eine und dieselbe Horizontale reduciren kann.

§. 195. **Aufnahme der Längenprofile.** Ausser den Werthen von q und p bedarf man noch des relativen Gefälls α des Wasserspiegels zur Berechnung der Geschwindigkeit v. Dieses Gefäll ist stets eine sehr kleine Grösse, und da schon ein geringer Messungsfehler in der Bestimmung des absoluten Falls h auf die horizontale Uferlänge l den Werth von α bedeutend ändern kann, die Geschwindigkeit v aber der Quadratwurzel aus α proportional ist, so muss auf die Bestimmung von h alle Sorgfalt verwendet werden.

Bestimmt man das Gefäll eines Flusses an mehreren unter sich zusammenhängenden Punkten und nimmt zugleich an diesen Punkten Querprofile auf, so lässt sich aus diesen Aufnahmen das Längenprofil des Flusses für die betreffende Strecke berechnen und auftragen. Obwohl unser nächster Zweck eigentlich nur das relative Gefäll zwischen dem obersten und untersten Querprofile der Flussstrecke, in welcher die Geschwindigkeit mittelbar gemessen werden soll, fordert, so werden wir doch sofort näher angeben, wie die Arbeiten zur Aufnahme eines Längenprofils zu geschehen haben, weil dieser allgemeinere Zweck den besonderen in sich schliesst und eine Wiederholung erspart wird.

Um das Längenprofil eines Flusses zwischen zwei Punkten M und N aufzunehmen, bezeichne man längs des Ufers von M bis N alle diejenigen Stellen mit Grundpfählen, welche entweder einen bestimmten Abstand von etwa 100 oder 200 Fuss von einander haben, oder an denen sich das Gefäll des Wasserspiegels ändert. Diese Grundpfähle werden in das Flussbett geschlagen und müssen mit ihren horizontal abgeschnittenen Köpfen mehrere Centimeter über den zu nivellirenden Wasserspiegel vorragen. Ausserhalb des Bettes schlage man Beipfähle mit entsprechenden Nummern wie für ein Längenprofil auf trockenem Boden. Hierauf messe man die horizontalen Entfernungen aller Grundpfähle mittels Ketten oder Latten am Ufer ab und nivellire schliesslich alle Grundpfähle unter sich und in Beziehung auf einen ständigen oder vorübergehend aufgestellten Pegel mit grösster Sorgfalt zweimal ein. Sobald der Wasserstand eintritt, für welchen das Längenprofil gewünscht wird, lasse man an allen Grundpfählen die Abstände des Wasserspiegels von den Pfahlköpfen gleichzeitig[1] genau messen und aufschreiben. Addirt man diese Abstände (Stichmasse) zu den vorher berechneten Abständen der Pfahlköpfe vom Horizont des Längenprofils, so erhält man die Ordinaten der einnivellirten Punkte und das Nivellement des Wasserspiegels lässt sich auftragen. Da vorher schon die Querprofile aufgenommen wurden, so ist in jedem die tiefste Stelle bekannt; trägt man daher an den zugehörigen Ordinaten deren Abstände vom allgemeinen Horizont ab und verbindet die Endpunkte, so ergibt sich auch die zum Längenprofil gehörige Stromrinne. Bei höheren oder niederen Wasserständen sind die Stichmasse von Neuem zu nehmen und die Ordinaten wie

[1] Gleichzeitig müssen die Abstände desshalb gemessen werden, weil man ausserdem nicht sicher ist, ob sich der Wasserstand des Flusses nicht geändert hat. Jede Aenderung würde das Gefäll bedeutend verfälschen.

vorhin zu berechnen und aufzutragen. Auf diese Weise kann in ein Längenprofil sowohl der tiefste als höchste und ein mittlerer Wasserstand eingezeichnet werden. Um die eingetragenen Wasserstände auch in späterer Zeit auf dem Terrain angeben zu können, sind die Grundpfähle in Bezug auf einen Fixpunkt oder Pegel einzunivelliren.

Was in Bezug auf das Einnivelliren von Flussbauwerken und anderen in dem Ueberschwemmungsgebiete eines Flusses liegenden Gegenständen für den Hydrotechniker von Bedeutung ist, gehört in das Gebiet der Wasserbaukunde, mit der wir uns hier nicht beschäftigen.

B. Messung der Wassermenge eines Flusses.

§. 196. Die Bestimmung der Wassermenge, welche ein Fluss in der Zeiteinheit abführt, oder die Messung der „Wasserführung" eines Flusses geschieht immer auf indirectem Wege, indem man die gesuchte Wassermenge aus den aufgenommenen Profilen und Geschwindigkeiten berechnet.

Hat man die mittlere Geschwindigkeit nach der Formel

$$v = k \sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha}$$

Fig. 213.

mittelbar bestimmt, so sind damit auch schon alle Messungen gemacht, welche die Wassermenge m geben, indem

$$m = v\,q = q\,k \sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha}$$

ist. Wurden dagegen die verschiedenen Geschwindigkeiten, welche in einem Querprofile stattfinden, mittels des Reichenbach'schen Strommessers oder des Woltman'schen Flügels unmittelbar gemessen, und lag dabei ein Querprofil, wie das in Fig. 213 gezeichnete, zu Grunde, so ist, wenn

$f_1, f_2, f_3 \ldots f_9$ die Trapezflächen a d, c f, e h … st

und

$v_1, v_2, v_3 \ldots v_9$ die Geschwindigkeiten in den Punkten 1, 2, 3 … 9

bezeichnen, die Gesammtwassermenge des Flusses, d. h. die in der Zeiteinheit durch jedes Profil fliessende Wassermenge

$$m = f_1\,v_1 + f_2\,v_2 + f_3\,v_3 + \ldots + f_9\,v_9 = \Sigma\,(f\,v).$$

Will man nunmehr die mittlere Geschwindigkeit v des Flusses in dem Querprofile A B finden, so ist diese nach der Definition in §. 192, wenn

der Flächeninhalt dieses Profils $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots . f_9 = \Sigma f = F$ gesetzt wird,

$$v = \frac{m}{F}. \tag{353}$$

Ueber die Massregeln zur Ueberwindung der an grossen Flüssen und Strömen bei Messung der Quer- und Längenprofile, dann der Geschwindigkeiten sich entgegenstellenden Schwierigkeiten kann man unter anderen Werken namentlich die Schrift von H. Grebenau „Die internationale Rheinstrom-Messung bei Basel", München 1873, nachlesen.

C. Messung der Arbeit oder Wasserkraft eines Flusses.

§. 197. **Masseinheit.** Wenn von der Wasserkraft eines Flusses oder Canales die Rede ist, so versteht man darunter nicht, wie man glauben könnte, die Kraft des Wassers, welche dessen Gewicht gleich ist, sondern die mechanische Wirkung, welche das fliessende Wasser in der Zeiteinheit hervorbringt. Es wird also hier keine Kraft, sondern ein durch die Kraft hervorgebrachter Effect gemessen; der Ausdruck Wasserkraft ist somit eben so ungeeignet als der Ausdruck Pferdekraft für die Masseinheit, in welcher die Stärke der Wirkung eines Flusses angegeben wird. Diese unrichtigen Bezeichnungen sollte man aus der Mechanik und aus der Technik um so mehr verbannen, als bereits andere und bessere dafür vorgeschlagen sind.

Sehr beachtenswerth in dieser Beziehung erscheinen die Vorschläge von Reuleaux (im 3. Bande des „Civilingenieurs" S. 112 u. s. f.), welche verlangen, dass man das unrichtige Wort Kraft mit Intensität oder Stärke vertausche. Uns scheint es indessen noch mehr geeignet das Wort Werk für Kraft zu setzen, welches auch Clausius in die mechanische Wärmetheorie eingeführt hat. Wir wollen demnach unter Pferdewerk [1] (wie bisher unter Pferdekraft) das Product aus der Kraft eines mittelstarken Pferdes und seiner Geschwindigkeit verstehen. Die Kraft aber, welche ein mittleres Pferd bei 1 Meter Geschwindigkeit auszuüben im Stande ist, beträgt durchschnittlich 75 Kilogramm; daher ist das Product aus der Kraft ($P = 75^k$) und der Geschwindigkeit ($v = 1^m$) in der Secunde oder

$$P\,v = 75^{km} \text{ in der Secunde} = 1 \text{ Pferdewerk.}$$

Um den wörtlichen Beisatz (in der Secunde, Minute, Stunde etc.) zu vermeiden, schlägt Reuleaux vor, die für die Zeiteinheiten gebräuchlichen Zeichen in wagrechter Lage unter die Bezeichnung der Gewichts- und Masseinheiten zu setzen, so dass also

$75^{\underline{\underline{km}}}$ mit „75^{km} in der Secunde" und
$10^{\underline{km}}$ mit „10^{km} in der Minute"

[1] In der zweiten Auflage dieses Werks haben wir den Reuleaux'schen Ausdruck »Pferdestärke« vertreten; nachdem derselbe aber unseres Wissens bei dem technischen Publikum keinen Eingang gefunden, versuchen wir es jetzt, mit dem die Sache besser bezeichnenden Worte »Pferdewerk« die Macht der Gewohnheit zu erschüttern.

gleichbedeutend ist: wir werden diese Bezeichnung ebenfalls gebrauchen und also 1 Pferdewerk = $75^{\underline{\underline{km}}}$ setzen. In solchen Pferdewerken drücken wir also auch die Arbeit eines Flusses oder seine sogenannte Wasserkraft aus.

§. 198. **Gestautes und ungestautes Wasser.** In der Technik bieten sich gewöhnlich zwei Fälle dar, in denen die Arbeit eines Wasserlaufs zu bestimmen ist. Es handelt sich nämlich entweder um die Arbeit eines aufgestauten Wassers, das von einer durch die Localverhältnisse bedingten Höhe herabfallen muss, um durch seine Kraft, d. i. sein Gewicht, einen mechanischen Effect hervorzubringen; oder es handelt sich um die Arbeit eines ungestauten fliessenden Wassers, also eines Baches, Flusses oder Werkcanals, in welchen unterschlächtige Wasserräder ohne Gerinne oder sog. Schiffsmühlräder eingehängt werden sollen.

1. Um die Arbeit eines gestauten Wasserlaufs zu bestimmen, ist es zunächst nöthig, die Wassermenge und das absolute Gefäll zwischen dem oberen und unteren Wasserspiegel genau zu kennen. Wie man die Wassermenge findet, ist aus dem Vorhergehenden bekannt; und was die Messung des absoluten Gefälls betrifft, so ist darüber lediglich zu bemerken, dass dieses durch Nivelliren unter Beobachtung derselben Vorsichtsmassregeln, welche bei der Aufnahme des Längenprofils eines Flusses zu berücksichtigen sind, geschieht. Der obere Wasserspiegel ist gewöhnlich durch den Aichpfahl (A) des Wasserwerks fixirt; der untere wird an einem eingeschlagenen Grundpfahle (B) gemessen. Hat man den Höhenunterschied u dieser zwei festen Punkte ermittelt, so staut man das Wasser bis zur Aiche und nimmt alsdann das Stichmass am unteren Pfahle B bis zum Wasserspiegel = v. Man darf nun nicht sofort das wirksame Gesammtgefäll = u + v setzen, sondern muss davon einen gewissen Betrag ε abziehen, welcher das Gefäll des Unterwassers von A bis B vorstellt. Bezeichnet α dieses Gefäll (welches zwischen 0,001 und 0,002 wechselt) und ist δ der Horizontalabstand A B, so hat man $\varepsilon = \alpha\,\delta$ und daher das in Rechnung zu bringende absolute Gefäll

$$h = u + v - \varepsilon = u + v - \alpha\,\delta. \qquad (354)$$

Ist m die secundliche Wassermenge, für welche die Arbeit des aufgestauten Wassercanals bestimmt werden soll, und bezeichnet γ das absolute Gewicht der Raumeinheit Wasser: so beträgt das in jeder Secunde von der Höhe h herabfallende Gewicht $m\,\gamma$ und folglich ist die Arbeit dieses Gewichts oder dieser Kraft = $m\,\gamma\,h^{\underline{\underline{km}}}$, wenn m in Cubikmetern, h in Metern und γ in Kilogrammen für einen Cubikmeter Wasser ausgedrückt ist. Dagegen ist die Arbeit des herabfallenden Wassers = $m\,\gamma\,h^{\underline{\underline{f\,\mathfrak{F}}}}$ preuss., wenn m in preuss. Cubikfussen, γ in preuss. Pfunden für einen Cubikfuss Wasser und h in preuss. Fussen ausgedrückt ist. Da 1 Pferdewerk = $75^{\underline{\underline{km}}}$, so ist die Arbeit des in Rede stehenden Wassers

$$x = \frac{m\,\gamma\,h^{\underline{\underline{km}}}}{75^{\underline{\underline{km}}}} = 13{,}33\ m\,h \text{ Pfdwk.} \qquad (355)$$

Betrüge z. B. die secundliche Wassermenge 9,9 cm und wäre das Gefäll h = 1,5 m, so hätte man, da das Gewicht γ eines Cubikmeters Wasser 1000 Kilogramm beträgt:

$$x = \frac{9,9 \,.\, 1000 \,.\, 1,5}{75} = 198 \text{ Pfdwk.},$$

und von dieser Arbeit des Wassers würde eine gut construirte Turbine etwa 75% oder 148 Pferdewerk, ein unterschlächtiges Rad in geradem Gerinne aber nur etwa 33% oder 65 Pferdewerk als Nutzeffect verwerthen.

2. Die Bestimmung der Arbeit eines ungestaut fliessenden Wassers erfordert, dass man die mittlere Geschwindigkeit und Menge des Wassers kennt, um dessen Arbeit es sich handelt. Angenommen, es sei jene = m und diese = v für die Secunde bekannt, so lässt sich die Berechnung dieses Falls auf die des ersten zurückführen, wenn man erwägt, dass zur Erzeugung der Geschwindigkeit v eine Druckhöhe h erfordert wird, welche sich aus der Gleichung

$$v = \sqrt{2 g h}$$

ergibt, in der g die Beschleunigung der Schwere, also für unsere Gegenden die Grösse 9,81 Meter vorstellt. Da hiernach

$$h = \frac{v^2}{2g} \tag{356}$$

so erhält man, wenn wieder γ das Gewicht der Raumeinheit Wasser bezeichnet, die Arbeit des Wasserlaufs in der Secunde gleich

$$m \gamma h = m \gamma \,.\, \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{m \gamma}{g} \,.\, v^2. \tag{357}$$

Bekanntlich stellt der Quotient aus der Beschleunigung (g) in das Gewicht ($m \gamma$) eines Körpers dessen Masse vor; setzt man nun

$$\frac{m \gamma}{g} = M \tag{358}$$

so folgt aus der letzten Gleichung

$$m \gamma h = \tfrac{1}{2} M v^2$$

womit nachgewiesen ist, dass die Arbeit des ungestauten Wasserlaufs nichts Anderes als seine „lebendige Kraft“ ist. Zur Berechnung der Arbeit des genannten Wasserlaufs in Pferdewerken dient somit, wenn h aus der Gleichung (356) berechnet ist, wieder die Gleichung (355); wenn dagegen h nicht berechnet, aber m in Cubikmeter und v in Meter per Secunde ausgedrückt wird, die Formel

$$x = 0,67958 \text{ m } v^2 = [9,83224] \text{ m } v^2 \tag{359}$$

in der 9,83224 = log 0,67958 ist. Fliesst z. B. in einem Bache bei der mittleren Geschwindigkeit v = 1 m,25 in der Secunde eine Wassermenge von 6,34 cm ab, so ist die Arbeit des Bachs

$$x = 0,67958 \,.\, 6,34 \,.\, (1,25)^2 = 6,732 \text{ Pfdwk.}$$

Wir können diesen Gegenstand nicht beschliessen, ohne auf einen argen Missgriff hinzuweisen, den manche ausübende und sogar docirende Techniker bei der Berechnung der Arbeit eines ungestauten Wasserlaufs gemacht haben und andere vielleicht noch machen, indem sie aus Unkenntniss der ersten Elemente der Dynamik statt der Geschwindigkeitshöhe h des Wassers dessen Geschwindigkeit v selbst setzen, also statt der richtigen Gleichung (355) die unrichtige $75\,x = \gamma\, m\, v$ oder $x = 13{,}33\, m\, v$ anwenden. Die Folgen eines solchen unverzeihlichen Fehlers, welcher die Arbeit eines ungestauten Wassers viel zu gross angibt und den man kaum für möglich halten sollte, treffen leider immer die Wasserwerkbesitzer, welche dem Urtheile von Ignoranten Zutrauen schenken.

Dritte Abtheilung.

Die Lehre von der Plan- und Kartenzeichnung.

. 199. Jede geometrische Aufnahme, geschehe sie auf oder unter der Erde und bestehe sie in Horizontal- oder Verticalmessungen oder in beiden zugleich, erhält ihren vollständigen Abschluss erst durch das Bild, welches die Messungsresultate zur Anschauung bringt. Dieses Bild heisst ein Plan, wenn es nur einen so kleinen Theil der Erdoberfläche oder der Erdrinde umfasst, dass bei dessen Darstellung die Kugelgestalt der Erde unberücksichtigt bleiben kann; dagegen eine Karte, wenn die darzustellende Fläche so gross ist, dass die Erdkrümmung berücksichtigt werden muss. Hieraus entspringt eine verschiedene Art der Darstellung, insofern die Pläne geometrisch-ähnliche, die Karten aber mehr oder minder verzerrte Bilder liefern, jene ein unmittelbares Abgreifen von Längen und Breiten gestatten, diese stets eine (wenn auch einfache) Berechnung der Entfernungen erfordern. Es erscheint daher für die Lösung der Aufgabe dieser dritten Abtheilung, die Messungen bildlich darzustellen, zweckmässig, die Theorie der Planzeichnung von jener der Kartenzeichnung zu trennen, wie hier auch geschieht.

Erster Abschnitt.

Kartenzeichnung.

§. 200. Als Grund, wesshalb die Karten keine geometrisch-treuen Abbildungen der darzustellenden Theile der Erdoberfläche sein können, ist schon in der Einleitung die Unmöglichkeit, eine Kugelfläche und das von ihr getragene Bild in eine Ebene abzuwickeln, bezeichnet worden. Kann aber die Aehnlichkeit der natürlichen und abgebildeten Formen nicht vollständig erreicht werden, so besteht jedenfalls für die Lehre von der Kartenzeichnung die Aufgabe, die Hilfsmittel anzugeben, durch welche die Abbildung der Erdoberfläche oder einzelner Theile derselben entweder mit der

grössten Uebersichtlichkeit oder mit der kleinsten Abweichung von der Wahrheit geschehen kann.

Die Hilfsmittel, deren man sich zum Entwerfen von Karten bedient, sind zunächst gewisse Systeme von Linien, welche die auf der Erdoberfläche vorhanden gedachten Meridiane und Parallelkreise in der Ebene der Karte vorstellen, und in welche sich alle bemerkenswerthen Orte und Terrainpunkte nach ihren geographischen Längen und Breiten eintragen lassen. Diese Liniensysteme heissen Grad- oder Kartennetze und werden auf zwei verschiedenen Wegen erhalten.

Der eine Weg besteht darin, dass man die darzustellende Erdfläche so abbildet, wie sie von einem gegebenen Standpunkte, dem Aug- oder Gesichtspunkte, aus auf einer gleichfalls gegebenen Ebene, der Projections- oder Bildebene, erscheinen würde, wenn diese Ebene und der Erdkörper durchsichtig wären. Dieses Verfahren beruht auf den Grundsätzen der Perspective, wesshalb auch die durch dasselbe entworfenen Karten perspectivische Projectionen heissen. Diese Projectionen, welche nach der Lage des Augpunkts und der Bildebene verschieden benannt werden, gewähren im Vergleich zu den folgenden nur wenig Genauigkeit und lassen ohne umständliche Berechnung gar keine Vergleichung von Linien- und Winkelverhältnissen zu; dagegen aber sind sie geeignet, einen Ueberblick grosser Flächen zu gewähren, und aus diesem Grunde wendet man sie auch bei Darstellung von Hälften der Erdkugel an.

Der andere Weg, Grad- oder Kartennetze zu entwerfen, ist nur für die Darstellung kleinerer Theile der Erdoberfläche, z. B. eines Staates, einer Provinz etc. anwendbar, da er darauf beruht, den betreffenden Theil der Kugelfläche durch eine Kegel- oder Cylinderfläche zu ersetzen, welche sich der Kugel möglichst nahe anschliesst. Da sich die conischen und cylindrischen Flächen in eine Ebene abwickeln lassen, so kann man die auf ihnen gemachten Projectionen von Punkten und Linien der Erdkugel abwickelbare Projectionen nennen und sie nach der Form der abwickelbaren Fläche und der Art, die Meridiane und Parallelkreise darzustellen, unterscheiden.

Ausser den Kartennetzen erscheinen als weitere Hilfsmittel für die Abbildung von Theilen der Erdoberfläche die verschiedenen Zeichen, durch welche man entweder den Zweck und die Beschaffenheit der dargestellten räumlichen Gegenstände andeutet, oder aber die abgebildeten Gegenstände benennt und über gewisse, durch Figuren nicht darstellbare, Verhältnisse Aufschluss gibt. Es sind hienach zwei Arten von Zeichen zu unterscheiden, wovon man die einen Kartenzeichen, die anderen Kartenschrift nennen kann. Auf den meisten Karten sind zwar die angewendeten Zeichen erklärt und die Schrift ist für sich verständlich; gleichwohl aber darf es in einer Theorie der Kartenzeichnung nicht unterlassen werden, Einiges über die Wahl der Zeichen und der Schrift zu bemerken.

A. Perspectivische Projectionen.

1. Stereographische Projectionen.

§. 201. Mit diesem Namen bezeichnet man diejenigen perspectivischen Projectionen der Erdoberfläche, bei welchen der Augpunkt in endlicher Entfernung von der darzustellenden Fläche liegt. Gewöhnlich nimmt man diesen Punkt nur auf der Erdoberfläche oder im Mittelpunkte derselben an; selten oder fast gar nie ausserhalb der Erde. Liegt der Augpunkt in einem Pole der Erde, so dient der Aequator als Projections- oder Bildebene für die jenem Punkte gegenüberliegende Halbkugel der Erde. Diese Lage des Augpunkts und der Bildebene characterisirt die stereographische Polarprojection oder auch die stereographische Projection auf den Aequator. Befindet sich der Augpunkt im Aequator, so geschieht die Projection der gegenüberliegenden Kugelfläche auf die Ebene desjenigen Erdmeridians, welcher auf dem durch den Augpunkt gezogenen Halbmesser senkrecht steht: diese Art der Abbildung nennt man die stereographische Aequatorialprojection oder auch die stereographische Projection auf einen Meridian. Wird der Augpunkt irgendwo auf der Erdoberfläche angenommen, so bildet man die ihm gegenüberliegende Kugelfläche auf der grössten Kreisebene ab, welche mit dem Halbmesser des Augpunkts einen rechten Winkel bildet. Da hier die Bildebene mit der scheinbaren Horizontalebene des Augpunkts parallel ist, so nennt man diese Darstellungsweise die stereographische Horizontalprojection oder auch die stereographische Projection auf den Horizont. Wählt man endlich den Erdmittelpunkt zum Augpunkt und eine der Mitte der darzustellenden Kugelfläche angehörige scheinbare Horizontalebene zur Bildebene, so geschieht die Abbildung durch die Centralprojection.

§. 202. Die **stereographische Polarprojection** ist die einfachste unter allen stereographischen Projectionen, weil sie alle Meridiane der Erde als Durchmesser des Aequators und alle Parallelkreise als concentrische Kreise erscheinen lässt (Fig. 216). Diese Behauptung bedarf wohl keines Beweises, da sie sich unmittelbar aus der geometrischen Anschauung des vorliegenden Falls ergibt. Ebenso wird man sich sofort überzeugen, dass die Polarprojection die abgebildeten Flächen in der Mitte am wenigsten, an den Rändern aber am meisten verzerrt, und dass daher die mittleren Theile einer in dieser Projection gezeichneten Karte verhältnissmässig richtiger sind als die äusseren.

Will man den Halbmesser ϱ eines auf den Aequator zu projicirenden Parallelkreises G H bestimmen, dessen geographische Breite $GCE = \varphi$ gegeben ist, so kann dieses sehr leicht geschehen. Zunächst ist nämlich, wenn r den Erdhalbmesser bezeichnet, der Halbmesser des abzubildenden Parallelkreises $= \frac{1}{2}\, GH = r \cos \varphi$ und es beträgt dessen Abstand vom Erdmittelpunkte $r \sin \varphi$ und vom Augpunkte P im Pole $r + r \sin \varphi = r$

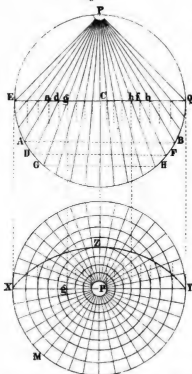


Fig. 216.

$(1 + \sin \varphi)$. Es findet somit wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke G H P und g h P die Proportion statt:

$$(1 + \sin \varphi) : \cos \varphi = r : \varrho$$

woraus mit Rücksicht auf eine trigonometrische Umformung folgt:

$$\varrho = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi). \quad (360)$$

Aus der Figur folgt übrigens auch sehr einfach $\angle$ G P C $= 45^0 - \frac{1}{2}\varphi$, und aus dem rechtwinkligen Dreiecke g C P der vorstehende Werth von ϱ.

Mit Hilfe des berechneten und im Massstabe der Karte ausgedrückten Werths von ϱ lässt sich somit der Parallelkreis zeichnen, auf dem ein gegebener Punkt von der Breite φ liegt; kennt man nun noch dessen geographische Länge λ, so kann der Meridian angegeben werden, welcher zu dieser Länge gehört und dessen Schnitt mit dem Parallelkreis die Projection des Punkts (φ, λ) auf der Karte bestimmt. Wie man umgekehrt aus einem auf der Karte gegebenen Punkte dessen Breite und Länge (φ und λ) finden kann, wenn der Kartenmassstab bekannt ist, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Soll in der stereographischen Polarprojection einer Halbkugel ein grösster Kreis angegeben werden, welcher eine beliebige Neigung φ gegen die Aequatorebene hat, so kann dieses leicht geschehen; denn erstens ist die Projection des genannten Kreises nach §. 203 auch ein Kreis; zweitens schneidet dieser Kreis und seine Projection den Aequator und dessen Projection in zwei leicht zu bestimmenden Punkten; und drittens lässt sich der Durchmesser der Projection ohne Schwierigkeit construiren und berechnen. Stellt nämlich in Fig. 217 der Punkt P den Pol, E Q den Aequator, K J den zu projicirenden grössten Kreis und P K P′ Q einen Meridian vor, der auf der Schnittlinie von E Q und J K senkrecht steht: so ist klar, dass die von P aus gezogenen Gesichtslinien P K und P J die Projectionen k und i von K und J ergeben, und dass demnach der Durchmesser K J des zu projicirenden grössten Kreises sich in der Länge k i = k C + C i = δ abbildet. Um δ zu berechnen hat man nach der Figur:

$$k\,C = P\,C \,.\, \operatorname{tg} u = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi)$$
$$i\,C = P\,C \,.\, \operatorname{tg} v = r \operatorname{tg} (45^0 + \tfrac{1}{2} \varphi)$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi) = \cot(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$,

$$\delta = r \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) + r \cot(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = 2 r \sec \varphi. \quad (361)$$

Der Halbmesser des Kreises k i hat somit die Länge r sec φ.[1]

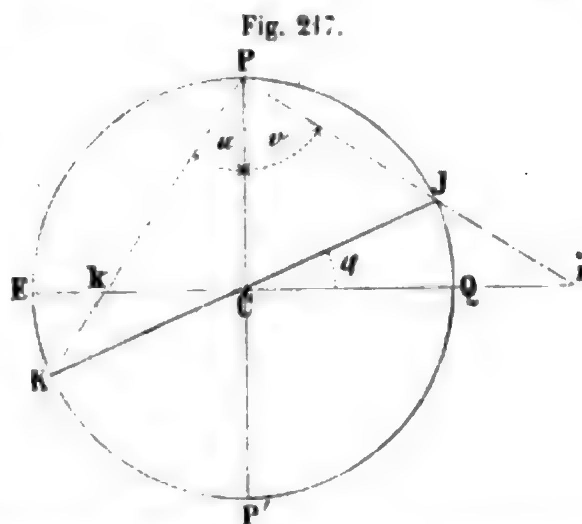


Fig. 217.

In Fig. 216 stellt die Linie X Y Z die stereographische Polarprojection eines grössten Kreises, dessen Ebene mit dem Aequator einen Winkel von 40° bildet, vor: denkt man sich an die Erdkugel eine Tangentialebene gelegt, welche diesem grössten Kreise parallel ist, so hat der Berührungspunkt eine geographische Breite von 50° und die Tangentialebene schneidet am Sternenhimmel den scheinbaren Horizont dieses Punkts ab. Umgekehrt ist also X Y Z die Projection des grössten Kreises, dessen Ebene dem scheinbaren Horizonte eines Orts von 50° Breite parallel läuft, und welche in ihrer unendlichen Erweiterung die Himmelskugel nach dem wahren astronomischen Horizonte schneidet. Da nun der Halbmesser der Himmelskugel im Verhältniss zu dem der Erdkugel unendlich gross ist, so fällt der wahre astronomische Horizont mit dem scheinbaren zusammen, und desshalb kann man die Linie X Y Z auch die Projection des astronomischen Horizonts eines Orts von 50° geographischer Breite nennen. Welchem Orte von 50° Breite dieser Horizont angehört, wird durch die geographische Länge des Punkts Z oder des Meridians P Z bestimmt. Betrüge diese Länge z. B. 32° östlich, so würde X Y Z nahezu der Horizont von Prag sein.

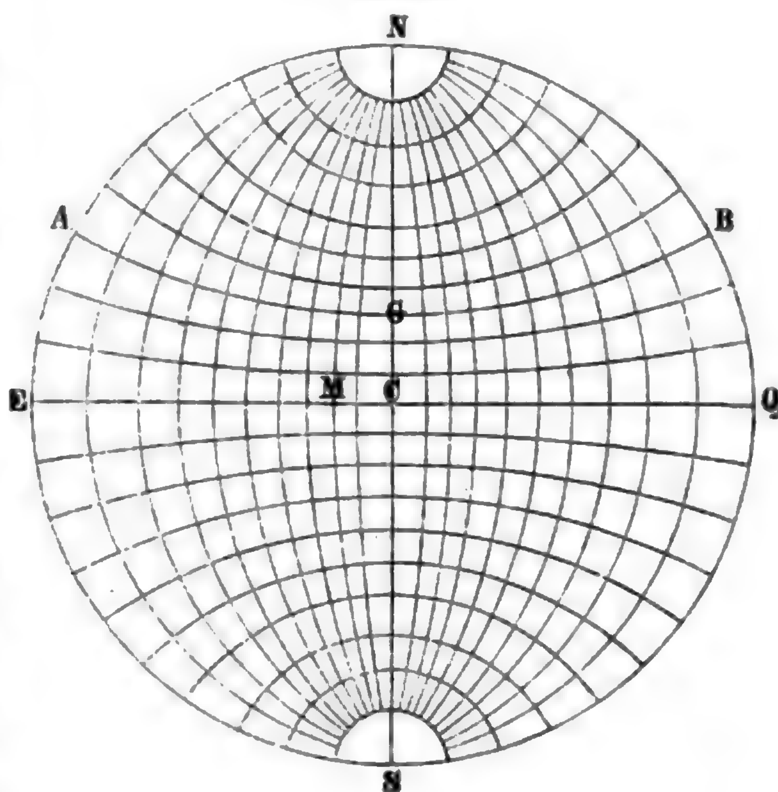


Fig. 218.

§. 203. Die **stereographische Aequatorialprojection** liefert ein Netz von Linien, welches aus lauter Kreisbögen besteht, mit Ausnahme des Aequators und des durch den Augpunkt gehenden Meridians, welche beide als gerade Linien erscheinen. In Fig. 218 ist C der Augpunkt, E Q der

[1] Salneuve findet in seinem Cours de topographie etc. Nr. 443 den Halbmesser = r cosec φ, was davon herrührt, dass er in seiner Entwickelung $1 : \sin 2x = \sec 2x$ setzt, was unrichtig ist.

Aequator, S C N der Meridian des Augpunkts und A N Q S der als Bildebene dienende Meridian.

Dass die Projectionen der Meridiane und Parallele wirklich Kreisbögen sind, lässt sich sowohl auf analytischem als geometrischem Wege leicht beweisen. Der letztere Weg ist der anschaulichere und desshalb hier vorzuziehen. Er fordert jedoch eine kurze Vorbereitung.

Stellt in Fig. 219 der Punkt C die Spitze, C B die kürzeste und C D die längste Erzeugende eines schiefen Kegels von kreisförmiger Basis vor; macht man C B′ = C B, C D′ = C D, und denkt sich durch B′ D′ eine zu C B D senkrechte Ebene gelegt: so schneidet diese den schiefen Kegel C B D nach einem Kreise. Denn da die Basen B D, B′ D′ eine Sehne S gemeinschaftlich haben, und, wenn man die Ebene B′ D′ um die Sehne S so dreht, dass B′ auf B und D′ auf D trifft, der Kegelschnitt B′ D′ mit dem Kreise B D im Ganzen vier Punkte gemeinsam hat: so ist klar, dass der Kegelschnitt B′ D′ ebenfalls nur ein Kreis sein kann. Folglich ist auch jeder mit B′ D′ parallele Schnitt B″ D″ ein Kreis. Die Linien B′ D′ und B″ D″ sind, jede für sich, zu B D **antiparallel**, weil sie mit C B und C D Winkel bilden, welche B D beziehungsweise mit C D und C B einschliesst, oder weil sie mit B D erst parallel werden, wenn man die Ebenen C B′ D′ und C B″ D″ um 180° so dreht, dass der Schenkel C B′ auf C B und C D′ auf C D fällt.

Fig. 219.

Die von dem Augpunkte ausgehenden und die Meridiane und Parallelkreise berührenden Gesichtsstrahlen bilden mit diesen lauter schiefe Kegel von kreisförmiger Basis, welche alle ihre Spitze in dem Augpunkte haben und von der als Bildebene dienenden Hauptmeridianebene geschnitten werden. Es lässt sich also auf sie der vorhergehende Satz anwenden, sobald man sich überzeugt hat, dass die schneidende Bildebene gegen den Kegelkreis so liegt, wie es Fig. 219 verlangt. Dieses ist aber der Fall; denn stellt C (Fig. 220) den Augpunkt, E Q den Schnitt der Bildebene mit der darauf senkrechtstehenden Aequatorebene C E D Q, und B D den Schnitt dieser Ebene mit einem beliebigen Meridian vor: so ist C B D der vorhin besprochene schiefe Kegel mit kreisförmiger Basis und C B″ D″ der durch die Bildebene erzeugte antiparallele Kegel, weil hier, wie in Fig. 219, das Dreieck B″ D T dem Dreiecke B T D″ ähnlich ist.

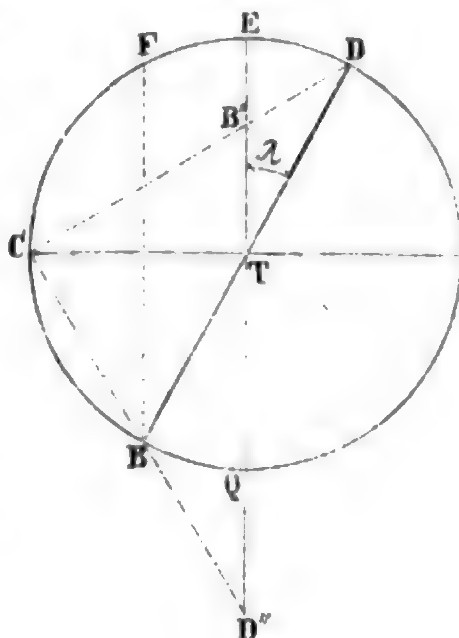
Aus Fig. 220 folgt auch sofort, dass alle projicirten Meridiane zwei Punkte, die Erdpole (N, S, Fig. 218), gemein haben, und dass folglich ihre Mittelpunkte auf der Linie liegen müssen, nach welcher sich die Bildebene und der Aequator schneiden (E Q, Fig. 220). Da zwei Punkte dieser

Kreise gegeben sind, so lassen sie sich zeichnen, sobald man ihre Halbmesser kennt; diese sind aber nach Fig. 220 und Gleichung (361) gleich

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\,(B''\,D'') = r \sec \lambda \qquad (362)$$

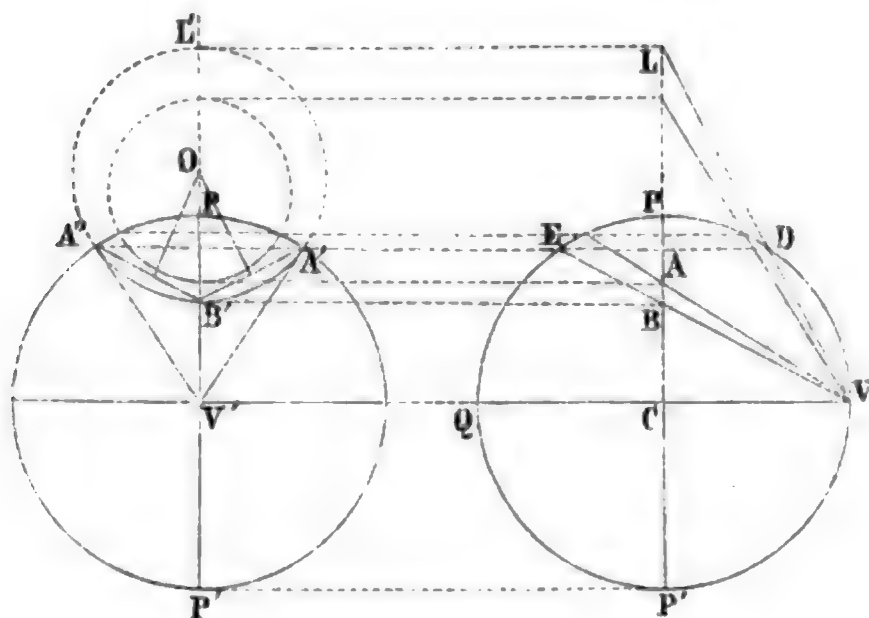
wenn λ den geographischen Längenunterschied zwischen dem Meridian, dessen Projection gesucht wird, und dem, der die Bildebene ist, bezeichnet.

Fig. 220.



Die Projectionen der Parallele, von denen schon bekannt ist, dass sie unter einer gewissen Bedingung Kreise sind, werden in ähnlicher Weise gefunden. Stellt nämlich (Fig. 222) V den Gesichtspunkt, V Q den Aequator, V P Q einen durch V gelegten Meridian, P P' die Spur der Bildebene und D E die irgend eines Parallels vor: so bestimmt sich der projicirende Kegel durch die Strahlen V D und V E, welche die Bildebene in den Punkten L und B schneiden. Der von der Bildebene erzeugte Kegelschnitt ist aber ein Kreis, sobald der Kegel V L B dem Kegel V D E, oder auch, sobald die Basis L B der Basis D E antiparallel, d. h. das Dreieck A L D dem Dreiecke

Fig. 221. Fig. 222.



A B E ähnlich ist. Dieses ist aber der Fall; denn man überzeugt sich leicht, dass ausser den Scheitelwinkeln bei A auch die Winkel bei E und L gleich sind. In Fig. 221, welche die Bildebene vorstellt, ist L' A'' B' A' der projicirte Parallelkreis D E; in der Projection erscheint jedoch nur das ausgezogene Stück A'' B A'. So wie dieses sind alle Projectionen der Parallele gegen den Aequator V' Q in Fig. 221 und E Q in Fig. 218 convex. Der Mittelpunkt

des Kreises L' A'' B' A' ist durch Construction leicht zu finden, weil er in der Mitte von B' L', und, wenn man L' nicht hätte, auf den Normalen liegen muss, welche in der Mitte der Sehnen A' B', A'' B' errichtet werden können.

Will man den Halbmesser B' O des Parallels A' B' A'' berechnen, so kann dieses geschehen, indem man die Länge $LB = \delta'$ sucht und halbirt. Es ist aber nach Fig. 222:

$$AB = AE \,.\, \mathrm{tg}\ (DEV) = AE \,.\, \mathrm{tg}\,\varepsilon$$
$$AL = AD \,.\, \cot\ (ALD) = AD \,.\, \cot\varepsilon$$

und da $AD = AE = r \cos\varphi$, wenn φ die Breite des Parallels vorstellt;

$$\delta' = AB + AL = r\cos\varphi\,(\mathrm{tg}\,\varepsilon + \cot\varepsilon) = \frac{2 r \cos\varphi}{\sin 2\varepsilon}.$$

Denkt man sich in Fig. 222 die Linie CD gezogen, so stehen die Centriwinkel φ und der Peripheriewinkel $DEV = \varepsilon$ auf einerlei Bogen DV; daher ist $\varepsilon = \frac{1}{2}\varphi$ und $\sin 2\varepsilon = \sin\varphi$, mithin auch

$$\delta' = LB = 2 r \cot\varphi \qquad (363)$$

und somit der Halbmesser des Parallels $A' B'' A'' = r \cot\varphi$.

Die stereographische Aequatorialprojection wird zur Darstellung der östlichen und westlichen Halbkugel der Erde benützt; ihre Abweichungen von der wahren Gestalt der abgebildeten Theile sind im Gegensatze zur stereographischen Polarprojection in der Mitte (bei C) am grössten und werden gegen die Ränder hin verhältnissmässig kleiner; überdiess bringt sie durch die Excentricität der Parallelkreise das Unbequeme mit sich, dass selbst Orte von gleicher Breite nicht mit einem und demselben Masse bestimmt werden können: streng genommen wird jeder Punkt nur aus einem Meridian und Parallelkreise, also mit Hilfe der Gleichungen (362) und (363) gefunden.

§. 204. Die **stereographische Horizontalprojection** ist zusammengesetzter als jede der vorhergehenden; doch erscheinen auch hier die Projectionen der Meridiane und Parallele als Kreise, deren Halbmesser und Mittelpunkte leicht bestimmt werden können, was die Construction des Netzes erleichtert. Wir werden uns zunächst mit den Projectionen der Meridiane befassen.

In den Figuren 223 und 224 stellen O, O' die Augpunkte, P, P' und Q, Q' die Erdpole, PQ, P' Q' die Erdaxe und AB, A' B' den Durchmesser des grössten Kreises vor, welcher als Bildebene dient und nach §. 201 von dem Augpunkte um 90° absteht. Die Bildebene ist in Fig. 223 durch den Kreis MANB begrenzt und in Fig. 224 stellt A' B' ihren Schnitt mit einem Meridian O' Q' P' vor, welcher durch den Augpunkt geht.

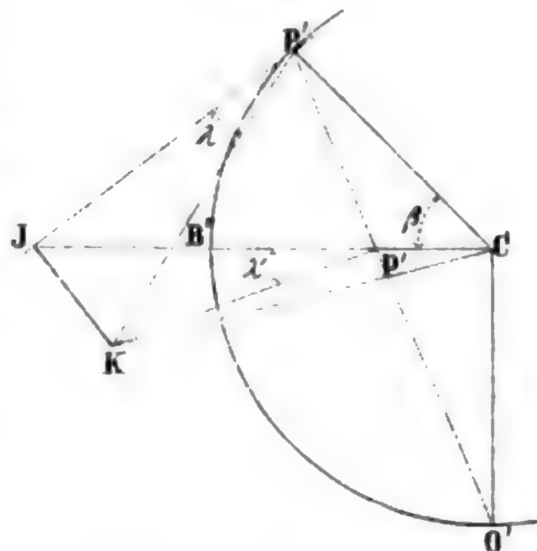
Zieht man von der Kegelspitze O' aus die Erzeugenden O' P', O' Q', so treffen diese die Bildebene in p', q' (Fig. 224) und p, q (Fig. 223). Da alle Erdmeridiane durch die Pole gehen, so müssen offenbar auch die Projectionen der Meridiane durch die projicirten Pole p, q gehen. Beweist man nun noch, dass die Meridianprojectionen Kreise sind, so liegen offenbar ihre Mittelpunkte auf der Linie RS, welche pq halbirt und senkrecht darauf steht.

Dass aber die Meridianprojectionen Kreise sein müssen, folgt aus dem leicht zu erweisenden Umstande, dass die Basis P′ Q′ des Kegels O′ P′ Q′, welche allen Meridianen zukommt, dem Schnitte p′ q′ durch die Bildebene A′ B′ antiparallel ist (§. 203). Stellt nun $p'q' = pq$ eine Sehne eines jeden projicirten Meridians vor, so ist klar, dass die Senkrechte auf ihrer Mitte (R S) der geometrische Ort der Mittelpunkte aller jener Meridianprojectionen ist.

Denkt man sich diese Projectionen wie in Fig. 223 gezogen, in dem Pole p Tangenten p D, p E .... an sie gelegt und darauf Senkrechte p D′, p E′ .... errichtet: so stellen die Punkte D′, E′ .... die Mittelpunkte der von p ausgehenden Kreise vor, welche von den Tangenten p D, p E .... berührt werden.

Will man nun den Mittelpunkt der Projection p u′ eines bestimmten Meridians finden, so muss man den Winkel $Dpq = \lambda'$ kennen, den diese Projection oder ihre Tangente p D mit der Projection des Hauptmeridians A B einschliesst. Trägt man alsdann diesen Winkel bei p an p q gleich q p D an und zieht p D′ senkrecht auf p D, so ist D′ der gesuchte Mittelpunkt, aus dem der Meridian p u′ q mit dem Halbmesser $\varrho = D'p$ beschrieben wird.

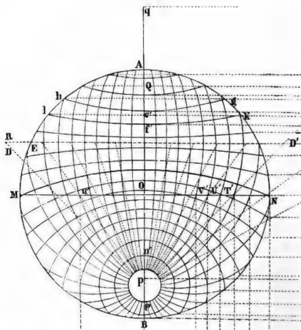
Fig. 225.



Der Winkel λ′ ist aber merkwürdigerweise dem Längenunterschiede λ zwischen einem beliebigen Meridian und dem durch den Augpunkt gehenden Hauptmeridian A O B gleich.[1] Denn stellt in Fig. 225 der Punkt C den Mittelpunkt und P′ den Pol der Erde vor; ist ferner J C K ein Theil der Bildebene, welche mit der Erdaxe P′ C den Winkel β einschliesst; bezeichnet weiter J P′ den Hauptmeridian und P′ K einen anderen um den Winkel λ von ersterem abliegenden Meridian; und ist endlich P′ O′ die Gesichtslinie des Punkts P′, also p′ das Bild von P′: so wird die Bildebene durch die Ebene J P′ O′ nach J p′ und durch die Ebene K P′ O nach K p′ geschnitten, so dass $\llcorner\ Jp'K = \lambda'$ die perspectivische Projection von λ ist. Erwägt man nun, dass der Winkel $CP'O' = P'O'C = 45^0 - \frac{1}{2}\beta$ und $P'p'J = p'CP' + CP'O' = 45^0 + \frac{1}{2}\beta$; dass ferner $CP'J = 90^0$, also $p'P'J = 90^0 - CP'O' = 45^0 + \frac{1}{2}\beta = P'p'J$: so ist das Dreieck J P′ p′ gleichschenklig, also $JP' = Jp'$. Da nun vermöge der Construction die beiden Dreiecke J K P′ und J K p′ bei J recht-

[1] Wenn Salneuve in seinem Cours de topographie (Nr. 419) behauptet, zwischen λ′, λ und β (der geographischen Breite des Augpunkts) bestehe die Relation: $\operatorname{tg} \lambda' = \operatorname{tg} \lambda \,.\, \sin \beta$, so irrt er darin, dass er den Scheitel des Winkels λ nach dem Mittelpunkte C der Erde und nicht nach dem perspectivischen Bildpunkte p′ (Fig. 224) projicirt.

Fig. 223.



winklig sind und die gleichen Seiten J K und J P', J p' haben, so sind dieselben congruent, und folglich ist der Winkel $\lambda' = \lambda$, was zu beweisen war.

Soll die Länge des Krümmungshalbmessers $\varrho = D'p$ berechnet werden, so hat man dazu für's Erste den mit Hilfe der Fig. 223 leicht zu bildenden Ausdruck:

$$2\varrho \sin\lambda' = p'q' = pq$$

und hiernächst nach Fig. 224 die Länge $p'q' = pq = p'C + Cq'$. Da aber

$$p'C = r\,\mathrm{tg}\,(C\,O'\,p') = r\,\mathrm{tg}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)$$

$$q'C = r\,\mathrm{tg}\,(C\,O'\,q') = r\cot(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)$$

so erhält man durch Addition und einfache Reduction:

$$p'q' = \frac{2r}{\sin(90^0 - \beta)} = \frac{2r}{\cos\beta} = 2r\sec\beta$$

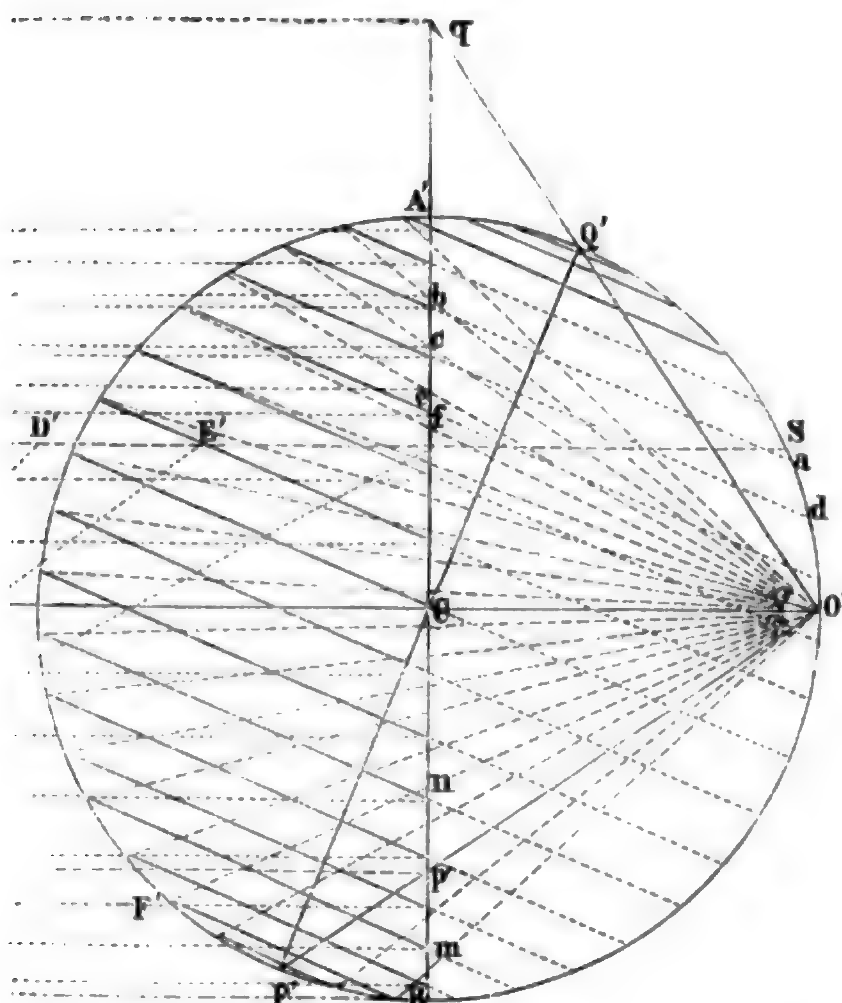
mithin auch durch Substitution dieses Werths von p' q' in die Grundgleichung:

$$\varrho = \frac{r}{\cos\beta\sin\lambda'}. \qquad (364)$$

Für $\beta = 0$, d. h. wenn der Augpunkt im Aequator liegt, geht die stereographische Horizontalprojection in die stereographische Aequatorialprojection über und man erhält

$$\varrho = \frac{r}{\sin\lambda'}.$$

Fig. 224.



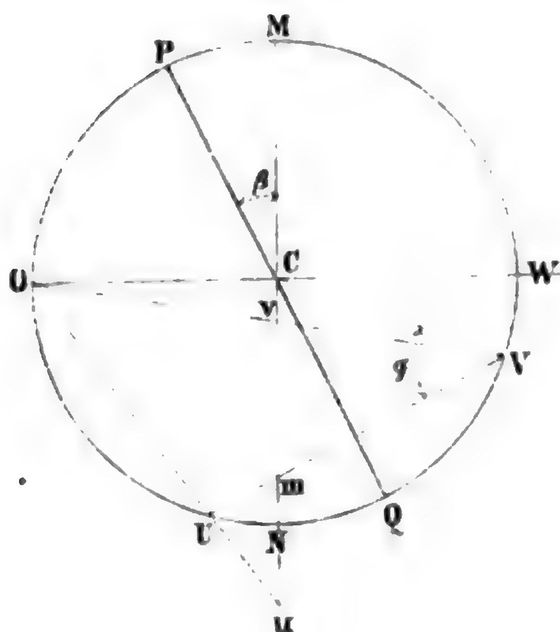
Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem in Nr. 362 für ϱ gefundenen, so existirt insofern eine Verschiedenheit, als dort

$$\varrho = r \sec \lambda = \frac{r}{\cos \lambda}$$

steht. Dieser Unterschied verschwindet aber, wenn man bedenkt, dass das λ des letzteren Ausdrucks das Complement von λ' im ersteren ist; dass somit $\lambda' = 90^0 - \lambda$ und folglich $\sin \lambda' = \cos \lambda$ ist. Es geht also, wie es sein muss, für $\beta = 0$ die Horizontalprojection bezüglich der Meridiane in die Aequatorialprojection über.

Dass auch die Projectionen der Parallele Kreise sind, lässt sich wie folgt beweisen. Stellt O in Fig. 226 den Gesichtspunkt, O M N einen durch O gelegten und auf der Bildebene M N senkrecht stehenden grössten Kreis, P Q die Erdaxe und U V den Schnitt eines Parallels vor: so geben offenbar die Gesichtslinien O V, O U die Bilder v, u der Endpunkte des Parallelendurchmessers V U, und es wird der Perspectivkegel V O U von der Bildebene M N antiparallel geschnitten, weil das Dreieck v m V dem Dreiecke u m U wegen der gleichen Winkel bei m und jener bei V und u ähnlich ist. Liegt aber v u antiparallel zu V U, so sind auch die Schnitte der Bildebene mit dem Kegel O V U nach §. 203 Kreise.

Nach dieser Vorbereitung ist die Zeichnung der perspectivischen Parallele



nicht schwierig. Denn handelt es sich z. B. um das Parallel B′ F′ (Fig. 224), so sind n, m die Bilder der Endpunkte des Durchmessers B′ F′: halbirt man nun m n und projicirt den Mittelpunkt auf die Linie A B der Fig. 223, so hat man den Mittelpunkt des Perspectivparallels B n′, welches mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}$ (m n) beschrieben wird. Von dem Parallel a b (Fig. 224) kann der Schnittpunkt des Strahls O′ a mit der Bildebene A′ B′ nicht erhalten werden, man muss sich desshalb begnügen, die ihm entsprechende Projection h c′ g (Fig. 223) aus den drei Punkten c′, h, g zu zeichnen. Der Punkt c′ ergibt sich als das eine Ende des Durchmessers von a b wie bisher; h und g aber entsprechen dem Schnitte b der Ebene des Parallels a b mit der Axe A′ B′ und erscheinen auf der Bildebene offenbar am Kreise A N B M. Dass alle Parallelen-Mittelpunkte auf der Linie A B liegen müssen, ist wohl für sich klar.

Zur Berechnung des Halbmessers ϱ' der projicirten Parallelkreise kann man sich der Fig. 226 bedienen. Der Durchmesser $2\varrho'$ ist nämlich = v u = C u — C v, und da nach der Figur:

$$C\,u = r\,\mathrm{tg}\,(C\,O\,u) = r\,\mathrm{tg}\,(90^0 - \tfrac{1}{2}[\varphi + \beta]) = r\cot\tfrac{1}{2}(\varphi + \beta)$$
$$C\,v = r\,\mathrm{tg}\,(C\,O\,v) = r\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(V\,C\,W) = r\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \beta)$$

so folgt

$$\varrho' = \frac{r\cos\varphi}{2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\beta)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\beta)} = \frac{r\cos\varphi}{\sin\varphi+\sin\beta}. \quad (365)$$

Ist $\beta = 0$, so wird $\varrho' = r\cot\varphi$, was mit der Gleichung (363) übereinstimmt und übereinstimmen muss, da die stereographische Aequatorialprojection nur ein besonderer Fall der stereographischen Horizontalprojection ist. Dasselbe gilt von der stereographischen Polarprojection; denn setzt man in den Gleichungen (364) und (365) $\beta = 90^0$, so wird, den Entwickelungen des §. 202 entsprechend:

$$\varrho = \infty \text{ und } \varrho' = r\,\mathrm{tg}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

§. 205. Die **Centralprojection** liefert Netze, in welchen die Meridiane als gerade Linien erscheinen, die sich im Pole der Erde schneiden, während die Parallele je nach der Lage der Bildebene als Theile von Kreisen, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln erscheinen. Als Kreise stellen sich die Parallele, wie man leicht einsieht, nur dann dar, wenn die Bildebene den Pol berührt. In diesem Falle, und wenn gleichzeitig nur ein mässiges Stück der Erdoberfläche in der Umgebung eines Pols abzubilden wäre, liesse sich die Centralprojection mit Vortheil anwenden; in jedem anderen Falle bietet

sie viele Unbequemlichkeit wegen der Zeichnung der Parallele und grosse Unvollkommenheit an den Rändern der Karte. Desshalb wendet man sie fast gar nicht an, und darum findet sie auch hier keine weitere Beachtung.

2. Orthographische Projectionen.

§. 206. Wenn man den Gesichtspunkt in unendlicher Entfernung auf der Normale zur Bildebene annimmt, so sind alle projicirenden Linien unter sich parallel und senkrecht zur Bildebene; die hierdurch entstehenden Kartennetze nennt man orthographische Projectionen, und man unterscheidet nach der Lage des Augpunkts: Polar-, Aequatorial- und Horizontalprojectionen, oder Projectionen auf den Aequator, auf einen Meridian, oder auf einen grössten Kreis, welcher der Horizontalebene des in der Mitte der Karte gelegenen Orts parallel und folglich der wahre astronomische Horizont dieses Orts ist.

Im Allgemeinen sind die orthographischen Projectionen noch unvollkommener als die stereographischen, wesshalb sie nur wenig Anwendung finden, den Fall ausgenommen, wo es sich nicht um die Abbildung einer Halbkugel, sondern nur eines kleinen Theils der Erdoberfläche handelt; denn in diesem Falle würde die Bildebene theilweise mit der Kugelfläche zusammenfallen und nur an den Rändern abstehen, woselbst kleine Verzerrungen der Bilder stattfänden.

§. 207. Die **orthographische Polarprojection** ist in den Figuren 227 und 228 dargestellt und man macht sich sofort aus dem Anblicke klar, dass die Meridiane als Durchmesser (A Q, E R) der durch den Aequator (E A R Q, E′ R′) vorgestellten Bildebene, und die Parallele als concentrische Kreise erscheinen, deren Mittelpunkte das Bild des Erdpols ist. Die abgebildeten Meridiane haben gegen einander dieselbe Neigung (λ) wie die wirklichen, und die Halbmesser der Parallelkreise (z. B. B D, B′ D′) sind $r \cos \varphi$, wenn φ die geographische Breite des Parallels bezeichnet.

§. 208. Die **orthographische Aequatorialprojection** ist in den Figuren 229 und 230 dargestellt. Da der Augpunkt in unendlicher Entfernung auf der Aequatorebene liegt, so laufen alle Gesichtslinien dieser Ebene parallel und folglich erscheinen die Parallele (A B), wie der Aequator (E Q) als gerade Linien. Die Meridiane bilden mit den auf der Bildebene senkrecht stehenden Gesichtslinien schiefe Cylinderflächen von kreisförmiger Basis: die Schnitte dieser Cylinder durch die Bildebene sind folglich Ellipsen, welche alle durch die Pole gehen und daher die Erdaxe S N zur grossen Axe haben; die kleine Axe ergibt sich, wenn man den auf der Erdaxe senkrecht stehenden Durchmesser des Meridians auf die Bildebene projicirt. In den folgenden Figuren ist für den Meridian M′ C′ die zugehörige kleine Halbaxe = M C. Mit Hilfe der beiden Axen können die Ellipsen in bekannter Weise aufgetragen werden; genauer aber erhält man sie aus ihren Coordinaten. Sieht man nämlich die grosse Axe S N (Fig. 229) als

Fig. 227 (§. 207).

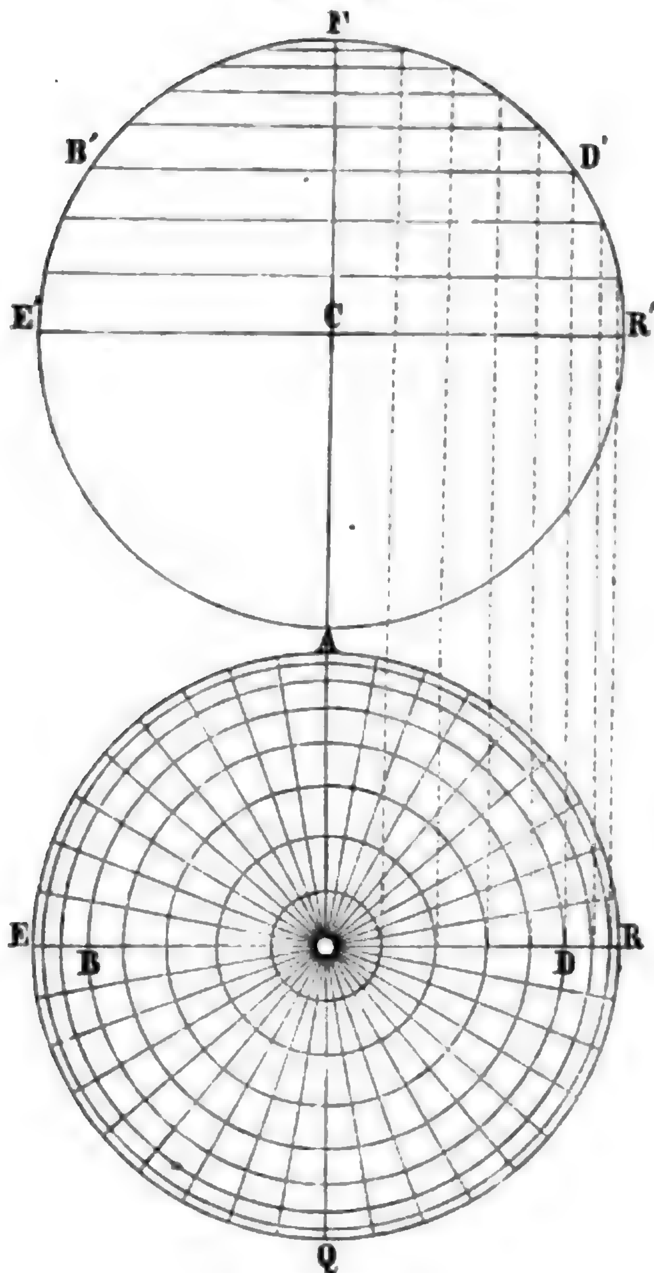


Fig. 228.

Fig. 229 (§. 208).

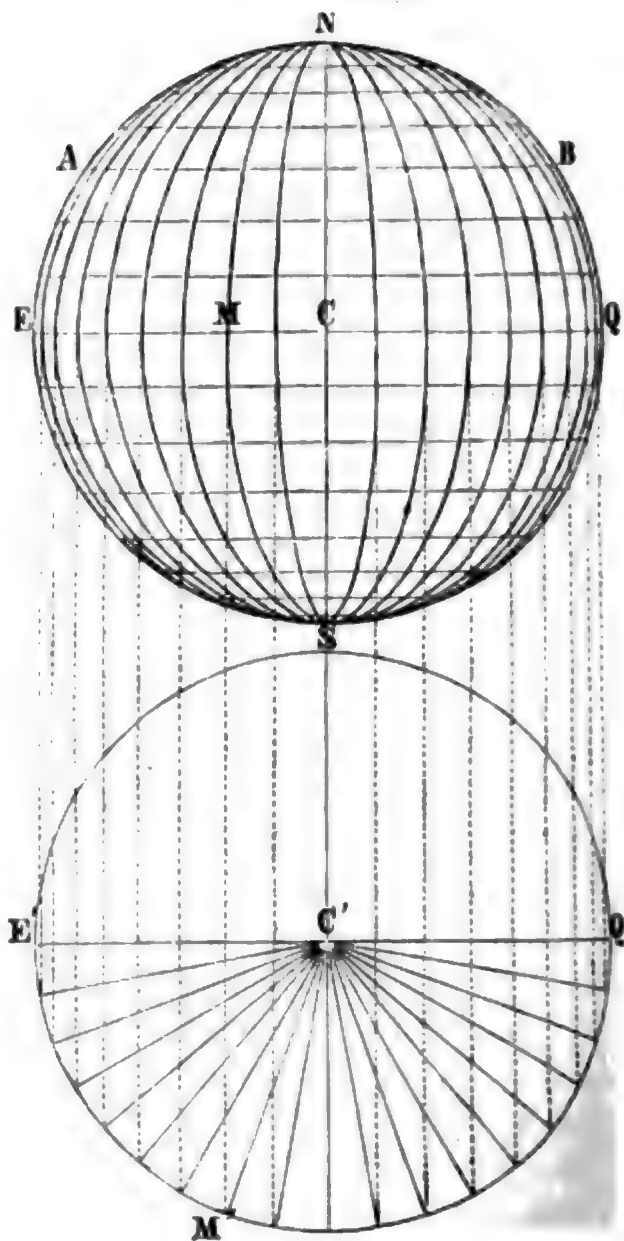


Fig. 230.

Abscissenaxe an, so stellen die Projectionen der Parallele (A B, E Q) die Richtungen der Ordinaten vor. Handelt es sich nun um irgend einen Meridian (M′ C′), dessen Längenunterschied gegen die Bildebene $= \lambda'$ ist, so sind die beiden Halbaxen der Ellipse, welche ihn vorstellt, r und r cos λ, und mithin findet, wenn C der Mittelpunkt der Ellipse und der Anfang der Coordinaten ist, für die Ellipse S M N S die Gleichung statt:

$$y^2 + x^2 \cos^2 \lambda = r^2 \cos^2 \lambda.$$

Berücksichtigt man jedoch, dass $x = r \sin \varphi$, wenn φ die Breite eines Parallels (hier einer Ordinate), so geht vorstehende Gleichung über in

$$y = r \cos \lambda \cos \varphi \qquad (366)$$

woraus man also auf sehr einfache Weise die Lage eines Punkts findet, dessen geographische Länge λ gegen die Bildebene und dessen Breite φ bekannt sind.

§. 209. Die **orthographische Horizontalprojection** setzt als Augpunkt einen unendlich weit entfernten Punkt des Erdhalbmessers, welcher durch die Mitte des abzubildenden Landes geht, und als Bildebene den grössten Kreis, der auf diesem Halbmesser senkrecht steht, voraus.

Um die Projectionen der Meridiane zu finden, denke man sich in Fig. 231 durch einen beliebigen Punkt V, der den Mittelpunkt des abzubildenden Landes vorstellen kann, einen Meridian V P B P′ A gelegt und

Fig. 231.

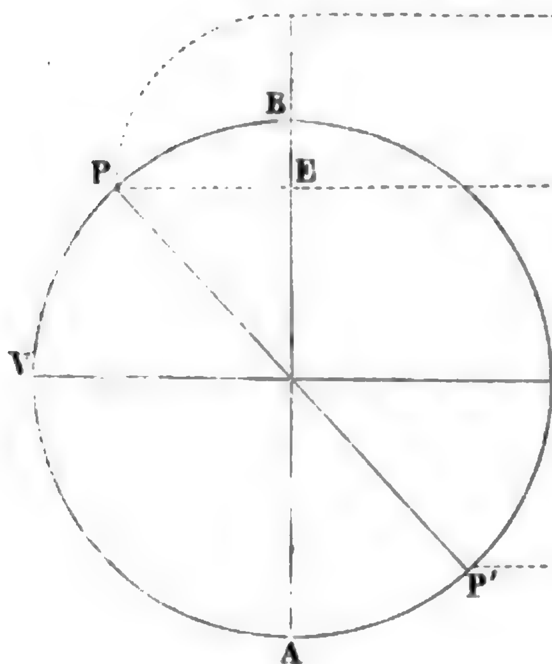
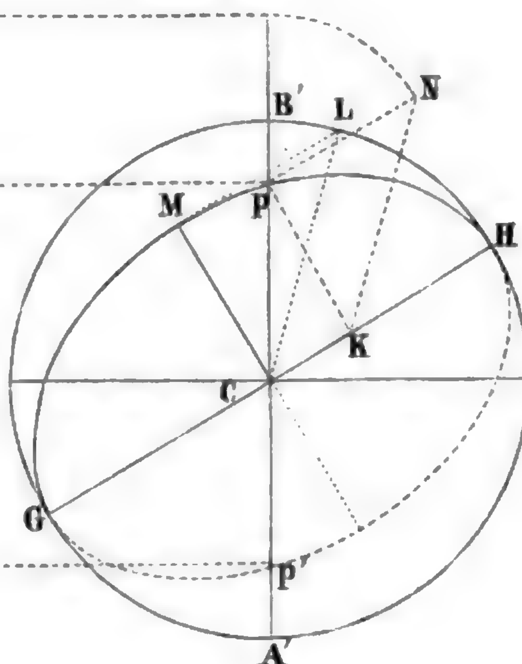


Fig. 232.



darauf eine senkrechte Ebene A B errichtet, welche der Horizont von V ist. Die Linie P P′ stelle die Erdaxe, also die Linie vor, welche mit dem Punkte V den Meridian V P P′ bestimmt. Bezeichnet die Figur 233 die auf diesem Meridian nach A B senkrecht stehende Bildebene, so sind auf ihr p, p′ die Projectionen der Erdpole P, P′, durch welche nothwendig alle Meridiane gehen müssen. Da die Projectionen dieser Meridiane aus Schnitten von schiefen Kreis-Cylinderflächen entstehen, so sind dieselben Ellipsen, von denen man jetzt bereits zwei Punkte p und p′ kennt; und da alle Meridiane durch die Linie P P′ (Fig. 232) gehen und durch die Bildebene A B geschnitten werden, so ist klar, dass der Schnitt dieser Ebene mit jedem Meridian nur ein Durchmesser desselben und zugleich auch nur die grosse Axe seiner elliptischen Projection sein kann. Diese Axe findet man aber wie folgt durch Construction.

Sieht man den durch V gelegten Meridian V P P′ als den Hauptmeridian an und bezeichnet λ den geographischen Längenunterschied zwischen diesem und dem Meridian, dessen Projection G M p H p′ gesucht wird; ist ferner β die geographische Breite des Punkts V und λ^0 die Projection des Winkels λ auf die Bildebene: so besteht die Relation

$$\operatorname{tg} \lambda^0 = \operatorname{tg} \lambda \sin \beta \qquad (367)$$

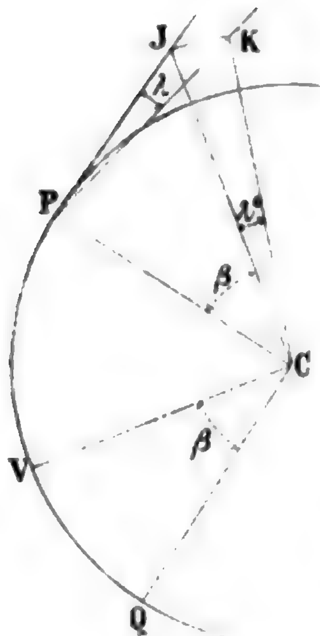


Fig. 233.

denn nach Fig. 233 ist, — wenn P J, P K die Tangenten an die vorhin genannten Meridiane im Pole P und J C, K C ihre Projectionen auf der durch A B gehenden, senkrecht zu V P P′ stehenden Bildebene, also J P K, J C K die Winkel λ, λ^0 sind, — aus dem bei J rechtwinkligen Dreiecke P K J:

$$JK = PJ \cdot \operatorname{tg} \lambda$$

und aus dem Dreiecke J K C, welches ebenfalls bei J einen rechten Winkel hat:

$$JK = JC \cdot \operatorname{tg} \lambda^0.$$

Erwägt man nun, dass $PCJ = \beta$ und folglich $PJ = JC \cdot \sin \beta$ ist, so folgt aus den vorstehenden zwei Gleichungen die mit (367) bezeichnete, deren Richtigkeit somit feststeht.

Da der Durchmesser A′ B′ in Fig. 232 die Projection des ersten Meridians V P P′ ist, so braucht man, um den Schnitt des Meridians λ mit der Bildebene zu erhalten, nur den aus Gleichung (367) berechneten Winkel λ^0 an A′ B′ in C anzutragen und einen Durchmesser zu ziehen, so ist dieser die grosse Axe des zu projicirenden Meridians. Angenommen, es sei $B'CH = \lambda^0$, so ist G H die gesuchte grosse Axe und die Senkrechte C M die Richtung der kleinen Axe. Die Länge C M derselben ergibt sich, wenn man auf die in der Figur durch punktirte Linien angedeutete Weise $pKN = \lambda$ macht, C L parallel zu K N zieht und den Schnittpunkt L nach M projicirt.

Fig. 234.

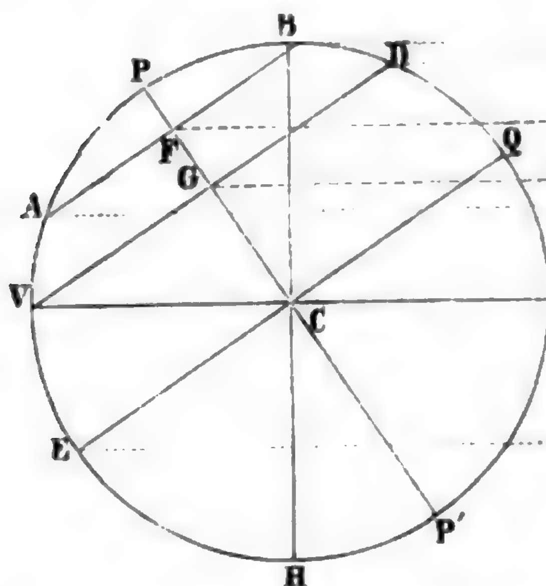
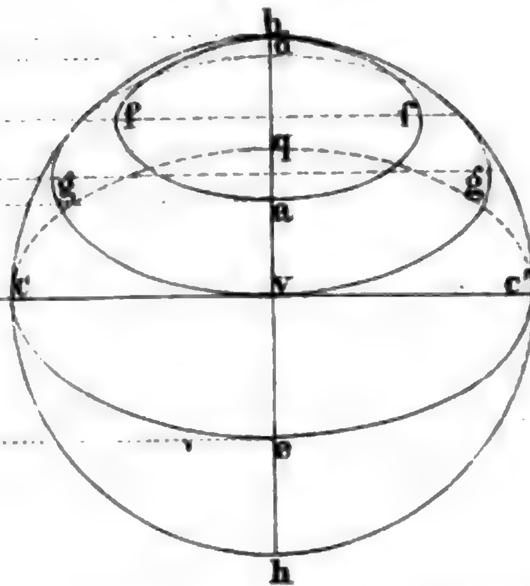


Fig. 235.



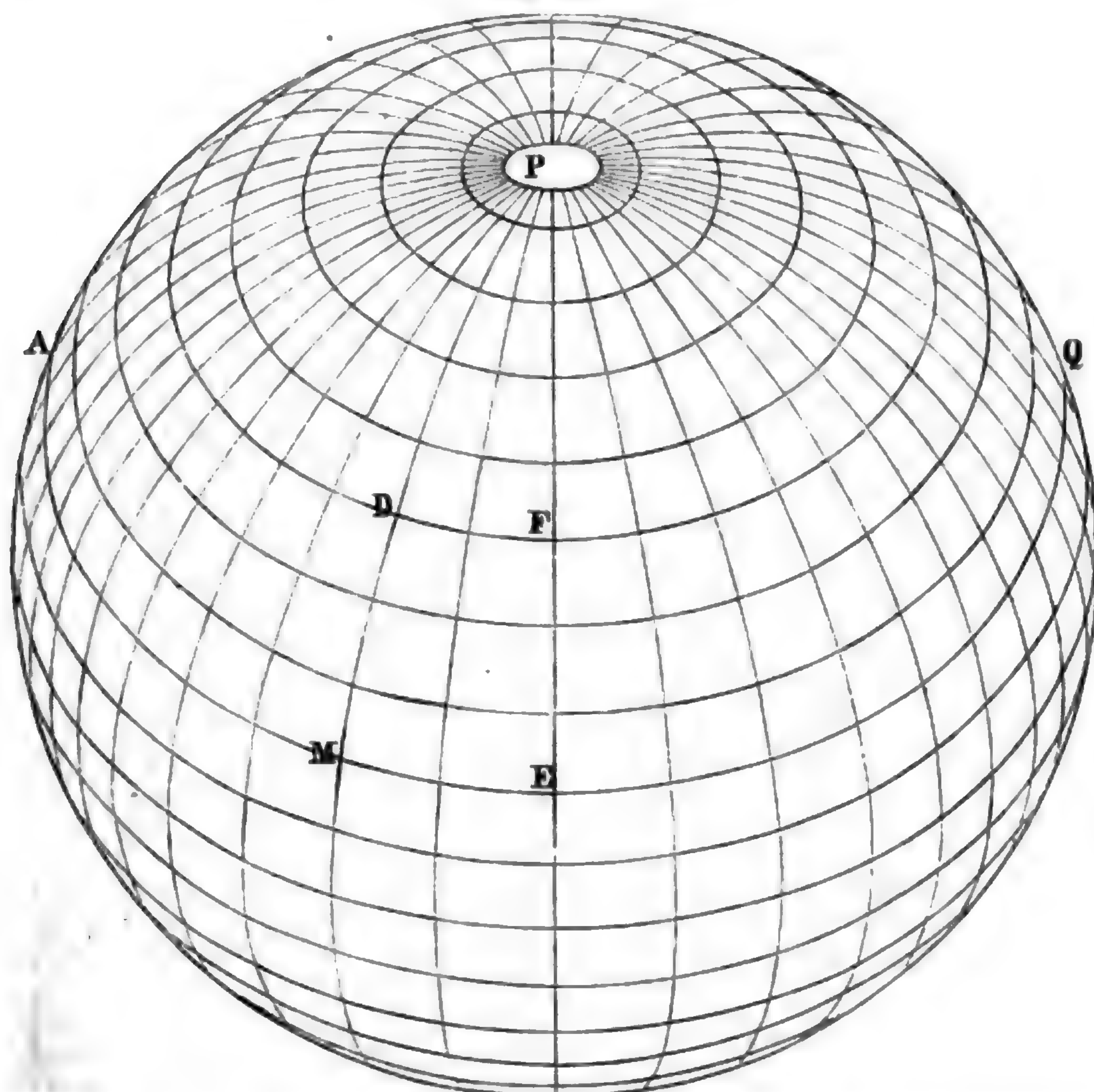
Will man, nachdem die Richtung der grossen Axe (G H) der Projection eines Meridians mit Hilfe des aus der Gleichung (367) gesuchten Winkels λ^0 bestimmt ist, die Gleichung jener Projection (G M p H p′) in Bezug auf ihre Axen ($CH = r$ und $CM = r \cos \beta \sin \lambda$) aufstellen, so hat man ganz einfach:

$$y = \cos \beta \sin \lambda \sqrt{r^2 - x^2}. \qquad (368)$$

Werden hieraus für gegebene oder angenommene Werthe von x die zugehörigen y berechnet, so lassen sich alle beliebigen Punkte einer Meridianprojection genau auftragen.

Läge es in der Absicht des Verfertigers eines Netzes nach der orthographischen Horizontalprojection, alle Meridianpunkte nur auf ein Axensystem, nämlich auf die zu einander senkrechten Durchmesser A′ B′ und V′ C (wovon der erste den Hauptmeridian vorstellt) zu beziehen, so könnte dieses geschehen, indem man die neuen auf C V′ gezählten Abscissen mit x′ und die auf C B′ genommenen Ordinaten mit y′ bezeichnet und, da

Fig. 236.



Winkel M C B′ = 90⁰ — λ⁰, nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie setzt:

$$x = x' \sin \lambda^0 - y' \cos \lambda^0$$
$$y = x' \cos \lambda^0 + y' \sin \lambda^0.$$

Was schliesslich die Projectionen der Parallele betrifft, so werden diese aus demselben Grunde wie die der Meridiane auch Ellipsen; es kann sich also hier nur noch um die nähere Bestimmung derselben handeln. Stellt in Fig. 234 der Kreis V P P′ einen durch den Pol V der Bildebene B H gelegten und zu dieser Ebene senkrecht stehenden grössten Kreis, P P′ die Erdaxe

und A B den Schnitt der Ebene eines Parallels mit der des Meridians V P P' vor: so ist klar, dass der mit der Bildebene B H parallele Durchmesser des Parallels, dessen Projection in Fig. 234 der Punkt F ist, in der Projection auf die Bildebene (Fig. 235) in wahrer Grösse erscheint, und dass also, wenn man f f = A B macht, f f die grosse Axe der Ellipse ist, nach welcher sich das Parallel A B projicirt. Die kleine Axe a d erhält man durch Projection des Durchmessers A B auf B H oder b h. Das Parallel V D, welches durch den Pol der Bildebene geht, erscheint in seiner Projection als die Ellipse g v g' d und der Aequator E Q als die Ellipse c e c' q.

Ein vollständiges Bild einer in orthographischer Horizontalprojection dargestellten Halbkugel liefert Fig. 236, in welcher P den Pol, P E den Hauptmeridian, P M einen anderen um 20⁰ entfernten Meridian, A E Q den Aequator und D F ein Parallel von 30⁰ geographischer Breite bezeichnet.

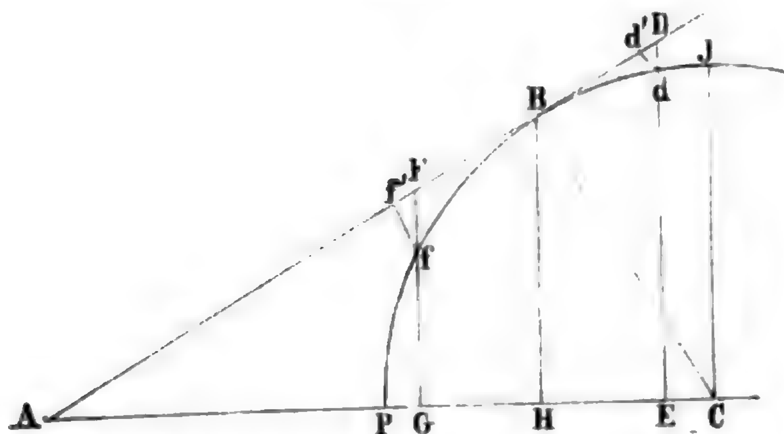
B. Abwickelbare Projectionen.

1. Conische Projectionen.

§. 210. Allen conischen Projectionen liegt die Idee zu Grunde, die Meridiane und Parallelkreise zuerst auf einem Kegel darzustellen, welcher den abzubildenden Theil der Kugelfläche nach dem mittleren Parallelkreise berührt, und alsdann diesen Kegel mit seinem Liniensystem abzuwickeln. Da jedoch diese Methode, Kartennetze zu entwerfen, eben so wenig als irgend eine andere fehlerfrei ist, so hat man, wie hier gezeigt wird, sie nach Beschaffenheit der Fehler, welche vermieden oder geduldet werden sollten, verschieden abgeändert.

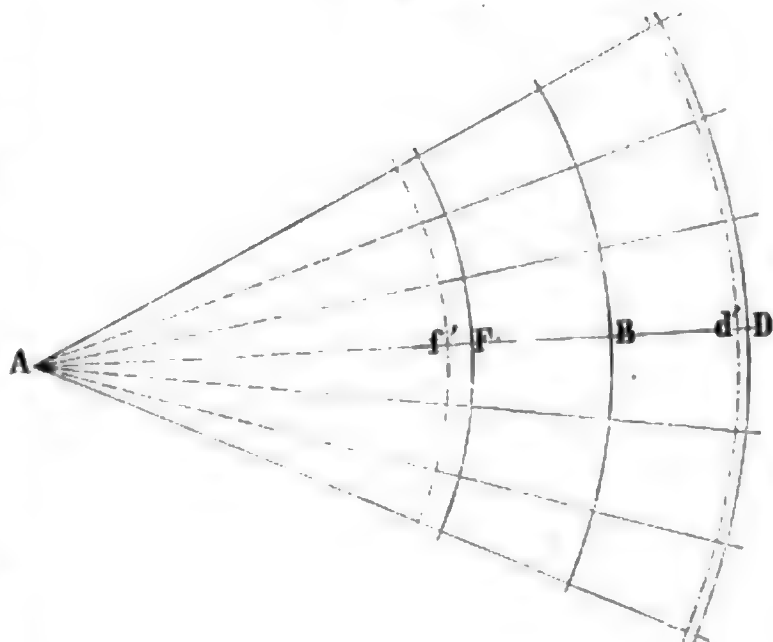
Um die Grundidee näher zu erläutern, sei P B J in Fig. 237 ein Viertel eines Meridians und B H der Schnitt des mittleren Parallels mit der Meridianebene; D E und F G seien die äussersten, von B H gleich weit entfernten Parallele des darzustellenden Stücks der Erdoberfläche. Zieht man an den Punkt B eine Tangente, welche der Erdaxe in dem Punkte A begegnet, so ist A D die Erzeugende des Kegels, auf dessen Mantelfläche (und zwar zwischen den Ebenen D E und F G) das Kartennetz gezeichnet werden soll. Auf diesem Kegel werden die Meridiane als Erzeugende, die Parallelkreise aber als senkrechte Querschnitte erscheinen und die Abwickelung wird sich auf die in Fig. 239 angedeutete und leicht zu erklärende Weise darstellen.

Fig. 237.



Aus der Vergleichung dieser beiden Figuren entnimmt man sofort, dass zwar die Netzvierecke wie auf der Kugel rechtwinklig sind und die Punkte von einerlei geographischer Breite auf dem Bilde dieselben relativen Entfernungen wie auf der Erdoberfläche haben; dass aber die Längen (B D, B F . . . .) dieser Vierecke für gleiche Breitendifferenzen verschieden und um so kleiner sind, je näher sie am Pole liegen, während sie gegen den Aequator hin immer länger werden. Auch findet man leicht, dass — mit Ausnahme des mittleren Parallels — auf allen Parallelen des Netzes die Längendifferenzen grösser sind als auf den gleichnamigen Parallelen der Erdkugel.

Fig. 238.



Um diese beiden Fehler theilweise zu verbessern, trägt man in Fig. 238 von dem Punkte B aus die Längen der Bögen B d = B d' und B f = B f' ab und beschreibt in der Abwickelung die punktirten Bögen d' und f' mit den Halbmessern A d' und A f'. Dadurch erreicht man den Vortheil, dass die Längen B d', B f' . . . . der Netzvierecke denen auf der Kugel gleich und die Abweichungen in den geographischen Längen kleiner werden als vorhin.

§. 211. **Projection von Bonne.** Wenn man die geographischen Längenunterschiede des Netzes mit den wirklich stattfindenden übereinstimmen lassen will, so muss man (Fig. 239) auf jedem der construirten Parallelkreise (20, 30, 40 . . . .) von dem mittleren Meridian (28) aus die wahren Grössen der geographischen Längengrade (28—27, 28—29 . . . .) abtragen und die einem Meridian (27, 29 . . . .) angehörigen Punkte durch eine stetige Curve verbinden, welche dann dessen Projection darstellt. Zwar sind diese Meridiane keine Kegelelemente mehr, aber sie gewähren ausser dem eben bezeichneten Vortheile auch noch den, dass die Flächeninhalte der Netzvierecke auf der Karte den gleichnamigen auf der Kugel genau proportional sind. Von kleinen Fehlern ist selbstverständlich auch dieses Netz nicht frei, und es sind hier vor allen die Abweichungen der Winkel der Vierecke von 90⁰ zu erwähnen; diese Abweichungen betragen jedoch so wenig, dass man sie bei nicht übermässiger Ausdehnung der Karte übersehen und die Entfernung zweier Punkte ohne erhebliche Differenz nach einem gemeinschaftlichen Meilenmassstabe bestimmen kann. Dieser Umstand ist der in Rede stehenden Projection sehr günstig, und man kann wohl

behaupten, dass keine andere so häufig gebraucht wird als diese, welche man die **Bonne'sche** oder **modificirte Flamsteed'sche Projection** nennt. In §. 113 ist auch bereits eine Anwendung von ihr gemacht, da

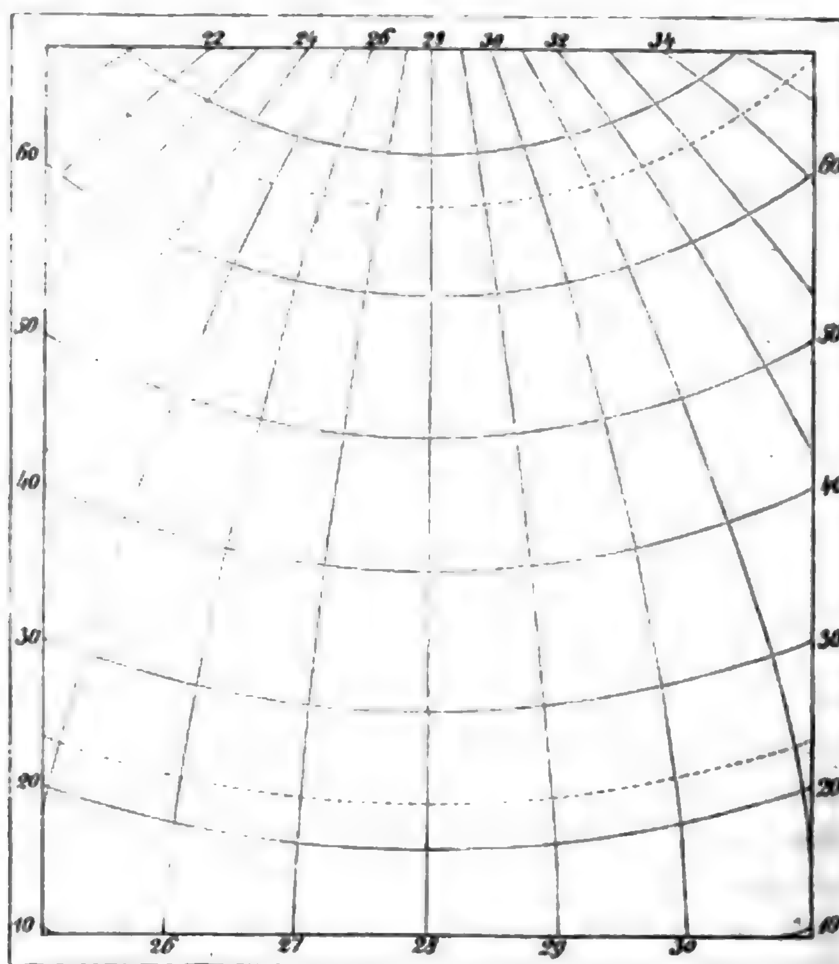


Fig. 239.

sie der dortselbst besprochenen topographischen Karte von Thüringen, und ebenso der von Bayern, Preussen, Frankreich und anderen Ländern zu Grunde liegt. Wegen ihrer Wichtigkeit soll sie etwas ausführlicher als die übrigen conischen Projectionen behandelt und dabei auch die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt werden.

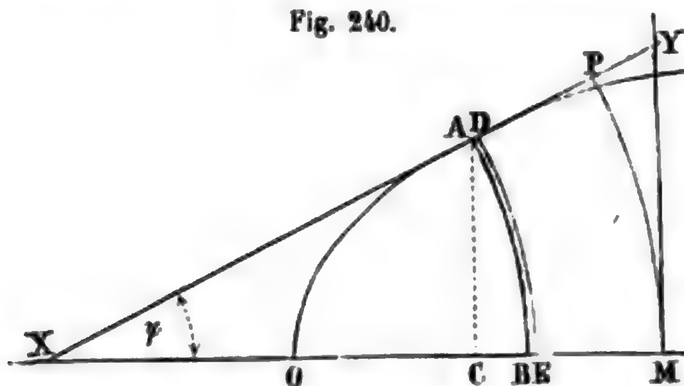


Fig. 240.

Bestimmen wir zunächst die Coordinaten eines seiner geographischen Lage nach gegebenen Punkts in Bezug auf zwei rechtwinklige Axen. Diese Axen seien nach Fig. 240 der mittlere Meridian M X für die Abscissen und der mittlere Parallelkreis M P für die Ordinaten; der Ursprung der Coordinaten liegt somit im Mittelpunkte der Karte, und es sei

β die geographische Breite dieses Punkts M,
φ die geographische Breite irgend eines andern Punkts A, und
λ der geographische Längenunterschied zwischen den Punkten A und M im Bogenmass.

Unsere Aufgabe ist, aus diesen Stücken und den bekannten Erddimensionen die Coordinaten des Punkts A (M C = x und A C = y) zu finden.

In Fig. 241 sei O der Pol der Erde, M B O der mittlere Meridian, P A O der Meridian des Orts A, so dass also die elliptischen Bögen M O und A O zu den Complementen der Breiten β und φ gehören und A L B $= \lambda$ ist; ferner sei M X Tangente des mittleren Meridians in dem Punkte

Fig. 241.

M und folglich zugleich der Halbmesser des mittleren Parallels M P auf der Karte (Fig. 240). Bezeichnet nun weiter

a die halbe grosse Axe der die Erdoberfläche erzeugenden Ellipse, also den Halbmesser des Aequators,
e die Excentricität dieser Ellipse,
ϱ den Halbmesser M X des Kartenparallels M P von der Breite β,
ϱ' den Halbmesser des Kartenparallels A B von der Breite φ,
δ die Differenz $\varphi - \beta$ der geographischen Breiten von A und M,
α die Länge des Meridianbogens M B, und endlich
ψ den Winkel A X B, welcher durch den Bogen A B $= \varepsilon$ gemessen wird: so ist als bekannt anzunehmen, dass die Länge der Tangente M X $= \varrho$ an die bezeichnete Ellipse ausgedrückt wird durch

$$\varrho = \frac{a \cot \beta}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}} \tag{369}$$

und dass die Länge des Meridianbogens M B zwischen den geographischen Breiten φ und β gleich ist

$$\alpha = a\,(1 - {}^1\!/_2 + {}^1\!/_{16}\,A^2)\,\delta - {}^3\!/_2\,a\,A \cos\gamma \sin\delta + {}^{15}\!/_{32}\,a\,A^2 \cos 2\gamma \sin 2\delta,$$

wobei A die Abplattung und γ die Winkelsumme $\varphi + \beta$ oder $2\beta + \delta$ bedeutet. Den Bogen α braucht man übrigens nicht erst zu berechnen, da es Tafeln gibt, welche die Länge des Meridianbogens vom Aequator bis zu einem beliebigen Parallel darstellen, aus denen also durch Subtraction der Bogenlängen der Werth von α gefunden werden kann. Die Tafel Nr. I des Anhangs enthält diese Längen von 30 zu 30 Minuten; in dem Berliner

astronomischen Jahrbuche für 1852 sind sie aber von 10 zu 10 Minuten aufgeführt, und für zwischenliegende Breiten können die zugehörigen Werthe leicht eingeschaltet werden. Wir sehen daher α als eine gegebene Grösse an und erhalten somit den Halbmesser ϱ' des Kartenparallels A B, welcher um die Länge α kleiner ist als ϱ, aus der Gleichung:

$$\varrho' = \varrho - \alpha. \tag{370}$$

Nach der Bonne'schen Projection ist der Kartenparallelbogen A B dem wirklichen Bogen A B auf dem Sphäroide (Fig. 242) gleich; demnach auch arc A B = arc ε = B L . λ, oder, wenn man den aus der höheren Geometrie ebenfalls bekannten Werth des Halbmessers B L einsetzt:

$$\varepsilon = \frac{a \lambda \cos \beta}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}}. \tag{371}$$

Mit Hilfe dieses Werths erhält man die Grösse des Winkels A X B = ψ im Bogenmass (d. i. für den Halbmesser 1) auf bekannte Weise gleich

$$\psi = \frac{a \lambda \cos \beta}{\varrho' \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}}. \tag{372}$$

Damit aber ergeben sich sofort aus Fig. 241 die Coordinaten des Punkts A, nämlich

$$x = M C = \varrho - \varrho' \cos \psi \tag{373}$$
$$y = A C = \varrho' \sin \psi. \tag{374}$$

Hat der Punkt M eine geographische Breite β von $50^0\,36'$ und der Punkt A eine Breite $\varphi = 51^0$; ist ferner der geographische Längenunterschied zwischen M und A = $1^0\,20'$, log a = 6,5148235 und log e = 8,9122052; und bedenkt man, dass die Gleichung (372) den Winkel ψ auch im Gradmass liefert, sobald statt des Bogens λ der ihm entsprechende Winkel von $1^0\,20'$ gesetzt wird, so erhält man nach den vorstehenden Formeln und der Tafel Nr. I:

ϱ = 2 693 095,19 Toisen.
α = 22 828,02 "
ϱ' = 2 670 267,17 "
$\psi = 1^0\,2'\,20''$
x = 23 231,79 "
y = 48 427,67 "

Hätte man die Erde als Kugel vom Halbmesser r = 3 266 608^t (log r = 6,514 0964) angenommen, so würde man nahezu dieselben Werthe gefunden haben: die Unterschiede sind also unbedeutend, und man kann desshalb, so lange es sich nicht um Karten in grossen Massstäben handelt, recht wohl bei der Annahme, dass die Erde eine Kugel sei, verharren.

Die oben aufgestellte Behauptung, dass die Flächen der Netzvierecke den gleichnamigen auf der Kugel proportional seien, lässt sich wie folgt beweisen. Denkt man sich auf der im natürlichen Massstabe gezeichneten Karte (Fig. 240) einen Bogen D E unendlich nahe an A B gezogen, so

kann man, mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung, das Flächenelement A B D E eines Netzvierecks gleich

$$dF = AB \, . \, BD = \varepsilon \, . \, d\alpha$$

setzen. Auf dem Erdellipsoid (Fig. 242) ist (wenn man sich wie vorhin den Bogen D E unendlich nahe an A B gezogen denkt) das Flächenelement des Netzvierecks ebenfalls durch A B D E vorgestellt, und es ist nach bekannten Annahmen der Differentialrechnung, wenn dieses Element mit d F' und der Halbmesser des Parallels A B mit ϱ'' bezeichnet wird:

$$dF' = AB \, . \, DE = \lambda \, \varrho'' \, . \, d\alpha = \varepsilon \, d\alpha;$$

es ist folglich auch für eine Karte im natürlichen Massstabe, wenn d F und d F' zwischen gleichen Grenzen integrirt werden, F = F' und für eine im m^{ten} Theile der natürlichen Grösse gezeichnete Karte $m^2 F = F'$, d. h. die Kartenvierecke sind den gleichnamigen auf dem Erdsphäroid proportional, was zu beweisen war.

§. 212. **Projection von Flamsteed.** Nachdem im vorigen Paragraph bereits von der „modificirten“ Flamsteed'schen Projection die Rede war, ist hier noch Einiges über die ursprüngliche Projection von Flamsteed zu bemerken. Dieselbe besteht darin, dass man auf dem mittleren Meridian die Längen der Meridiangrade abträgt; in den Theilungspunkten Senkrechte errichtet, welche die Parallele vorstellen; auf diesen die entsprechenden Längen der Parallelgrade vom mittleren Meridian aus abmisst und durch die zusammengehörigen Theilpunkte krumme Linien zieht, welche die Meridiane bezeichnen.

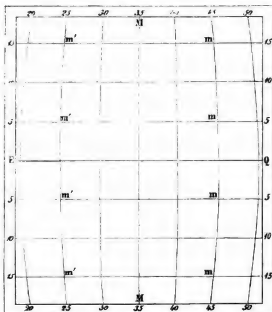
Dieses Kartennetz weicht für Länder, die in der Nähe des Aequators liegen, nur wenig von der Wirklichkeit ab; die Abweichungen wachsen aber rasch mit dem Vorrücken des Landes gegen den Pol; darum wendet man es auch nur für Tropengegenden (z. B. für Karten von Afrika) an, wie auch Fig. 242 zeigt, in welcher M M der mittlere Meridian, E Q der Aequator, m m' ein Parallel und m m, m' m' je ein Meridian ist.

Dass für diese Zonen die Abweichungen nicht bedeutend sein können, geht aus Gl. (369) hervor, welche für $\beta = 0$ den Halbmesser des Aequators auf der Karte $\varrho = \infty$ liefert; also wird der Aequator auch bei der vorigen Projection eine Gerade; für $\beta = 10^0$ erhält man $\varrho = 18\,525\,826{,}00$ und für $\beta = 20^0$ den Halbmesser $\varrho = 8\,974\,918{,}20$ Toisen; die Krümmungen der zu diesen Breiten gehörigen Parallele sind also auch nach der verbesserten Flamsteed'schen Projection nur schwach, folglich können auch bei geraden Parallelen die Fehler nicht gross sein. Genauere Bestimmungen dieser Fehler übergehen wir wegen der seltenen Anwendung der Flamsteed-schen Projection.

§. 213. **Projection von De l'Isle.** Das Verfahren von De l'Isle,[1] ein

[1] Die hier dargestellte conische Projection wurde nicht von De l'Isle, sondern von Mercator (Gerhard Kaufmann) erfunden, und zwar schon in der Mitte des sechzehnten Jahrhunderts. D'Avezac Coup d'oeil historique sur la projection des Cartes. (Bulletin de la Soc. de Géogr. Avril et Mai. 1863,

Fig. 242.

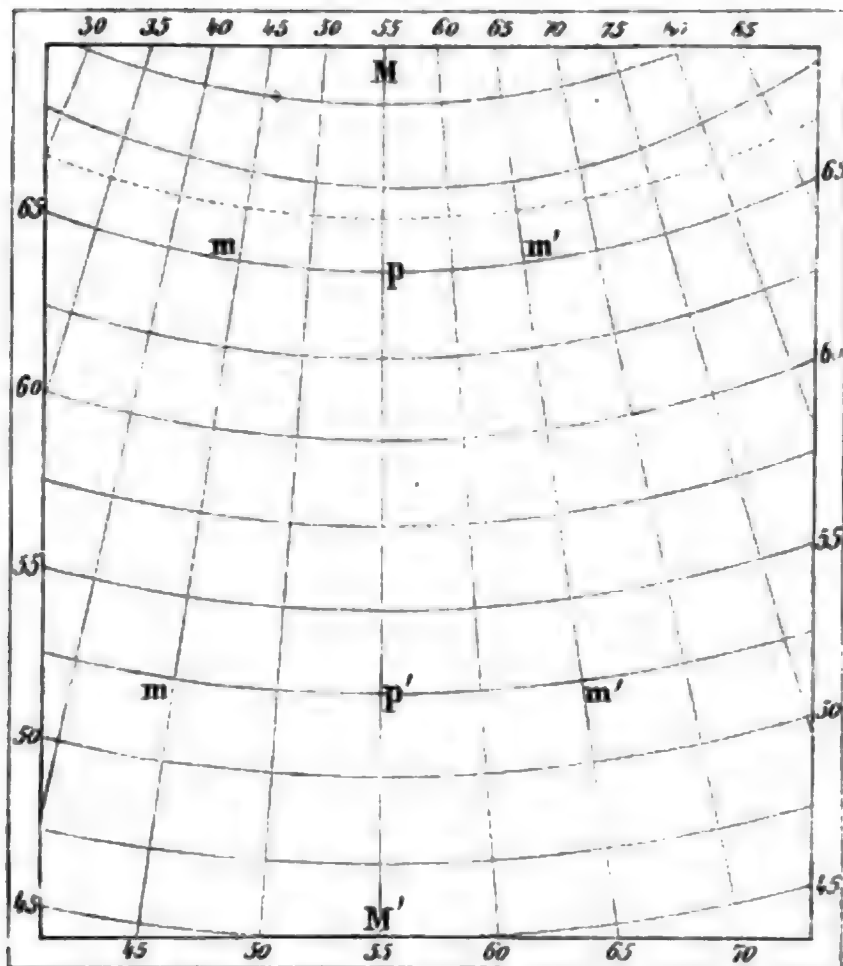


conisches Kartennetz anzufertigen, besteht darin, dass man von dem mittleren Meridian aus die Parallelkreise in derselben Weise wie nach Bonne (§. 211) beschreibt, dann aber auf den zwei Parallelkreisen p, p′ (Fig. 243), welche die äusseren Viertel M p, M′ p′ der Karte von der mittleren Hälfte abtrennen, die wahren Längen der Parallelgrade aufträgt und durch je zwei zusammengehörige Theilpunkte (m m, m′ m′, . . .) gerade Linien zieht, welche die Meridiane vorstellen.

Diese Projection unterscheidet sich von der in Fig. 239 angedeuteten Kegelprojection namentlich darin, dass die Meridiane nicht in dem Mittelpunkte A aller Parallele zusammenlaufen, sondern in verschiedenen Entfernungen sich schneiden, wenn man sie weit genug verlängert. Sie wurde der Herstellung einer Generalkarte von Russland zu Grunde gelegt und bei dieser Gelegenheit von Euler theoretisch untersucht und namentlich desshalb empfohlen, weil in Folge des Umstands, dass die Meridiane gerade Linien sind, sich auch alle übrigen grössten Kreise nahezu als gerade Linien darstellen und folglich bei nicht zu grossen Ausdehnungen der Karte alle Entfernungen mit einem geradlinigen Meilenmassstabe annähernd richtig gemessen werden können.

p. 318) setzt die erste Anwendung dieser conischen Projection in das Jahr 1854. Die nach Mercator benannte Projection ist eine cylindrische und in §. 216 beschrieben.

Fig. 243.



2. Cylindrische Projectionen.

§. 214. Diese Projectionen bestehen darin, dass man sich die Erdkugel von einem Cylinder umhüllt denkt, welcher dieselbe nach dem Aequator berührt und dessen Erzeugende die Meridiane vorstellen, während seine Schnitte durch die Ebenen der Parallelkreise diese Kreise selbst bezeichnen. Wickelt man einen solchen Cylinder ab, so ist klar, dass sich die abgewickelten Meridiane und Parallele rechtwinklig schneiden, und dass die letzteren um so näher an einander liegen, je weiter sie vom Aequator abstehen.

Man sieht sofort ein, dass, wenn man dieses Princip für beliebig grosse und beliebig gelegene Theile der Erdoberfläche streng durchführen wollte, Karten entstünden, welche zu den unrichtigsten von allen gehörten; man begreift aber auch, dass es mit geringer Abänderung zur Darstellung von solchen Ländern, welche am Aequator liegen, recht wohl geeignet ist. Und in der That wird es auch für die heissen Zonen am meisten angewendet.

Eine andere wichtige Anwendung finden die cylindrischen Projectionen bei der Anfertigung von Seekarten. Hierzu eignen sich dieselben desshalb besonders, weil sich diejenige krumme Linie, welche ein Schiff beschreibt, das alle Meridiane der Erde unter einem constanten Winkel schneidet (die Loxodrome), in der Abwickelung der Cylinderfläche, also auf der Karte,

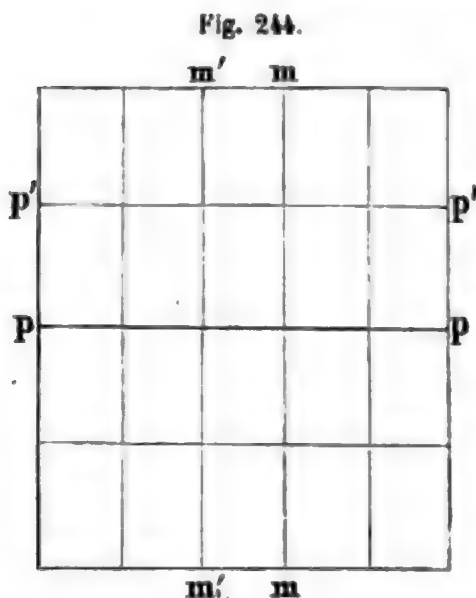
als eine Gerade darstellt. Diese Eigenschaft ist offenbar für die Zeichnung von Schiffscursen auf den Seekarten sehr bequem und daher zu benützen.

Gewöhnlich unterscheidet man nur zwei Arten von cylindrischen Projectionen, welche unter dem Namen „Plattkarten“ und „reducirte Karten“ bekannt sind; wir sehen jedoch die Projection von Cassini als eine besondere Art der cylindrischen Projectionen an und unterscheiden daher drei Arten derselben.

§. 215. **Plattkarten.** Die einfachste Art des Netzes einer Plattkarte besteht aus lauter Quadraten von gleicher Grösse, wovon die in der Richtung von Süd nach Nord liegenden Seiten die Meridiane und die von Ost nach West laufenden die Parallelkreise vorstellen. Dass das auf einem solchen Netze dargestellte Bild eines Theils der Erdoberfläche sehr verzerrt ist, bedarf keines Beweises; sein einziger Vorzug ist, dass man die geographische Länge und Breite eines Punkts sehr leicht eintragen und umgekehrt aus der Karte abnehmen kann.

Ein weniger mangelhaftes Bild liefert dasjenige Netz (Fig. 244), bei welchem die Meridiane und Parallelkreise durch Rechtecke in der Art vorgestellt sind, dass die Entfernungen der Meridiane (m m, m′ m′) nach der Grösse der Grade des mittleren Parallelkreises p p und die der Parallelen (p p, p′ p′) nach der Grösse eines Meridiangrads bestimmt werden. Will man demnach ein Land darstellen, dessen mittlere geographische Breite $= \varphi$ ist, so ist der Halbmesser des zugehörigen Breitenkreises $= r \cos \varphi$, der Umfang dieses Kreises $= 2 r \pi \cos \varphi$ und die Länge eines Grads des Parallels:

Fig. 244.



$$\lambda = \frac{r \pi \cos \varphi}{180} = m\, m'. \qquad (375)$$

Sollen nun die Meridiane von Grad zu Grad aufgetragen werden, und ist 1 : m die Verjüngung der Karte, so beträgt der Abstand der Meridiane auf dem Netze den m^{ten} Theil von λ. Da ferner die Länge eines Meridiangrads

$$\beta = \frac{r \pi}{180} = p\, p' \qquad (376)$$

ist, so beträgt der Abstand der Parallelen von Grad zu Grad den m^{ten} Theil von β, und es verhält sich folglich

$$\beta : \lambda = 1 : \cos \varphi. \qquad (377)$$

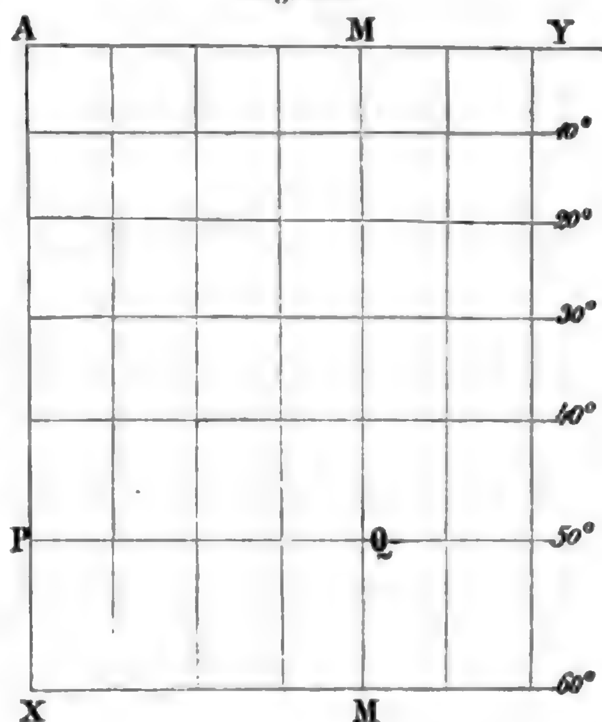
Es versteht sich von selbst, dass die Genauigkeit dieser Karten von der Mitte gegen die südlichen und nördlichen Grenzen sehr abnimmt, und dass man, um die geographische Länge und Breite eines Orts in Gradmass aus-

zudrücken, zwei Massstäbe anwenden muss, welche sich beziehlich wie $\lambda : \beta$ oder wie $\cos \varphi : 1$ verhalten.

§. 216. **Reducirte Karten: Projection von Mercator.** Will man das cylindrische Kartennetz so einrichten, dass durch dasselbe überall das richtige Verhältniss der Längen der Meridiangrade und der Grade der Parallelkreise dargestellt wird, so kann dieses nach Mercator[1] dadurch geschehen, dass man die Meridiane gleichweit, die Parallelkreise aber um so weiter von einander abstehen lässt, je mehr sie sich den Polen nähern. Die Zunahme des Abstands der Parallele ergibt sich aus der nachstehenden Rechnung.

Bezeichnet nämlich β die Länge des Meridianbogens, der zu einem sehr kleinen Winkel α gehört, so hat nach der Gleichung (377) der zu demselben Winkel α gehörige Bogen eines Parallelkreises von der Breite φ die Länge $\lambda = \beta \cos \varphi$; beide Bögen verhalten sich folglich wie $1 : \cos \varphi$ und beispielsweise für $\varphi = 60^0$ wie $2 : 1$. Es müsste also an dieser Stelle der dem Winkel α zukommende Meridianbogen doppelt so gross sein als der zu α gehörige Bogen des Parallelkreises.

Fig. 245.



Nimmt man nun, um die Rechnung allgemeiner zu machen, den abgewickelten Aequator A Y (Fig. 245) als die Ordinaten- und den abgewickelten ersten Meridian A X als die Abscissenaxe an, und bezeichnet die Entfernung A P eines Parallels von der Breite φ mit x, so kann man nach den Principien der Differentialrechnung die der Breitenänderung $d\varphi$ entsprechende Aenderung von x mit dx bezeichnen. Drückt man die Aenderung des Breitenwinkels durch den Bogen vom Halbmesser r aus, so ist dieser unendlich keine Bogen $= r\,d\varphi$, und es verhält sich folglich jetzt $dx : r\,d\varphi$ wie vorhin $\beta : \lambda$, das ist wie $1 : \cos \varphi$. Es ist somit

$$dx = \frac{r\,d\varphi}{\cos \varphi}$$

und, wenn man integrirt und bei der Constantenbestimmung berücksichtigt, dass für $\varphi = 0$ auch $x = 0$ ist,

$$x = r \log n \operatorname{tg} (45^0 + \tfrac{1}{2} \varphi). \qquad (378)$$

[1] Dieser ausgezeichnete Geograph, geb. 1512, gest. 1594, der nach damaliger Sitte seinen deutschen Namen Kaufmannn latinisirte, ist nicht bloss der Erfinder dieser nach ihm benannten Projectionsart, sondern auch der der Projection von Delisle (S. 423), sowie überhaupt des Princips der conischen und cylindrischen Kartennetze. (Vergl. Peschel, Erdkunde, S. 369.)

Führt man statt der natürlichen Logarithmen die gemeinen ein und drückt zugleich die vorstehende Gleichung logarithmisch aus, so wird, wenn man den Erdhalbmesser r = 857,43 geographische Meilen setzt, die in solchen Meilen ausgedrückte Länge x aus der Gleichung gefunden:

$$\log x = 3{,}2954144 + \log [\log \operatorname{tg} (45^0 + {}^1/_2\, \varphi)]. \qquad (379)$$

Soll die Entfernung A M des Meridians M M, welche zu einer in Graden gegebenen Länge ψ gehört, ausgedrückt werden, so dient dazu die Gleichung:

$$y = A\,M = \frac{r\,\pi}{180}\,\psi \qquad (380)$$

oder, wenn man wieder r = 857,43 geographische Meilen setzt und den Logarithmus von y sucht:

$$\log y = 1{,}1750761 + \log \psi. \qquad (381)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 378 bis 381 kann man selbstverständlich jeden durch seine geographische Länge und Breite gegebenen Ort in das reducirte Kartennetz eintragen, und umgekehrt die geographische Länge und Breite eines eingetragenen Punkts berechnen.

§. 217. **Projection von Cassini.** Diese Projectionsmethode besteht darin, dass man den mittleren Meridian des darzustellenden Landes als die Leitlinie des umhüllenden Cylinders ansieht und diesen Cylinder durch Ebenen geschnitten denkt, welche der des mittleren Meridians parallel laufen. Der Cylinder und die Schnittebenen haben folglich gegen die gleichnamigen Flächen, welche den gewöhnlichen Cylinderprojectionen zu Grunde liegen, eine senkrechte Stellung. Wickelt man den hierher gehörigen Cylinder ab, so stellen dessen Elemente die grössten Kreise vor, welche durch sie und den Erdmittelpunkt bestimmt sind, während die Schnitte der dem Hauptmeridian parallel laufenden kleineren Kreise die Meridiane des Netzes bezeichnen.

Theilt man die von Ost nach West laufenden grössten Kreise vom Hauptmeridian aus in gleiche Theile, so ist klar, dass die diesem Meridian parallel laufenden Schnittebenen immer näher zusammenrücken, und dass folglich die Vierecke des Netzes um so unrichtiger werden, je weiter sie vom mittleren Meridian abliegen. Diese Nachtheile treten jedoch nicht stark hervor, wenn man die Cassini'sche Cylinderprojection auf ein Land anwendet, das sich in der Richtung von Ost nach West nicht weit ausdehnt. Cassini legte seiner Karte von Frankreich die nach ihm benannte Projection wohl desshalb zu Grunde, weil dieses Land sich etwas mehr von Süden nach Norden, als von Westen nach Osten erstreckt. Ein Vortheil, den die in Rede stehende Projection gewährt, besteht darin, dass sich die nach §. 108 berechneten Coordinaten der Eckpunkte eines grossen Dreiecknetzes sehr leicht eintragen lassen, sowie man umgekehrt mit Hilfe der dortselbst entwickelten Formeln die Coordinaten eingetragener Punkte leicht berechnen kann.

C. Geographische und topographische Karten.

§. 218. Man theilt die Landkarten gewöhnlich in geographische (erdbeschreibende) und in topographische (ortbeschreibende) ein, und versteht unter den ersteren Karten in sehr kleinem Massstabe (von 1 : 200000 bis 1 : 2000000 herab), welche ganze Länder, Welttheile und selbst Hälften der Erdoberfläche bildlich darstellen; unter den letzteren aber Karten in grösserem Massstabe (von 1 : 10000 bis 1 : 200000), welche die Einzelnheiten der dargestellten Orte und Gegenden mehr berücksichtigen, als dieses bei den Landkarten im gewöhnlichen Sinne gebräuchlich und möglich ist.

Der Unterschied zwischen geographischen und topographischen Karten entspringt somit lediglich aus dem Massstabe derselben. Eben desshalb liegt auch der Unterschied zwischen geographischen und topographischen Schrift- und Kartenzeichen bloss in der Grösse und nicht in der Form dieser Zeichen. Es wird daher genügen, wenn wir hier vorzugsweise die Zeichen für grössere Karten berücksichtigen, da dieselben mannichfaltiger sind als die der kleinen, welche nur wenig Detail enthalten, und da jene Zeichen leicht verkleinert werden können.

Auf einer Karte sind, wie schon bemerkt, nicht bloss räumliche, sondern auch politische und historische Verhältnisse darzustellen. Zu jenen gehören: die Wohnorte der Menschen, stehendes und fliessendes Wasser, und der Boden mit seinen natürlichen und künstlichen Bildungen; zu diesen: die Grenzen der Länder und ihrer Bestandtheile, die Fundorte wichtiger Mineralien, die Stätten grosser geschichtlicher Ereignisse, die Grösse der Bevölkerung u. s. w.

1. Kartenzeichen.

§. 219. **Bezeichnung der Berge.** Von der geometrischen Gestalt einer Gegend bekommt man dann erst einen richtigen Begriff, wenn man ausser ihrer horizontalen Projection auch die Erhöhungen und Vertiefungen oder die Unebenheiten derselben kennt. Zur graphischen Darstellung derselben auf Karten bedient man sich nach der Angabe des sächsischen Majors Lehmann der Schraffirung der geneigten Flächen mittels Strichen, deren Dicke zu der Grösse der Neigung in einem bestimmten Verhältniss steht. Die Lehre von der Bezeichnung geneigter Terrainflächen durch solche Striche (die Lehmann'sche Theorie der Bergzeichnung) ist namentlich für topographische Karten, die zu militärischen Zwecken benützt werden, sehr wichtig, und wir beginnen desshalb dieses Capitel mit einer kurzen Darstellung derselben.

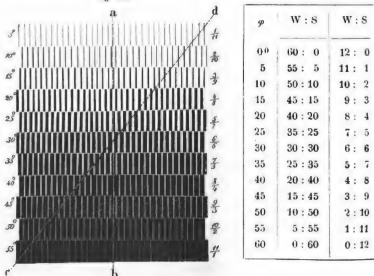
Die Lehmann'sche Bergzeichnungstheorie beruht zum Theil auf dem Satze, dass die Helligkeit einer Fläche, welche von verticalen Strahlen erleuchtet wird, unter übrigens gleichen Umständen dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen den Horizont proportional ist. Die horizontale Fläche

erscheint hiernach am hellsten, die verticale am dunkelsten. Wollte man nun jene ganz weiss, diese ganz schwarz und die dazwischen liegenden Abstufungen durch schwarze Striche mit weissen Zwischenräumen bezeichnen, so liesse sich leicht für jeden Neigungswinkel φ der beleuchteten Fläche angeben, wie breit die weissen Zwischenräume im Verhältniss zur Breite der schwarzen Striche sein müssten. Für $\varphi = 60^0$ würden z. B. die Striche eben so breit sein als die Zwischenräume, da $\cos \varphi = \cos 60^0 = 0{,}5$ ist.

Die strenge Durchführung dieses Princips hat indessen zur Folge, dass die Abstufungen der Neigungen nicht so scharf in's Auge fallen, als es wünschenswerth ist. Daher, und weil die Erfahrung lehrt, dass in der Natur Erdböschungen von mehr als 45° Neigung nur selten vorkommen, bezeichnete Lehmann schon eine unter 45° gegen den Horizont geneigte Fläche ganz schwarz, während er für die übrigen das Verhältniss der weissen und schwarzen Streifen nach der Annahme bestimmte, dass sich die Breite der schwarzen Striche zur Breite der weissen Zwischenräume verhalten sollte wie der Neigungswinkel der Fläche gegen den Horizont zur Ergänzung dieses Winkels auf 45 Grade.

Diesen Vorschlag hat man fast auf allen topographischen Bureaux angenommen, nur mit dem Unterschiede, dass man den Grenzwinkel φ bald

Fig. 246.



φ	W : S	W : S
0°	60 : 0	12 : 0
5	55 : 5	11 : 1
10	50 : 10	10 : 2
15	45 : 15	9 : 3
20	40 : 20	8 : 4
25	35 : 25	7 : 5
30	30 : 30	6 : 6
35	25 : 35	5 : 7
40	20 : 40	4 : 8
45	15 : 45	3 : 9
50	10 : 50	2 : 10
55	5 : 55	1 : 11
60	0 : 60	0 : 12

auf 45, bald auf 50, bald auf 60° setzte. In Bayern z. B. bezeichnet man erst die unter 60° geneigten Flächen ganz schwarz, und es ergibt sich nach dieser Annahme die Proportion

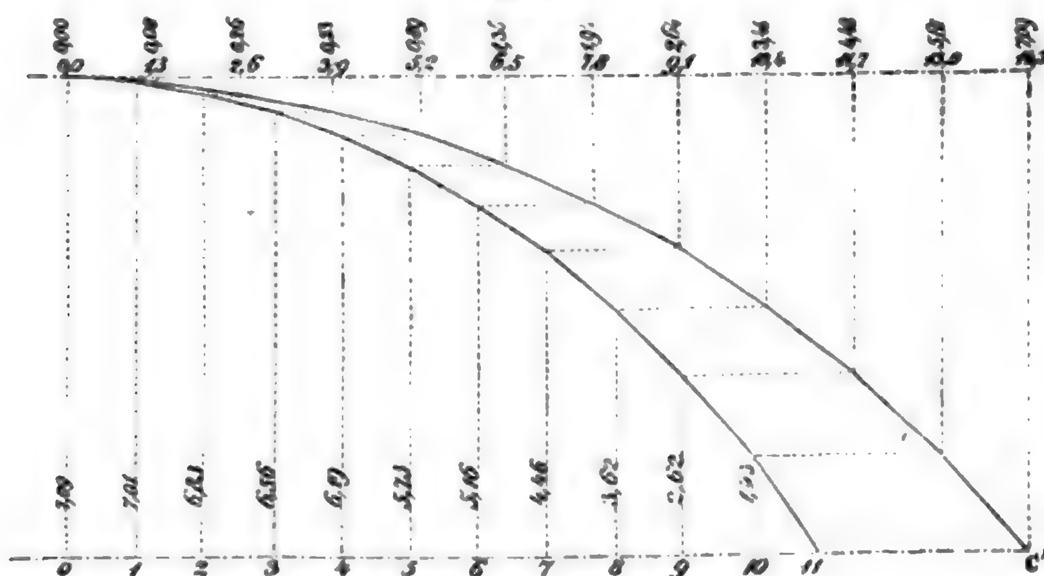
$$S : W = \varphi : 60^0 - \varphi$$

wenn S die Breite der schwarzen Striche und W die der weissen Zwischenräume bezeichnet. Aus dieser Proportion geht die vorstehende Tabelle hervor, welche zugleich durch die beigedruckte Fig. 246 so erläutert ist, dass jede weitere Bemerkung hierüber unnöthig erscheint.

Wenn eine topographische Karte genau nach diesem Schema gezeichnet ist, so kann man daraus die relative Höhenlage einzelner Punkte und beliebige Terrainprofile um so richtiger construiren, je genauer man das Verhältniss des Weissen zum Schwarzen zu schätzen im Stande ist.

Gesetzt, es handele sich um das Terrainprofil a b der Fig. 246, so hat man für die Länge der obersten Schichte das Verhältniss von W : S = 11 : 1, folglich eine Neigung von 5°; für die zweite Schichte das Verhältniss von W : S = 10 : 2, folglich eine Neigung von 10°; für die dritte Schichte W : S = 9 : 3, mithin eine Neigung von 15° u. s. w. Trägt man nun diese Neigungswinkel in der Länge der Schichten nach der Richtung a b an einander an, so entsteht die stärker geneigte untere Linie der Fig. 247, welche somit

Fig. 247.



das gesuchte Profil a b vorstellt. In gleicher Weise findet man das Profil d c. Hier treten andere Neigungswinkel wie bei a b auf, da die horizontalen Erstreckungen der Schichten grösser sind, wesshalb auch das Profil sanfter wird, wie die obere gebrochene Linie 0 c' der Figur zeigt.

Die Darstellung eines Berges durch Schraffirung setzt dessen Horizontalcurven als bekannt voraus. Sind diese nach §. 146 bis 150 aufgenommen und auf dem Plane in Blei gezeichnet, so zieht man zwischen denselben in der Richtung des kleinsten Abstands und in der erforderlichen Breite die schwarzen Striche, welche übrigens nicht mathematisch gerade zu sein brauchen, sondern etwas geschlängelt sein dürfen. Erlaubt es die Fertigkeit der Hand nicht, die Striche sofort von einer Curve zur anderen auszuführen, so legt man Zwischencurven an und zieht zunächst die Striche bis an diese, worauf dann wie vorhin weiter fortgefahren und zuletzt jede als Hilfsmittel benützte Horizontalcurve ausgewischt wird. Berge gut zu

schraffiren, setzt viele Uebung voraus; unsere Absicht ist es aber nicht, das Zeichnen selbst, sondern das Verstehen der Kartenzeichnungen zu lehren. Darum wird es genügen, zwei Figuren (248 und 249) mitzutheilen, wovon eine die in Arbeit begriffene Karte ohne Schraffur mit punktirten Horizontalcurven, die andere aber die fertige Karte mit Schraffur und ohne Hori-

Fig. 248.

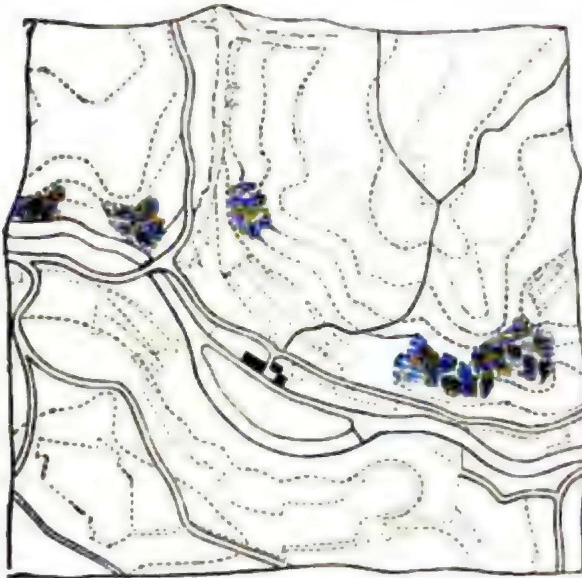
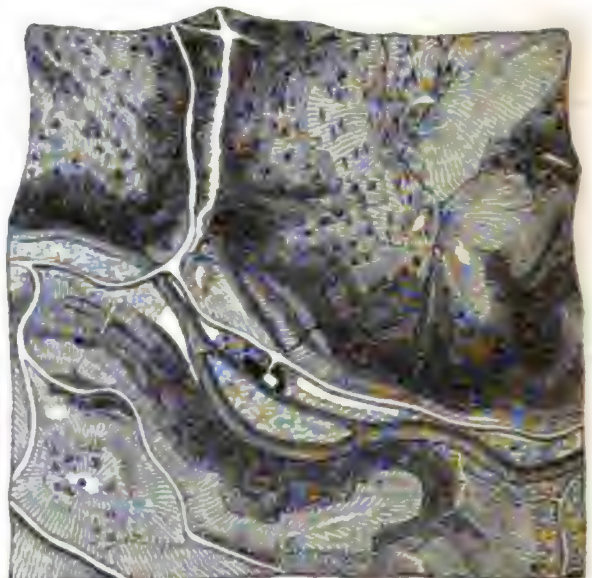


Fig. 249.



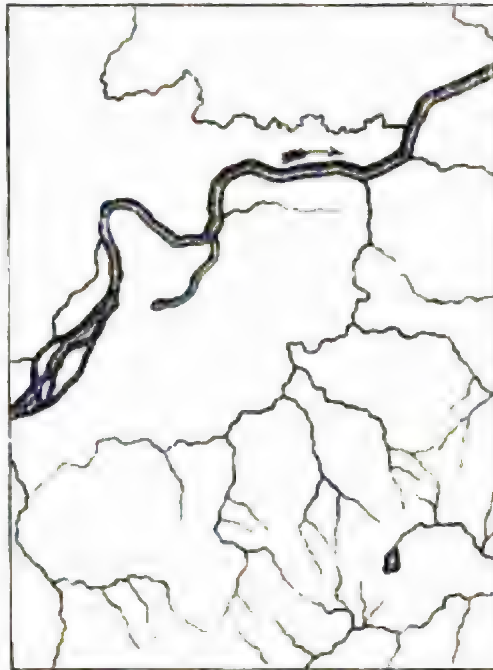
zontalcurven enthält. Bei einiger Mühe wird man sich leicht eine richtige Vorstellung von der geometrischen Gestaltung der vorliegenden Gegend machen können.

§. 220. **Bezeichnung der Gewässer.** Beträgt der Massstab einer topographischen Karte 1 : 10000, so werden Bäche unter 10 Fuss Breite, bei 1 : 25000 Bäche unter 20 Fuss Breite, bei 1 : 100000 Flüsse unter 40 Fuss Breite, bei 1 : 200000 Flüsse unter 160 Fuss Breite als einfache Linien gezeichnet. Breitere Bäche oder Flüsse stellt man durch doppelte Uferlinien mit der bekannten Wasserschraffirung dar. Diese wird um so feiner, je kleiner der Massstab ist; die Ufer auf der Schattenseite werden mit etwas stärkeren Linien ausgezogen, als die auf der Lichtseite. Der Lauf des Wassers wird durch einen kleinen Pfeil angedeutet, der nach Massgabe des Raums entweder in oder neben der Wasserfläche liegt. Wird der Massstab der Karte kleiner als 1 : 100000, so werden kleine Bäche, Gräben und Teiche ganz weggelassen; dagegen sind die einfachen Linien, welche Flüsse darstellen, im Verhältniss ihrer Länge und der Zuflüsse, welche sie erhalten, zu verstärken. Werden die topographischen Karten farbig gezeichnet, so ist das Wasser blau anzulegen und so zu laviren, dass es gegen die Ufer dunkler erscheint. Diese aber werden, wenn es natürliche sind, schwarz, und wenn sie aus Mauerwerk bestehen, roth ausgezogen. Fig. 250 zeigt die Darstellung der Gewässer in schwarzer Manier und im Massstabe von 1 : 100000.

Es ist hier der Ort, auf die Veränderungen aufmerksam zu machen, denen die Ufer der Flüsse in Folge der Einwirkung des Wassers unterworfen

sind. Diese Veränderungen treten auf einer Karte um so mehr hervor, je grösser deren Massstab ist und je mehr Zeit zwischen der Aufnahme und dem Gebrauche liegt. In diesen Fällen, und wenn es sich darum handelt, den Wasserlauf ziemlich genau zu kennen, ist es durchaus nöthig, die Lage der Ufer einer geometrischen Revision zu unterwerfen.

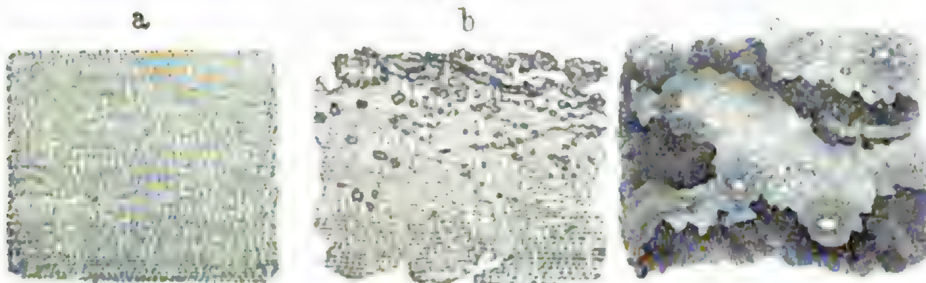
Fig. 250.



§. 221. **Bezeichnung des Bodens.** Der Boden kann fest oder weich, kahl oder bewachsen sein und diese verschiedenen Beschaffenheiten desselben sind in der Karte entsprechend anzudeuten.

Beim kahlen Boden wird unterschieden, ob er an der Oberfläche aus Sand, Kies, Gerölle, Felsen oder beständig aus Eis besteht. Sand und Kies werden durch feinere und stärkere Punkte, Gerölle und Felsen durch eckige Figuren, Gletscher durch entsprechende Schraffirungen bezeichnet, wie aus der Fig. 251 zu entnehmen ist, in welcher

Fig. 251.



a Sand und Kies, b Gerölle und Felsen, c Hochgebirg mit einem Gletscher vorstellt. In farbigen Karten wird der kahle Boden blassroth, das beständige Eis blassblau angelegt; Sand und Kies werden auch hier schwarz punktirt, Gletscher schraffirt.

Der bewachsene Boden besteht entweder aus Wäldern, Feldern, Haiden, Wiesen oder Gärten. Die Wälder werden nach Fig. 252 Abthei-

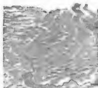
Fig. 252.

lung a, die Haiden nach b, die Wiesen nach c, Wein- und Hopfengärten nach d, Felder aber gar nicht bezeichnet, d. h. weiss gelassen. Auf Plänen kann man Laub- und Nadelholz unterscheiden, auf Karten aber nicht. In

Farben werden Wälder grau, Wiesen hellgrün, Haiden hellgelb, Weingärten rosenroth, Hopfengärten hellbraun bezeichnet.

Der weiche Boden ist entweder ein Moor oder ein Sumpf. Diese Unterabtheilungen unterscheidet man nach Fig. 253 durch Punkte, welche das Gesträuch der Moore und durch horizontale Linien, welche das Wasser der Sümpfe andeuten. Auf farbigen Karten stellt man die Moore und Sümpfe wie Wiesen dar, und unterscheidet die ersteren durch braune, die letzteren durch blaue horizontale Streifen.

Fig. 253.



§. 222. **Bezeichnung von Wohnorten, Gebäuden etc.** Die auf topographischen Karten zu bezeichnenden Wohnorte sind: Städte, Marktflecken, Dörfer, Weiler, Schlösser, Einöden, Alpen; nicht bewohnte Gebäude: Kirchen, Kapellen, Ruinen etc. Ist der Kartenmassstab gross (1 : 10000 bis 1 : 50000), so deutet man die Hauptumrisse der Gebäude noch an, beträgt der Massstab aber weniger als 1 : 100000, so treten nur bestimmte Zeichen an die Stelle der Umrisse, wie aus Fig. 254

Fig. 254.

zu entnehmen ist, von welchen a, b, c grosse, mittlere und kleine Städte, d, e, f Marktflecken und Dörfer, g einen Ort mit Schloss, h einen Weiler und i ein einzelnes Schloss, k eine Ruine, l einen befestigten Ort und m eine Einöde vorstellt.

In farbigen Karten sind die Gebäude mit rothem Carmin anzulegen, in schwarzen zu schraffiren.

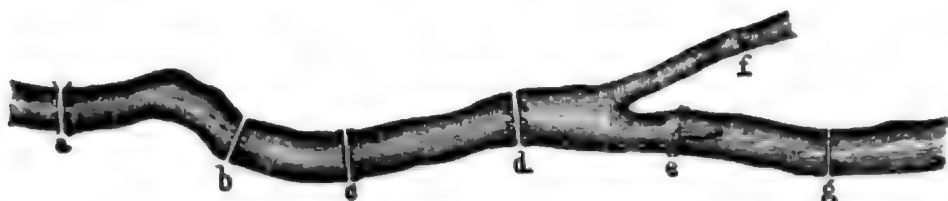
§. 223. **Bezeichnung von Wegen und Grenzen.** Zu den Wegen gehören die Land- und Wasserstrassen jeglicher Art mit ihren feststehenden oder beweglichen Brücken; zu den auf topographischen Karten noch darzustellenden Grenzen lediglich die Landes-, Kreis-, Bezirks- und Gemeindegrenzen.

Fig. 255.

Hauptstrassen werden durch zwei Parallellinien, wovon die im Schatten liegende etwas stärker zu halten ist (Fig. 255, b), Nebenstrassen durch eine ausgezogene und eine punktirte Linie (c), Gemeindewege durch eine einfache Linie (d), Saumwege und Fusspfade durch gestrichelte und punktirte

Linien (e) bezeichnet. Bei Eisenbahnen unterscheidet man, ob sie schon im Betrieb stehen oder im Bau begriffen sind: die ersteren werden nach Art der Hauptstrassen durch ausgezogene und querabgetheilte Parallellinien (a), die letzteren wie diese, aber durch punktirte Linien vorgestellt. Schifffahrtscanäle werden wie Flüsse von gleicher Breite gezeichnet (k), und für Landes-, Kreis-, Bezirks- und Gemeindegrenzen gelten beziehungsweise stark abgesetzte Striche und gestrichelt-punktirte Linien (f, g, h, i). Für die Bezeichnung der Wege über Flüsse gebraucht man die Formen der Fig. 256, in

Fig. 256.



welcher a eine steinerne, b eine hölzerne, c eine eiserne Brücke, d eine Schiffbrücke, e eine fliegende Brücke, f einen Steg, g eine Furth bezeichnet. Wasserbauten von Bedeutung werden auf Karten selten angedeutet; wo man sie jedoch sichtbar machen will, wählt man ähnliche, jedoch kleinere Zeichen wie für die Pläne. (S. Fig. 282.)

2. Kartenschrift.

§. 224. **Gegenstände der Benennung.** Eine jede Karte bedarf zunächst eines Titels, welcher ihre Hauptbestimmung und ihren Umfang bezeichnet: z. B. „hydrographische Karte von Bayern," d. i. eine Karte, welche lediglich die Quellen, Bäche, Flüsse, Ströme und See'n Bayerns darstellt. Dem Titel sind ferner Notizen beizufügen, welche den Massstab, die topographischen Zeichen, die Zeit der Verfertigung und den Verfasser der Karte betreffen.

Die wichtigsten Bezeichnungen einer Karte sind ohne Zweifel die Ortsnamen; diese dürfen nirgends fehlen, und es müssen ihnen daher, wenn der Raum für minder wichtige Bezeichnungen zu klein wird, diese letzteren weichen. Jedes Gebäude, das in der Karte ein besonderes Zeichen hat, erhält seinen Namen.

Nächst den Orten erscheinen die Gewässer als wichtige geographische Objecte, deren Benennung in einer Karte ebenfalls nicht fehlen darf, und die sich bei langen Flüssen mehrmals wiederholen muss, um das Ablesen der Karte zu erleichtern.

Ausserdem ist das Terrain in einer der Beziehungen zu benennen, welche durch die Zeichnung nicht ausgedrückt werden können; z. B. das Donaumoos, das Wendelsteingebirge, der Schwarzwald u. s. w. Ferner sind, wo es nothwendig erscheint oder der Raum erlaubt, die Namen wichtiger Verkehrsanstalten anzuführen; z. B. der Hauptstrassen zwischen grossen

Städten, die auf der Karte selbst nicht liegen; der Eisenbahnen, welche besondere Namen haben; der Dampfschiffwege auf dem Meere u. dgl. Endlich ist es unerlässlich, das Kartennetz, d. i. die Meridiane und Parallele nach ihrer Länge und Breite richtig zu bezeichnen, so dass man aus der leicht zu erkennenden Projectionsart des Netzes sofort die geographische Lage jedes Orts bestimmen kann.

§. 225. **Schriftzeichen.** Bei der Wahl der Schriftzeichen kommt sowohl deren Form als Grösse in Betracht, um auch hierdurch Wichtigeres von Unwichtigerem zu trennen, mit einem Worte die Uebersicht zu erleichtern.

Was die Form der Schrift betrifft, so sind folgende Schriftgattungen im Gebrauche:

1. Die grosse römische stehende und liegende Schrift, auch stehende und liegende Capitalschrift genannt, für Titel, Namen der Landesbezirke und Benennungen geographisch wichtiger Gegenstände.

2. Die kleine römische stehende und liegende Schrift, auch stehende und liegende Rotond genannt, für die geographischen und topographischen Einzelnheiten der Karte, und zwar für die grösseren Objecte.

3. Die topographische Cursivschrift für die kleineren und kleinsten Objecte einer Karte.

4. Die stehenden und liegenden römischen und arabischen Ziffern zur Bezeichnung von Netzabtheilungen, Einwohnerzahlen, Berghöhen u. dgl. Gewöhnlich finden jedoch nur die arabischen Ziffern Anwendung.

Hinsichtlich der Grösse der Schrift ist zu bemerken, dass dieselbe zu dem Kartenmassstabe und den Kartenzeichen in einem passenden Verhältniss stehen soll: wichtigere Gegenstände werden durch grössere, minder wichtige durch kleinere Schrift bezeichnet, die grösste Schrift wird auf die Bezeichnung des Hauptzwecks der Karte und deren grösste Abtheilungen verwendet; bei Ortschaften richtet sich die Grösse der Schrift nach ihrer Classe oder Einwohnerzahl; bei Flüssen nach deren Länge und Bedeutung; bei See'n und Landobjecten nach deren Flächenraum. Die im Anhange unter Nr. XXII mitgetheilte und aus Pfeiffer's Anleitung zum Plan- und Kartenzeichnen entnommene Tabelle über die Gattungen und Grössen der Plan- und Kartenschriften gibt hierüber weitere Aufschlüsse. Es ist jedoch zu bemerken, dass die angegebenen Formen und Masse nicht in aller Strenge eingehalten zu werden brauchen.

§. 226. **Stellung der Schrift.** Durch entsprechende Stellung der Schrift kann nicht nur mancher Zweifel über den bezeichneten Gegenstand gehoben, sondern auch die Uebersicht und das Ablesen der Karten sehr erleichtert werden: dieselbe ist also nicht so unwichtig, als es auf den ersten Augenblick scheinen mag.

Von der allgemeinen Regel, die Schriftzeilen dem oberen oder unteren Kartenrande parallel zu ziehen, werden nur wenige Ausnahmen gemacht. Zu diesen gehören die Bezeichnungen der Flüsse, welche nach deren Längenausdehnung entweder in die Wasserfläche selbst oder an deren Ufer

zu stellen sind. Ferner gehören hierher die Hauptstrassen. Endlich grosse Terrainflächen, die sich längs eines Flusses oder Gebirgs hinziehen, und deren Bezeichnung in mässiger Krümmung ungefähr der Mitte der Flächenfigur folgt.

Für Ortsbenennungen gilt als Regel, die Namen dicht oberhalb des Ortszeichens zu setzen. Bei beschränktem Raume darf man sich jedoch erlauben, die Benennung neben das Zeichen zu setzen, aber nie soll sie unter demselben stehen.

Kommt es vor, dass die Bezeichnung eines Terrainbezirks wegen dessen grosser Fläche gedehnt werden muss, so sieht man die doppelte Buchstabenhöhe als Grenze des Abstands der einzelnen Buchstaben an. Reicht eine solche Dehnung nicht aus, so unterlässt man dieselbe und bezeichnet dafür den fraglichen Bezirk zweimal, um jeden Zweifel über dessen Namen zu beseitigen.

Zweiter Abschnitt.

Planzeichnung.

§. 227. Zur Kartenzeichnung sind Netze erforderlich, welche die Meridiane und Parallelkreise des abzubildenden Theils der Erdoberfläche darstellen, und in welche die einzelnen Objecte nach ihrer geographischen Lage mit mehr oder weniger Genauigkeit eingetragen werden. Die Zeichnung von Horizontalplänen gründet sich auch auf Netze, aber diese bestehen meist aus den Polygonen oder Dreiecksverbindungen, welche behufs der Aufnahme der Pläne auf dem Felde ausgesteckt und gemessen wurden. An diese Netze schliesst sich die Zeichnung des Details um so besser an, je sorgfältiger jene gemessen und aufgetragen sind; es muss also hierauf alle Sorgfalt verwendet werden. Das Auftragen eines gut gemessenen Polygons oder Dreiecksnetzes in einem bestimmten Massstabe kann aber für Denjenigen, der das geometrische Zeichnen versteht, durchaus keine Schwierigkeit haben, da es sich bloss darum handelt, ähnliche Figuren zu zeichnen; wir werden desshalb hiervon eben so wenig, als von der ebenfalls bekannten Construction verjüngter Massstäbe handeln. Ueber die Zeichnung der Verticalpläne oder der Nivellemente von Linien und Flächen, von welcher in diesem Abschnitte zu handeln ist, geben theilweise schon die Betrachtungen über das Nivelliren Aufschluss; es braucht also hier nur das Fehlende nachgeholt zu werden. Und was die Grubenpläne betrifft, die sich aus Horizontal- und Verticalprojectionen zusammensetzen, so werden auch über diese nur kurze Bemerkungen genügen, da sie entweder nach

den vorausgesetzten Plänen oder nach den Regeln der darstellenden Geometrie behandelt werden, deren Handhabung wir dem Leser eben so wie die Fertigkeit im Zeichnen zumuthen.

(Wenn in den nachfolgenden Darstellungen stellenweise noch vom Fussmasse die Rede ist, obwohl zur Zeit das Metermass fast allgemein gilt, so wolle man dieses mit dem Umstande entschuldigen, dass die ausschliessliche Anwendung des letzteren Masses die Umarbeitung sehr vieler Holzschnitte zur Folge gehabt hätte, und dass das Wesen der Sache, um die es sich hier handelt, nicht darunter leidet, ob es an der Hand des Fussoder des Metermasses erklärt wird.)

A. Horizontal- oder Situationspläne.

1. Bezeichnung der darzustellenden Gegenstände.

§. 228. Die geometrische Aufnahme erstreckt sich nur auf die Horizontalprojection der natürlichen oder künstlichen Grenzen von Eigenthum, der Bodencultur und Verkehrsanstalten; die Verticalprojection des Terrains wird nur in bestimmten Fällen aufgenommen und auf Horizontalplänen in Form von Schichtenlinien, worüber bereits in den §§. 143 bis 150 gehandelt wurde, dargestellt. Die in dem §. 219 beschriebene Bergzeichnung wendet man in der Regel auf Karten, selten auf Plänen an, da sie erstens nicht so genau wie Schichtenlinien die Höhenverhältnisse des Bodens darstellt, zweitens mühsam auszuführen ist, und drittens bei stark geneigtem Terrain die Pläne so schwarz macht, dass Bau- und Culturprojecte in dieselben nicht mehr deutlich eingezeichnet werden können. Es bleibt uns also hier nur übrig, die Bezeichnungen für die erst genannten Objecte vorzuführen und zu erläutern. Die mitzutheilenden Figuren passen leider bloss für schwarze und nicht für farbige Pläne; wer aber jemals eine Anleitung zum Zeichnen farbiger Pläne angesehen hat, wird durch die nachfolgenden Bemerkungen über die Colorirung der Horizontalpläne an die conventionelle Darstellung eines beliebigen Objects in Farbe wieder erinnert werden.

§. 229. **Bezeichnung natürlicher Gebilde.** Die auf Plänen darzustellenden natürlichen Gebilde umfassen alles Land und Wasser der Erdoberfläche; der Boden kann dabei kahl oder bewachsen, weich oder fest, nass oder trocken sein.

Der kahle Boden stellt sich als Sand-, Kies-, Geröll-, Lehm- oder Felsboden, oder als ewiges Eis dar. Die Bezeichnungen für diese verschiedenen Arten des kahlen Bodens stimmen mit denen des §. 221 im Allgemeinen überein, nur sind sie hier, weil grösser, bestimmter.

Wir fügen desshalb den früher gegebenen Bezeichnungen noch folgende bei: in Fig. 257 die Zeichen von Lehm- und Sandgruben, in Fig. 258 die von Steinbrüchen, in Fig. 259 die von Felsen im Hochgebirge, in Fig. 260 die von Kohlenflötzen, und bemerken hierzu, dass in farbigen Plänen die

Fig. 257.

Fig. 258.

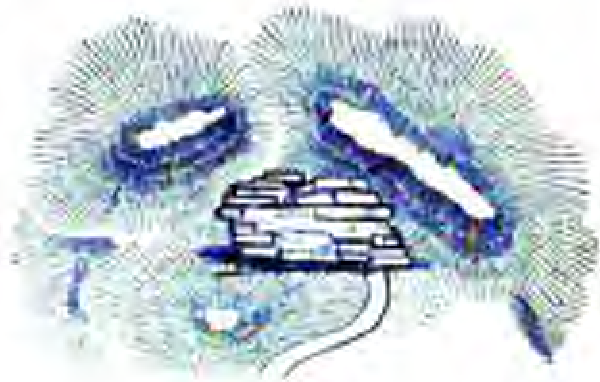
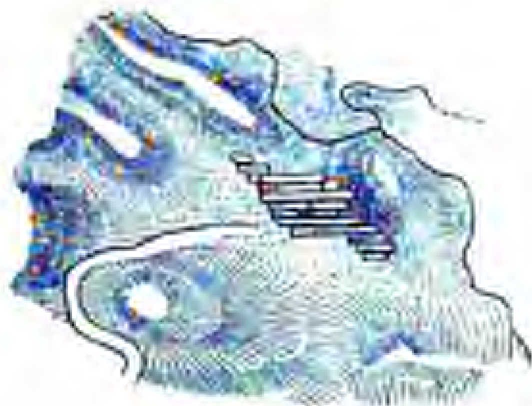


Fig. 259.

Fig. 260.



Sandgruben einen röthlichen Ton mit eingezeichneten schwarzen Punkten und Strichen (wie in Fig. 257) erhalten; die Lehmgruben aber mit Terra di Siena in zwei oder drei verschiedenen Tönen angelegt und mit Sepia gestrichelt werden; ferner dass Steinbrüche mit hellbrauner und Kohlenflötze mit dunkelbrauner Farbe (Sepia) angelegt und wie in den Fig. 258 und 260 schwarz bezeichnet werden.

Der bewachsene Boden umfasst die von Wäldern, Gesträuchen, Feldern, Gärten, Wiesen, Haiden, Mooren und Sümpfen eingenommenen Flächen. Bei der Darstellung von Wäldern und Gebüschen ist das Laub- und Nadelholz zu unterscheiden. In schwarzen Plänen geschieht es nach den Fig. 261 und 262, in farbigen aber durch Anwendung eines lichtgrauen Tons für Nadelholz und eines blaugrauen für Laubholz. Grosse Waldflächen werden in schwarzen Plänen gewöhnlich nicht vollständig, sondern nur theilweise mit den betreffenden Characteren bezeichnet; dagegen setzt man zweckmässig die Buchstaben P. W. (Privatwaldung), ST. W. (Staatswaldung), C. W. (Communalwaldung) bei, um sogleich auch die Kategorie der Besitzer zu bezeichnen. (Fig. 263.)

Die Felder bleiben sowohl in schwarzen als farbigen Plänen in der Regel weiss, wie das Papier; sind sie aber mit Bäumen besetzt, so deutet man dieses auf die aus Fig. 264 ersichtliche Weise an.

Bei Gärten ist zu unterscheiden, für welche Gewächse sie vorzugsweise bestimmt sind: Baumgärten werden in schwarzen Plänen nach Fig. 265 bezeichnet; in farbigen Plänen erhält der Boden die für ihn bestimmte Farbe. Zier- oder Blumengärten deutet man in schwarzen Plänen nach Fig. 266, Gemüsegärten nach Fig. 267 an. In farbigen Plänen werden Zier- und

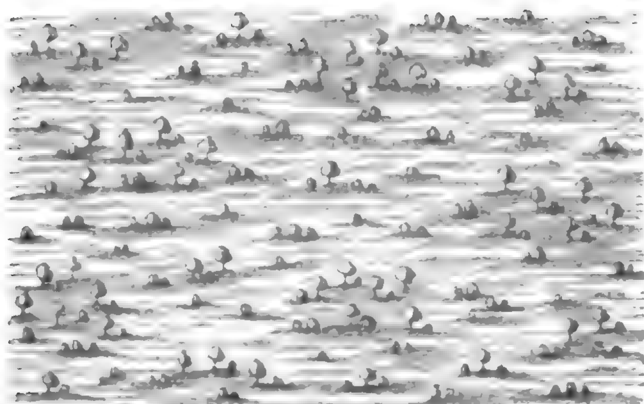


Fig. 261.

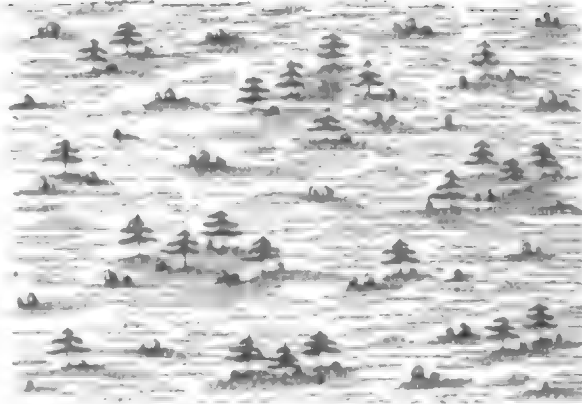
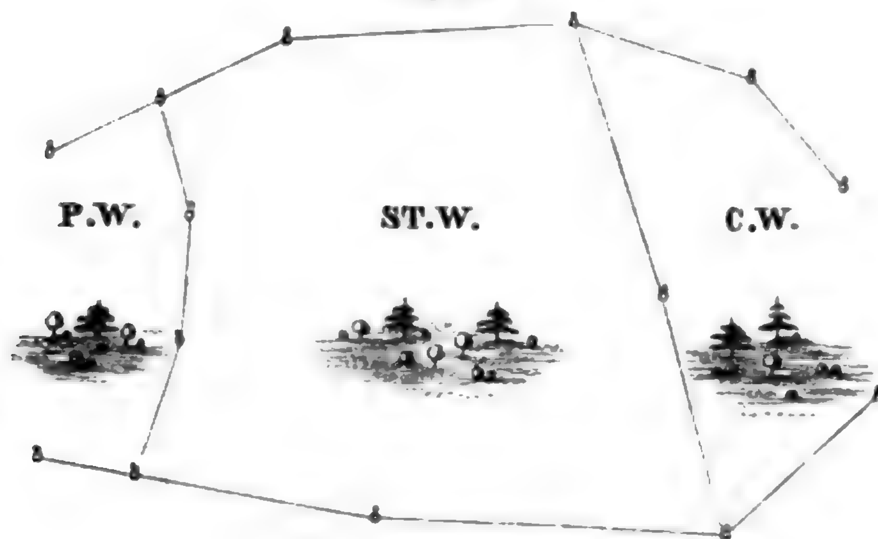


Fig. 262.

Gemüsegärten durch grün punktirte parallele Linien bezeichnet. Weinberge und Hopfengärten erhalten in schwarzen Plänen die aus Fig. 268 ersichtlichen Zeichen; in farbigen werden die ersteren blassroth mit Carmin, die letzteren rothbraun mit Terra di Siena angelegt. Englische Anlagen werden in schwarzen Plänen nach Fig. 269, in farbigen wie eine Zusammensetzung von Wiesen, Gebüsch, Wald und Wegen behandelt.

Für Wiesen gilt die in Fig. 270 dargestellte Bezeichnung; in farbigen Plänen werden sie hellgrün angelegt, wobei die Mischung der Farbe aus Grünspanauflösung und Gummigutt besteht. Oedungen und Haiden deutet

Fig. 263.



man in schwarzen Plänen bald nach Fig. 271, bald nach Fig. 272, in farbigen Plänen aber blassgelb (mit Gummigutt) an.

Moore werden, wenn sie kein Krummholz tragen, nach Fig. 273, wenn sie aber damit bewachsen sind, in welchem Falle sie Filze heissen, nach Fig. 274 dargestellt. In farbigen Plänen werden die Moore wie nasse Wiesen behandelt, erhalten aber lichtbraune und blaue Streifen und in die Filze wird noch überdiess Gebüsch eingezeichnet. Da sich die Sümpfe von den Mooren nur dadurch unterscheiden, dass sie mehr Wasser enthalten als diese, so werden sie auch in schwarzen und farbigen Plänen als wasserreiche Moore behandelt, d. h. man bringt in der Zeichnung (Fig. 275)

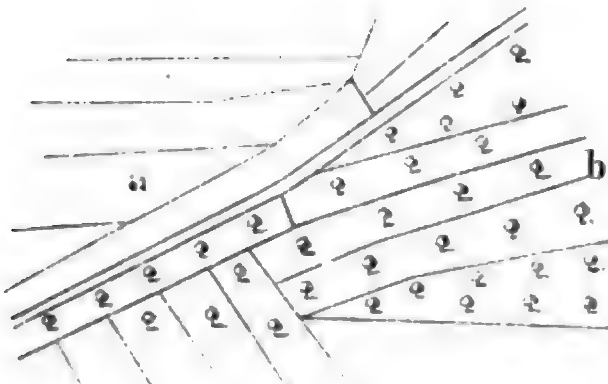


Fig. 264.

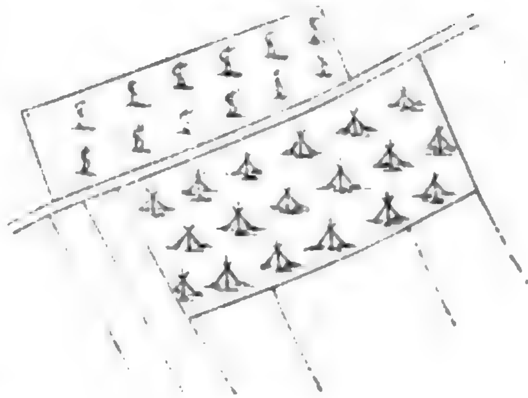


Fig. 268.

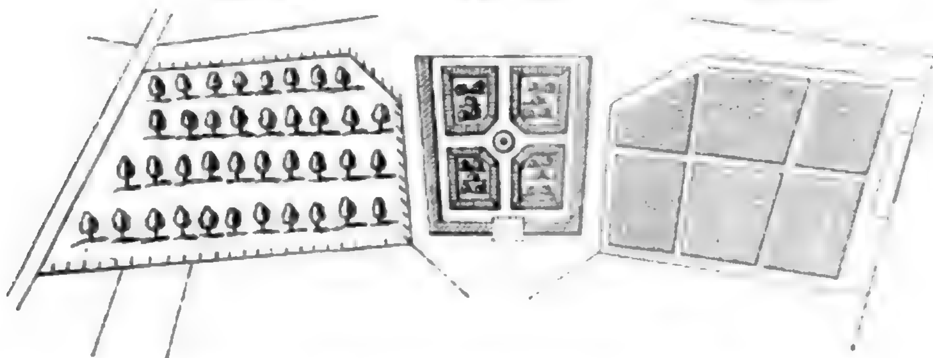


Fig. 265 Fig. 266. Fig. 267.

mehr Wasserstriche als bei einem gewöhnlichen Moore an und lässt dafür einen Theil der in Fig. 273 enthaltenen Punkte weg.

Wenn in einem Moore Torfstiche vorkommen, so werden dieselben nach Fig. 276 bezeichnet, und in farbigen Plänen ausserdem noch braun angelegt.

Das Wasser wird in Plänen ebenso wie auf Karten dargestellt, wesshalb wir uns hier auf §. 220 beziehen. Ist der Massstab des Plans = 1 : 5000, so zeichnet man die Bäche unter 5′ und bei 1 : 2000 Gräben von weniger als 2′ Breite als einfache Linien, welche aber selbst in schwarzen Plänen blau auszuziehen sind. Grosse Wasserflächen (Teiche, See'n etc.) kann man nach Fig. 277 behandeln, um das mühsame Schraffiren mit geschlängelten Linien zu ersparen.

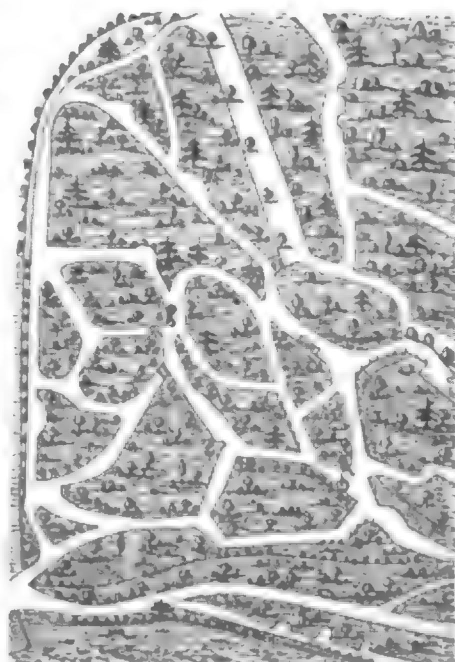


Fig. 269.

§. 230. **Bezeichnung künstlicher Gebilde.** Zu den künstlichen Gebilden, welche in Plänen anzuzeigen sind, gehören: Gebäude, Strassen, Brücken, Wasserbauten, Befestigungen, Begrenzungen, Signale, Monumente etc.

Die Gebäude werden nach ihrer Lage und ihren äusseren Umrissen dargestellt. Durch entsprechende Schraffirung unterscheidet man, ob sie aus Stein oder Holz bestehen, ob sie Privat- oder öffentliche Gebäude oder

Ruinen sind. Massive Gebäude werden nach Fig. 279 unter einem Winkel von 45° gegen ihre Grundlinien schraffirt und es ist bei öffentlichen Gebäuden die Schraffirung dunkler zu halten als bei Privatgebäuden. Hölzerne Gebäude schraffirt man parallel zu ihren Grundlinien, wie die beiden Gebäude in Fig. 278. Kirchen kann man noch durch ein Kreuz und den Stand-

Fig. 270.

Fig. 271.

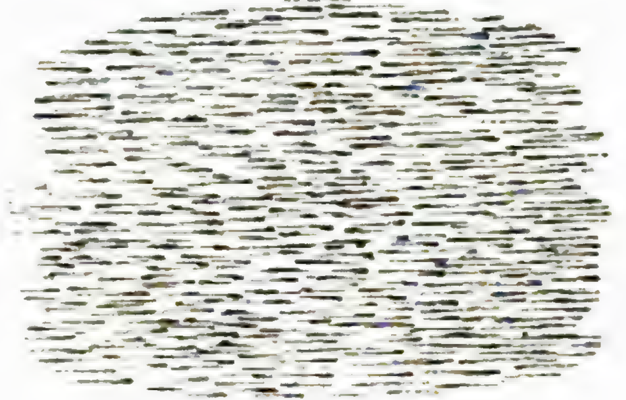


Fig. 272.

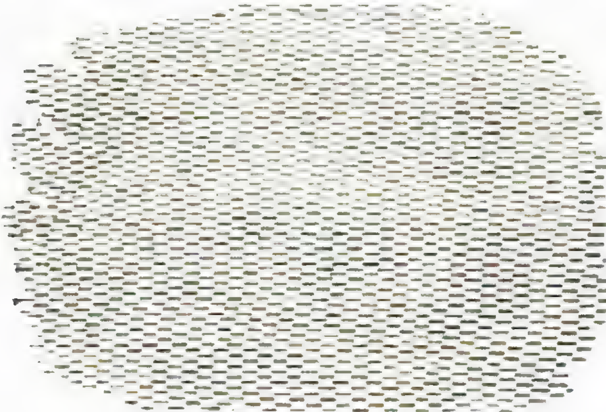
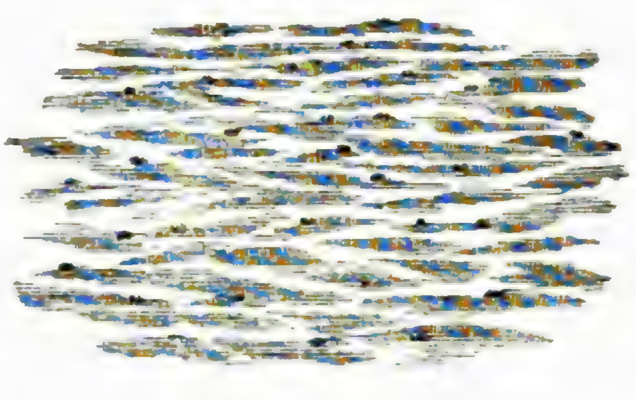


Fig. 273.

Fig. 274.

Fig. 275.



punkt des Thurms durch einen Ring mit Mittelpunkt kenntlich machen. Ruinen werden nur an den Rändern schraffirt, um gleichsam anzudeuten, dass ein Theil des Mauerwerks fehlt. Bei Mühlen und anderen Wasserwerken sind nebenbei kleine Sternchen anzubringen, welche Wasserräder bedeuten. Kirchhöfe werden wie Wiesen behandelt und erhalten zum Unterschiede von diesen kleine Kreuze. In farbigen Plänen legt man die

massiven Gebäude roth (mit Carmin), die hölzernen gelb (mit Gummigutt) an. Oeffentliche Gebäude werden in beiden Fällen zweimal angelegt.

Die Strassen werden nach ihrer Grösse und Bedeutung verschieden bezeichnet. (Fig. 280.)

Lit. a. Eine Hauptstrasse (Staats- und Kreisstrasse, Strasse 1. und 2. Classe). Befinden sich an derselben Alleebäume, so werden dieselben angedeutet. In farbigen Plänen zieht man die inneren Begrenzungslinien roth aus und legt die Oberfläche blassroth an.

Lit. b. Eine Nebenstrasse (Bezirksstrasse, Gemeindeweg, Strasse 3.

Fig. 276.

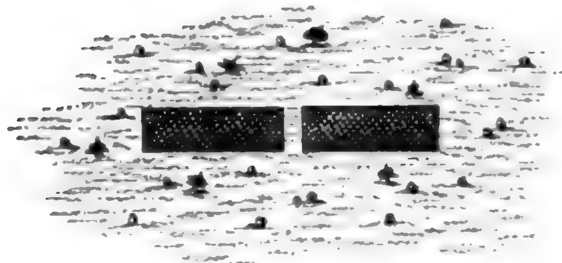


Fig. 277.

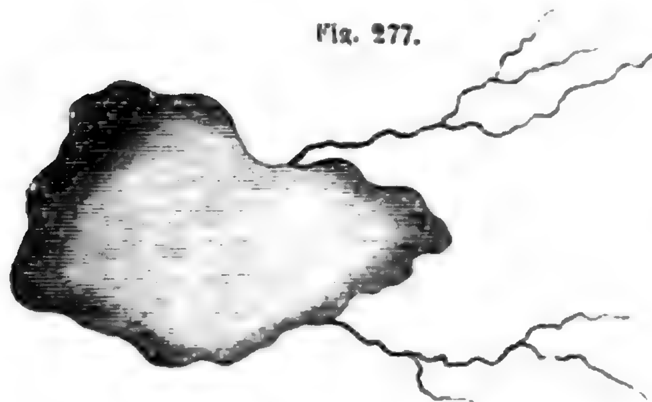
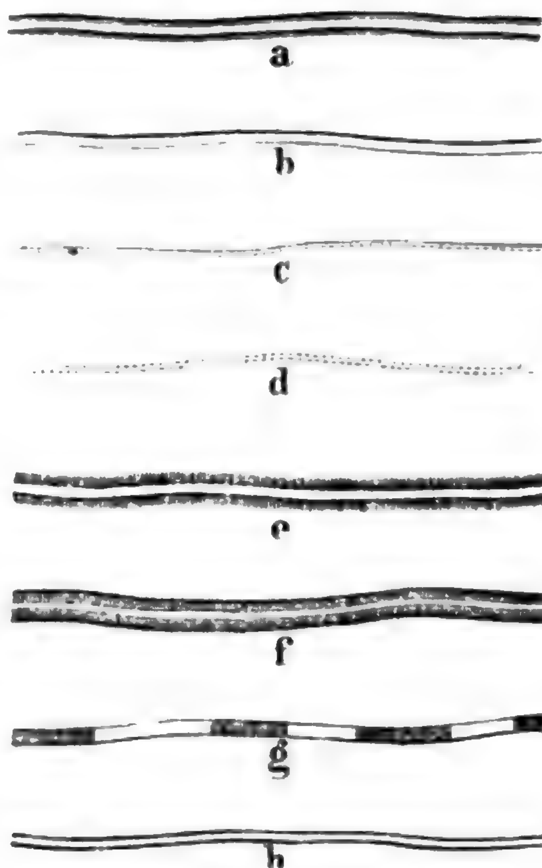


Fig. 278.

Fig. 279.

Fig. 280.



und 4. Classe). Hinsichtlich der Alleebäume und Colorirung derselben gelten die vorhergehenden Bemerkungen.

Lit. c. Ein Feld- oder Waldweg. Es soll immer die obere Linie ausgezogen und die untere punktirt werden. In farbigen Plänen legt man den Zwischenraum lichtbraun an.

Lit. d. Ein Fussweg. Statt dieser Bezeichnung wird häufig auch nur eine aus Strichen und Punkten zusammengesetzte Linie angewendet.

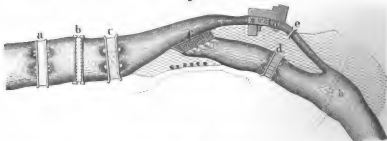
Lit. e. Ein Damm (Erdschüttung, Auftrag). In farbigen Plänen wird die Dammkrone blassroth angelegt und jede Böschung mit Carmin verwaschen.

Lit. f. Ein Hohlweg (Trockengraben, Einschnitt). In farbigen Plänen legt man die Sohle lichtbraun und die Böschungen gelb an, letztere verwaschen.

Lit. g. Ein Knüppelweg. Die Querstriche bezeichnen die Knüppel. Die lichten Stellen macht man in farbigen Plänen, je nach der Bedeutung des Wegs, blassroth oder lichtbraun.

Lit. h. Eine Eisenbahn. Nebenbei werden grosse Aufdämmungen nach Fig. e und bedeutende Einschnitte nach Fig. f angedeutet. In farbigen Plänen kann man die beiden Grenzlinien der Bahnkrone blau ausziehen.

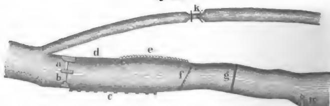
Fig. 281.



Von den **Brücken** gibt man die Hauptlinien der horizontalen Projection an; in farbigen Plänen werden die steinernen roth, die hölzernen gelb, die eisernen graublau angelegt.

In Fig. 281 bezeichnet: a eine Schiffbrücke, bei welcher je zwei Schiffe (Pontons) ein Joch bilden; b eine eiserne und insbesondere eine Kettenbrücke; c eine steinerne, d eine hölzerne Brücke, e einen Steg. An seichten Stellen der Flüsse werden die Brücken bisweilen durch Furthen (h) ersetzt.

Fig. 282.



Kommen in colorirten Zeichnungen Brücken vor, so bleibt die Form dieselbe wie in schwarzen Plänen, aber das vorherrschende Baumaterial wird, je nachdem es Stein, Holz oder Eisen ist, durch rothe, gelbe oder blaue Farbe angedeutet.

Die **Wasserbauten** werden in schwarzen oder farbigen Plänen nach ihren Grundformen und ihrer Grösse dargestellt und man unterscheidet dabei, ob sie aus Stein oder Holz, oder aus beiden zugleich bestehen. In

Fig. 282 bedeutet a eine steinerne und b eine hölzerne Schleuse; erstere wird in farbigen Plänen carminroth, letztere aber hellgelb (Gummigutt) angelegt.

Lit. c stellt ein steinernes und d ein hölzernes Beschlächt vor; in colorirten Plänen legt man jenes carminroth, dieses unter Weglassung der Schraffirung hellgelb an. Lit. e ist ein Flechtwerk, welches auch in farbigen Plänen in ähnlicher Weise wie hier behandelt wird. Dasselbe gilt von dem in f dargestellten Holzrechen und den mit g bezeichneten Ueberfällen. Ein grösseres Ueberfallwehr ist in Fig. 281 durch den Buchstaben f angedeutet.

Lit. k stellt eine Kammerschleuse vor: aus Steinen gebaut, wird sie in farbigen Plänen wie Mauerwerk, aus Holz wie Zimmerwerk behandelt.

Lit. m ist eine Schiffmühle: das vorne angebrachte Sternchen bezeichnet hier (ähnlich wie bei den feststehenden Mühlen) den Ort des Wasserrads. In farbigen Plänen lässt man die Schraffur ganz weg und behandelt die Figur mit einem blassgelben Farbenton. Eine Landmühle ist in Fig. 281 mit g bezeichnet.

Zu den Wasserbauten sind auch die Triftklausen oder jene ganz oder halb massiven Schleusenwehre zu rechnen, welche in grossen Wäldern quer durch Schluchten gebaut werden, um Quellen und kleine Bäche so weit aufzustauen, dass sie nach Oeffnung der Schleusenthore im Stande sind, das in dem Klausenhofe angesammelte Holz den Berg hinab zu triften. Die Bezeichnung der Klause geschieht durch Andeutung des Wehrs.

Befestigungen werden ebenfalls nach ihren Grundformen und der Verjüngung des Plans entsprechend horizontal projicirt. Böschungen werden nach dem Grade ihrer Neigung heller oder dunkler schraffirt; die Sohle trockener Gräben ist in schwarzen Plänen zu punktiren, in farbigen aber lichtbraun anzulegen; nasse Gräben werden dagegen in schwarzen und farbigen Plänen wie Flüsse behandelt. Für Mauer-, Holz- und Eisenwerk gelten die schon bekannten Unterscheidungszeichen.

Fig. 283.

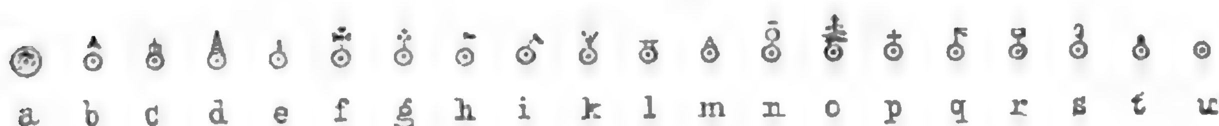


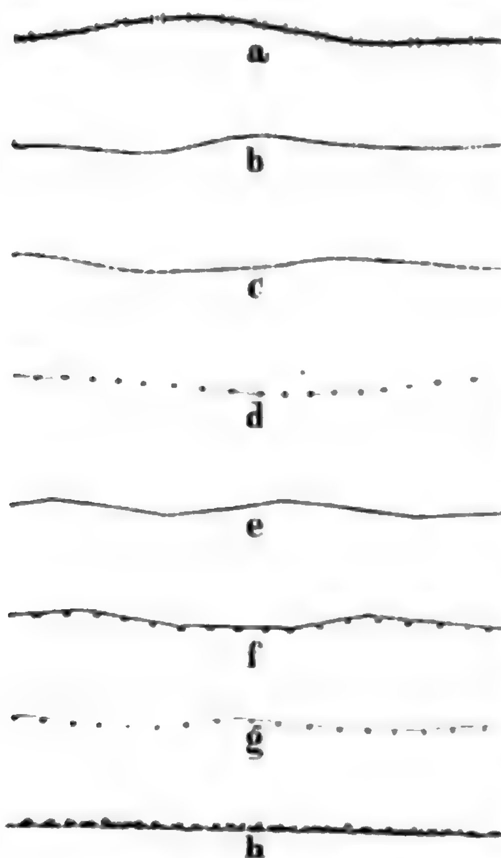
Fig. 284.

Für Signale, Monumente und die übrigen künstlichen Gebilde, welche unter den vorhergehenden nicht begriffen und auch keine Grenzen sind, bedient man sich der in Fig. 283 und 284 enthaltenen, gleichmässig

für schwarze und farbige Pläne geltenden Bezeichnungen. Die Fig. 283 enthält vorzugsweise solche Zeichen, welche bei Netzanlagen für Landesvermessungen und daher in Plänen von starker Verjüngung gebraucht werden. In derselben bedeutet: a einen Normalpunkt (§. 108), b ein massives Signal für eine Basis, c ein Gerüst-Signal, d ein dergleichen mit Dach, e ein Stecksignal, f einen Kirchthurm, g eine Kapelle, h ein bewohnbares Schloss, i eine Schlossruine, k einen Blitzableiter, l einen Kamin, m einen Dachgiebel, n ein Baumsignal (Laubholz), o ein dergleichen von Nadelholz, p ein Feldkreuz, q einen Wegweiser, r eine Ortstafel, s eine Martersäule, t einen Markstein, u einen untergeordneten Netzpunkt. In Fig. 284 bezeichnet: a einen Bildstock, b einen massiven Meilenzeiger, c ein Monument, d einen Wegweiser, e ein Feldkreuz, f einen Schlagbaum, g eine Orts- und Warnungstafel, h eine Kohlstätte (Meiler), i einen Kalkofen, k eine Windmühle.

Für Begrenzungen sind folgende Bezeichnungen im Gebrauche (Fig. 285): a Landesgrenzen, b Kreisgrenzen, c Bezirks- oder Landgerichtsgrenzen, d Gemeinde- und Flurgrenzen, e einfache Umfassungsmauern, f Umfassungsmauern mit Strebepfeilern, g Bretterwände, h lebendige Zäune.

Fig. 285.



2. Herstellung der Horizontalpläne.

§. 231. **Messtisch-Aufnahmen anzufertigen.** Die Horizontalpläne werden entweder mit oder ohne Messtisch aufgenommen. In dem ersteren Falle werden die Umrisse des Plans schon bei seiner Aufnahme gezeichnet, und er bedarf nur noch der Vollendung oder Ausfertigung; in dem letzteren Falle aber ist der Plan aus den Messungs- und Rechnungsergebnissen erst herzustellen, und es wird seine Anfertigung ausschliesslich im Arbeitszimmer des Geometers vorgenommen.

Die Ausfertigung der mit dem Messtische aufgenommenen Pläne geschieht entweder mit oder ohne Farbe. In Bezug auf die schwarzen Pläne ist zu bemerken, dass sie grösstentheils schon während der Aufnahme mit guter schwarzer Tusche ausgezogen werden, so dass nach der Aufnahme die dargestellten Objecte nur noch mit den in den §§. 229 und 230 abgebildeten üblichen Zeichen zu versehen, der Massstab der Aufnahme beizufügen und die Schrift auszuführen ist, welche zum Verständniss des Plans erfordert wird. Sollen in den Horizontalplan Schichtenlinien einge-

zeichnet werden, um zugleich die Erhöhungen und Vertiefungen des Bodens anschaulich zu machen, so ist zu rathen, dass man diese Linien selbst in einem schwarzen Plane mit farbiger Tusche ausziehe, um jede Veranlassung zu Zweifeln über die Grenze der dargestellten Objecte abzuschneiden. Am natürlichsten erscheint es, diese Curven braun und nur jede fünfte oder zehnte vor den übrigen durch eine besondere Farbe (etwa grün) auszuzeichnen, um hierdurch den Ueberblick der Figurirung des Terrains zu erleichtern. Farbige Pläne werden der Hauptsache nach zunächst wie schwarze Pläne behandelt, nur dass bei der Auszeichnung mit Tusche in den Planzeichen die Schraffirungen und Punktirungen wegbleiben, welche durch die Farbe selbst ersetzt werden, und worüber die beiden vorhergehenden Paragraphen Aufschluss geben. Die Behandlung der Farben wird als bekannt vorausgesetzt und bezüglich der Horizontalcurven, des Massstabs und der Schrift gelten die für schwarze Pläne gemachten Bemerkungen.

§. 232. **Pläne nach Coordinatenmessungen anzufertigen.** Die ersten Arbeiten zur Herstellung dieser Pläne bestehen darin, dass man das aufgespannte Papier mit einem genau construirten Quadratnetze überzieht, dessen Seiten den für die Berechnung der Aufnahme gewählten Coordinatenaxen parallel laufen. Die Massstäbe des Netzes macht man für die Massstäbe 1 : 5000, 1 : 2500, 1 : 1200 beziehlich $^1/_2$, 1, 2 Decimalzoll lang, so dass jede Seite in der Natur eine Länge von 250 Fuss hat; und wenn die Verjüngungen 1 : 4000, 1 : 2000, 1 : 1000 sind, so macht man auf den Plänen die Quadratseiten abermals beziehlich $^1/_2$, 1, 2 Decimalzoll lang, so dass ede Seite einer natürlichen Länge von 200 Fuss entspricht. Wählt man von den Netzpunkten einen entsprechenden als Anfangspunkt der Coordinaten der Stationen, so ergeben sich damit auch die Axen des Blatts und es wird keiner Schwierigkeit unterliegen, unter Berücksichtigung des in §. 114 auseinander gesetzten Verfahrens, diese Stationspunkte selbst richtig in das Plannetz einzutragen. Hat man diese Punkte, so sind damit wiederum untergeordnete Abscissenaxen für die Aufnahme von Grenzen oder anderen Linien etc. gegeben, welche sich also auch leicht in den Plan eintragen lassen. Um die übrigen Punkte zu erhalten, ahmt man die zu ihrer Aufnahme auf dem Felde angewendeten Constructionen auf dem Papiere nach. Geschieht es dabei, dass ein Punkt als der Schnitt zweier Linien bestimmt wird, welche durch Stationspunkte gehen, die ausserhalb des Planrands liegen, so sind jedesmal nach den bekannten einfachen Sätzen der Trigonometrie oder analytischen Geometrie die Coordinaten des Schnittpunkts zu berechnen und danach aufzutragen; denn es würde zu unsicher und zeitraubend seyn, wenn man die ausser dem Plane liegenden Stationspunkte erst construiren wollte, um durch eine entsprechende Verbindung derselben den gesuchten Punkt sofort direct zu erhalten. Findet man die gerade Verbindungslinie zweier Punkte, welche für die Aufnahme von Details mit der Kette als Abscissenaxe diente, grösser oder kleiner als sie

der wirklichen Messung nach sein soll, und ist die Differenz keinem groben Versehen beim Messen oder Auftragen zuzuschreiben: so müssen entweder die gemessenen Abscissen auf die im Plane gegebene Länge der Abscissenaxe, oder es muss diese auf die gemessenen Abscissen reducirt werden. Das erstere Verfahren ist für sich klar; zur Erläuterung des zweiten, welches intelligente Practiker vorziehen, dürfte ein einfaches Beispiel genügen.

Hat nämlich die Kettenmessung für eine Linie 784',2 und der Plan nur 781',2 ergeben, so verlängert man die Linie auf dem Plane um 800 — 784,2 = 15',8, so dass deren Gesammtlänge jetzt = 781',2 + 15',9 = 797' ist, und nimmt diese Länge für 800' an. Theilt man diese Länge in 8 gleiche Theile, so wird jeder 99',6 statt 100' lang. Die Differenz von 0',4 ist bei Massstäben, welche kleiner als 1 : 2000 sind, kaum mehr sichtbar und darf daher wohl vernachlässigt werden. Ist der Massstab grösser als 1 : 2000 oder die Differenz grösser als hier, so braucht man nur die Anzahl der Theile, in welche man die reducirte Linie zerlegt, zu vergrössern, um die Theildifferenzen so klein zu erhalten, dass sie vernachlässigt werden dürfen.

Man begreift, dass sich das in vorstehendem Beispiele versinnlichte Verfahren auch anwenden lässt, um eine geneigte Abscissenlinie, die nicht horizontal, sondern dem stetig steigenden oder fallenden Boden entlang gemessen worden ist, auf den Horizont zu reduciren. Ist man so weit gekommen, dass alle Punkte und Linien aufgetragen und alle Umrisse mit Tusche ausgezogen sind, so wird der Plan nach §. 231 ausgefertigt.

B. Vertical- oder Nivellementspläne.

1. Längenprofile.

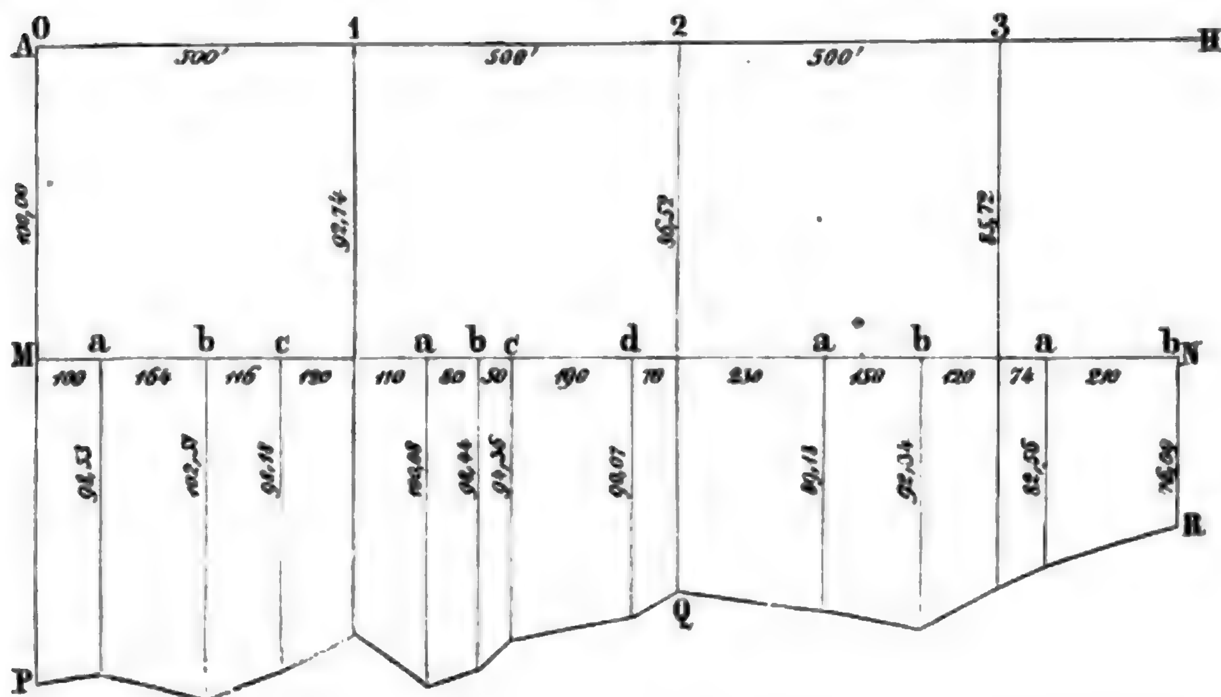
§. 233. Die Zeichnung eines Längenprofils der Erdoberfläche besteht der Hauptsache nach in dem Auftragen der gemessenen und berechneten Abscissen und Ordinaten aller Brechungs- und Abtheilungspunkte der nivellirten Linie. Da dergleichen Profile oft sehr lang sind, so kommt es darauf an, die Zeichnung möglichst übersichtlich zu machen. Zu dem Ende ist es Gebrauch:

1. die Horizontalprojection der Linie, nach welcher das Terrainprofil genommen wird, auf dem Felde schon in gleiche Abschnitte von einer in runder Zahl auszudrückenden Länge (z. B. 100 Meter, 100 Klafter, 100 Ruthen, 500 Fuss, 1000 Fuss etc.) zu theilen und diese Abtheilungspunkte von 0 angefangen fortlaufend zu numeriren. Diese Numerirung gibt sofort die Längen der Abscissen an; denn beträgt eine Abtheilung 100 Ruthen à 10 Fuss, so gibt die Abtheilungs- oder Profilnummer 37 an, dass der damit bezeichnete Punkt 3700 Ruthen oder 37000 Fuss vom Anfangspunkte der Linie entfernt sei. Diese Hauptabtheilungen werden in der Zeichnung auf

die Weise hervorgehoben, wie Fig. 286 zu erkennen gibt, in der die Linie A H den Horizont bezeichnet, auf den sich die Abstände der Terrainpunkte beziehen. Est ist ferner Gebrauch:

2. die zwischen den Hauptpunkten liegenden Brechungspunkte des Terrains auf dem Felde und in der Zeichnung durch Buchstaben zu benennen, wie dieses abermals aus der nachstehenden Figur zu entnehmen ist. Würde man die Buchstaben a, b, c .... auch über die Linie A H setzen, so liessen sich die Ziffern 1, 2, 3 .... nicht mehr so gut übersehen, als dieses der Fall ist, wenn man in einer Entfernung von 1 bis 2 Zoll eine Parallele M N zu A H zieht und über diese Parallele den Namen der Zwischenpunkte setzt. Wenn auch in der Zeichnung die Ordinaten dieser Punkte nur bis an die Linie M N ausgezogen sind, so beziehen sich die beigeschriebenen

Fig. 286.



Verticalabstände doch auf die durch A H angedeutete gemeinsame Horizontalebene. Weiter ist es gebräuchlich:

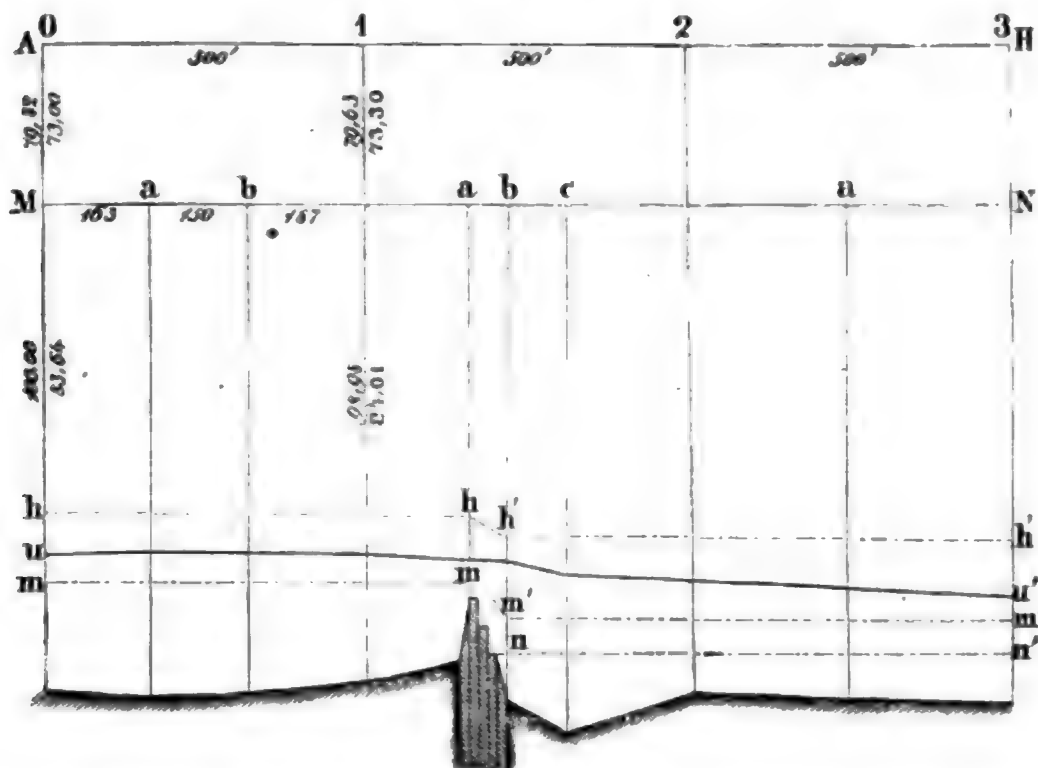
3. die horizontalen Entfernungen der einzelnen Profilpunkte unter sich in den Plan einzuschreiben, wie die mehrgenannte Figur zeigt; und zwar stehen die Längen der Hauptabtheilungen unmittelbar unter der oberen, die der Zwischenabtheilungen aber unmittelbar unter der unteren Horizontalen. Für die Hauptabtheilungen wäre das Einschreiben der Längen unnöthig, wenn es nicht manchmal vorkäme, dass eine Abtheilung grösser oder kleiner werden muss als das bestimmte Mass; z. B. bei Flüssen, Gebäuden etc. In solchen Fällen ergänzen sich aber immer zwei Nachbarabtheilungen; denn kann z. B. die eine nur 920' lang gemacht werden, so erhält die folgende eine Länge von 1080', so dass beide Abtheilungen zusammen doch wieder 2000' lang sind. Ebenso ist es eingeführt:

4. die Abscissen und Ordinaten nach verschiedenen Massstäben aufzu-

tragen und zwar die Ordinaten in einem grösseren Massstabe als die Abscissen. Der Höhenmassstab ist nach Erforderniss 5, 10, 20, 100mal grösser als jener der Längen. Durch diese Verschiedenheit der Massstäbe erhält man zwar ein verzerrtes Bild des Terrainprofils, aber man übersieht dessen Steigungen und Gefälle besser. Es hindert jedoch Nichts, Längen und Höhen nach einerlei Massstab aufzutragen, wenn man dazu Lust oder sonst wie Veranlassung hat. Endlich ist es ein allgemeines Uebereinkommen:

5. alle Linien, Zahlen und Worte, welche sich auf das natürliche Terrain beziehen, schwarz; jene aber, welche sich auf ein herzustellendes Bauwerk, z. B. eine Strasse, Eisenbahn, einen Canal, Durchstich etc. beziehen, roth zu zeichnen und zu schreiben, um durch diese Farben das Bestehende von dem Werdenden oder den auf dem Terrain vorzunehmenden Veränderungen anzuzeigen.

Fig. 287.



Näher hierauf einzugehen, liegt ausser dem Zwecke dieses Buchs und gehört in das Bereich des Ingenieurwesens; wen es jedoch interessirt, die gebräuchliche Anlage und Ausstattung von Nivellementsplänen für Erdbauwerke näher kennen zu lernen, findet dergleichen in des Verfassers „Vorlegeblättern zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde mit erläuterndem Texte," welche (zum Theil in Farbendruck) im Jahre 1856 in der literarisch-artistischen Anstalt der J. G. Cotta'schen Buchhandlung zu München erschienen.

§. 234. Das Längenprofil eines Flusses unterscheidet sich von dem einer trockenen Terrainstrecke nur insofern, als es ausser dem Nivellement der Stromrinne oder des Thalwegs, welches gerade wie ein Terrain-Längenprofil dargestellt wird, noch die Wasserspiegel des Flusses bei verschiedenen Wasserständen und in der Regel auch ein Ufer desselben

bildlich darstellt. Nehmen wir an, dass das Nivellement des Flusses nach §. 195 aufgenommen und das des Thalwegs nach §. 233 aufgetragen sei, so ist hinsichtlich des Einzeichnens der Wasserspiegel und des Flussufers unter Bezugnahme auf Fig. 287, welche ein Stück eines Flussnivellements vorstellt, noch Folgendes zu bemerken:

1. Die Linien und Zahlen, welche sich auf die Wasserstände beziehen, werden blau gezeichnet und geschrieben. Da wir aber diese Farbe in Fig. 287 nicht anwenden konnten, so haben wir die Wasserspiegel durch gestrichelt-punktirte Linien (—·—·—) und die sich auf sie beziehenden Zahlen durch stehende Schrift angedeutet. Die übrigen an den Ordinaten 0 und 1 sich befindenden Zahlen beziehen sich auf den Thalweg und das Flussufer, und gehen denen für die Wasserstände jederzeit voraus.

2. Ob die blauen Zahlen dem Hochwasser (h, h'), oder dem Mittelwasser (m, m'), oder dem Niederwasser (n, n') angehören, ergibt die Ansicht der Zeichnung ohne Weiteres. Ebenso versteht es sich von selbst, welche schwarze Zahl dem Thalwege und welche dem Ufer angehört. Die Uferlinie wird ebenfalls schwarz ausgezogen.

3. Für den Gebrauch des Längenprofils eines Flusses ist es bequemer, dasselbe so abzustecken und abzubilden, dass die fortlaufenden Nummern der Hauptabtheilungen und die Schrift, welche auf den Plan gehört, in der Richtung des Flusslaufs stehen. Man kann zwar ein Nivellement, welches in der entgegengesezten Richtung aufgenommen und gezeichnet ist, ebenso gut wie das vorige gebrauchen; aber es tritt dem, der an die erstere Darstellungsweise gewöhnt ist — und das ist wohl der grössere Theil der Ingenieure — einigermassen störend entgegen.

4. Die Befolgung der hier gegebenen Regeln setzt keineswegs, wie oft behauptet wird, [1] voraus, dass die Aufnahme auf dem linken Flussufer geschehen müsse: sie kann unbeschadet der Darstellung ebenso gut auf dem rechten Ufer vorgenommen werden, da es offenbar gleichgültig ist, ob die sichtbare Uferlinie (u, u') diesseits oder jenseits des Wasserprofils (m' m) liegt.

2. Querprofile.

§. 235. Für die bildliche Darstellung der Querprofile sowohl des festen Bodens als der Flüsse gelten im Allgemeinen die in den beiden vorhergehenden Paragraphen mitgetheilten Regeln; im Besondern ist aber noch Folgendes zu bemerken.

1. Benützt man die aufgenommenen Querprofile zur Darstellung der Bodenoberfläche durch Horizontalcurven, so trägt man dieselben (nach den Fig. 288 bis 290) in verschiedenen Massstäben auf und nimmt den der Abscissen gleich dem Massstabe des Horizontalplans, worauf die genannten Curven verzeichnet werden sollen, den der Ordinaten aber 5 oder 10mal grösser.

[1] Z. B. in Bachmann's »Theorie und Praxis des Nivellirens,« Weimar 1838, S. 185.

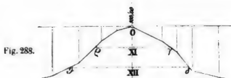


Fig. 288.

Fig. 289.

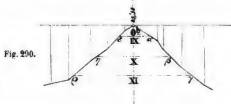


Fig. 290.

2. Gebraucht man die Querprofile zur Berechnung von Erdmassen oder zu Constructionen für Erdbauwerke, so werden die Abscissen und Ordinaten, wie in Fig. 291, in gleichem Massstabe aufgetragen, und dieser selbst wird so gross genommen, dass man die Dimensionen der zu berechnenden Flächentheile des Profils noch mit der Genauigkeit abgreifen kann, welche die Rechnung oder die Construction erfordert. Der gebräuchlichste Massstab ist 1 : 100; weniger oft wird 1:200 oder 1:50 angewendet.

3. Die Querprofile der Flüsse werden entweder nach Fig. 287 oder 291 gezeichnet, je nachdem man sie bloss zur Darstellung der Beschaffenheit eines Flusses oder zu Erdberechnungen und Constructionen braucht; ausserdem werden in sie mit blauer Farbe die Wasserstände eingetragen, wie solche an der betreffenden Stelle des Längenprofils enthalten sind.

Fig. 291.

4. Schliesslich wiederholen wir die schon früher gemachte Bemerkung, dass bei der Zeichnung der Querprofile die rechte und linke Seite derselben nicht verwechselt werden darf, wenn man nicht Gefahr laufen will, die Construction oder Rechnung, wofür man solche Profile braucht, ganz zu entstellen und folglich unbrauchbar zu machen.

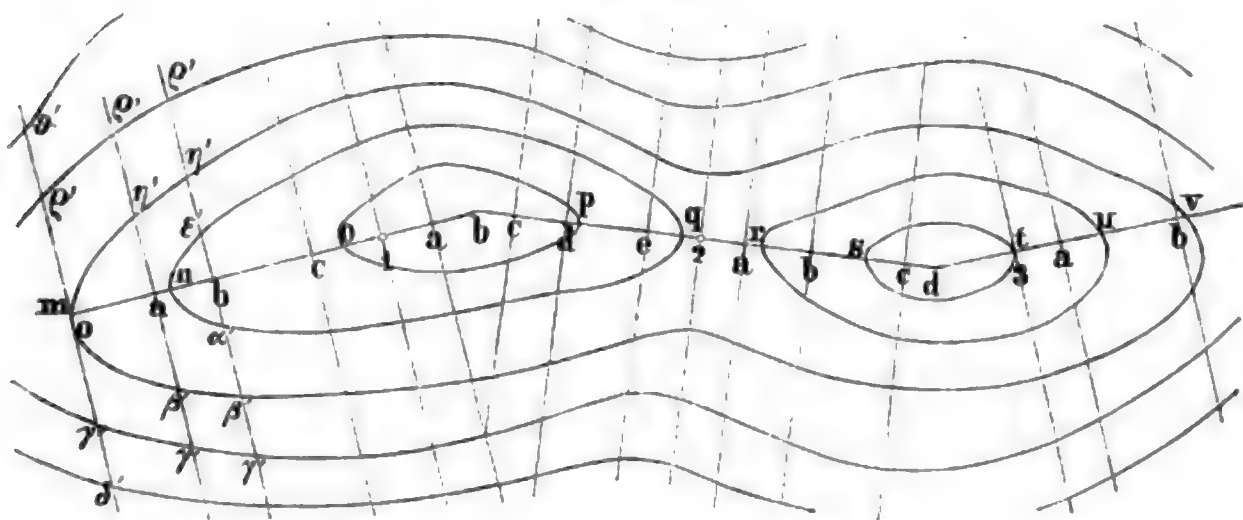
3. Horizontalcurven.

§. 236. Wie die Horizontalcurven aus gegebenen Terrainaufnahmen construirt werden, ist schon in den §. 147 bis 150 gezeigt worden, da sich

die Aufnahme derselben vollständiger erklären lässt, wenn man zugleich die verschiedenen Methoden, die Curven daraus zu finden, kennt. Eben so haben wir früher schon daran erinnert, dass es zweckmässig erscheine, selbst auf schwarzen Horizontalplänen die Schichtenlinien farbig (etwa braun) auszuziehen und bei sehr durchschnittenem Terrain jede fünfte oder zehnte Curve durch eine besondere Farbe (etwa grün) vor den übrigen auszuzeichnen, weil sich dadurch deren Gang und hiermit die Gestaltung des Terrains leichter erkennen lasse. In Fig. 172 §. 150 ist eine solche Curve (X) gestrichelt, während die übrigen ausgezeichnet sind; und in unseren „Vorlegeblättern zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde“ ist ein farbiger Situationsplan mit Horizontalcurven enthalten.

Ist eine Terrainfläche durch Horizontalcurven dargestellt, so lässt sich aus denselben nach jeder beliebigen Richtung ein Profil construiren. Denn angenommen, Fig. 292 stelle das Nivellement einer Fläche vor und der Abstand der Curve m vom allgemeinen Horizont sei = 100 Fuss, so wird

Fig. 292.



man das Längenprofil nach der Richtung m b d v erhalten, wenn man zuerst diese gebrochene Linie in Hauptabtheilungen (0, 1, 2, 3 ....) von etwa 500 Fuss Länge und in passende Zwischenabtheilungen (a, b, c ....) zerlegt und die Verticalabstände dieser Punkte bestimmt. Für m = 0 ist dieser Abstand = 100′; für 0^a findet man ihn folgendermassen. Denkt man sich in der Richtung m b das Terrain durch eine Verticalebene geschnitten und in a und n Senkrechte zur Horizontalprojection m n errichtet, bis sie die Terrainlinie in a′ und n′ schneiden: so hat man zwei ähnliche Dreiecke m n n′ und m a a′, in welchen drei Stücke bekannt sind, nämlich: n n′ = 10′ = dem Abstande der Horizontalebenen, m n = 178′,6 und m a = 140′ = den Längen, welche der im Massstabe von 1 : 5000 angefertigte Horizontalplan liefert; man findet desshalb aus der Proportion

m n : m a = n n′ : a a′ oder aus 178′,6 : 140′ = 10′ : a a′, a a′ = 7′,84

und es ist folglich der Abstand des in a projicirten Punkts a′ oder 0^a, da er 7′,84 über m, das den Abstand 100′ hat, gleich 100 — 7′,84 = 92′,16.

So fortfahrend erhält man die Abstände und Entfernungen der Punkte 0^b, 0^c, 1, 1^a, 1^b .... n, o, p, q .... und kann damit folglich den gesuchten und in Fig. 293 dargestellten Längendurchschnitt zeichnen.

In gleicher Weise kann man in Bezug auf das Längenprofil m n o p q.... Querprofile aus den Horizontalcurven construiren. Will man z. B. in dem Punkte m oder 0 der Fig. 292 ein zu m b senkrecht stehendes und folglich in der Richtung ϱ' m δ' zu nehmendes Querprofil zeichnen, so hat man zunächst für den Punkt m oder 0 den Abstand = 100'; für die Punkte γ' und ϱ' die Ordinaten = 110', die Abscissen beziehlich = m γ' und = m ϱ'; für δ' und ϑ' die Ordinaten = 120', die Abscissen = m δ' und m ϑ'. Damit ist das erste Querprofil 0 in Fig. 294 bestimmt. Durch ein gleiches Verfahren findet man auch die Querprofile 0^a, 0^b u. s. w.

Fig. 293.

Für die Ingenieure werden die Horizontalcurven namentlich dadurch von besonderer Wichtigkeit, dass sie gestatten, auf sehr einfache Weise eine Linie von bestimmter Neigung aufzusuchen, welche von einem gegebenen Punkte ausgeht und in einem anderen gegebenen Punkte ankommt. Soll z. B. eine solche Linie von 5% Steigung zwischen den Punkten A und W der Fig. 295 gesucht werden und ist der Abstand der Horizontalebenen = 10 Fuss, der Massstab des Horizontalplans = 1 : 5000 gegeben, so verfährt man folgendermassen. Man berechnet zuerst die Länge der Horizontalprojection einer Linie, deren oberer Endpunkt gerade um 10' höher liegt als der untere (diese Länge beträgt hier 200'); alsdann schneidet man mit dieser auf den Massstab des Plans reducirten Länge (hier mit einer Zirkelöffnung von 0',04) von dem Punkte A aus die Punkte B, C, D, E .... und von W aus die Punkte V, U, T, S .... ab. Die Linien A B C D E .... und W V U T S .... schneiden sich im Punkte P; da man die Stücke F P

(von FG) und PU (von TU) ebenfalls 5% Steigung haben, so erfüllt die Linie ABCDEFP UVW die gegebenen Bedingungen, und es ist dieselbe folglich eine der möglichen Lösungen der gestellten Aufgabe. Die Richtigkeit des Verfahrens bedarf wohl keines besonderen Beweises; und dass viele Lösungen möglich sind, erkennt man sofort an dem Umstande, dass von jedem Punkte A, B, C.... W, V, U.... aus im Allgemeinen zwei Schnittpunkte auf der nächst höheren oder tieferen Curve erhalten werden, von welchen aus wieder je zwei Schnitte möglich sind. Zu entscheiden, welche von den aufgefundenen Linien einem ausgesprochenen Zwecke am besten genügt, gehört nicht mehr hierher.

Fig. 294.

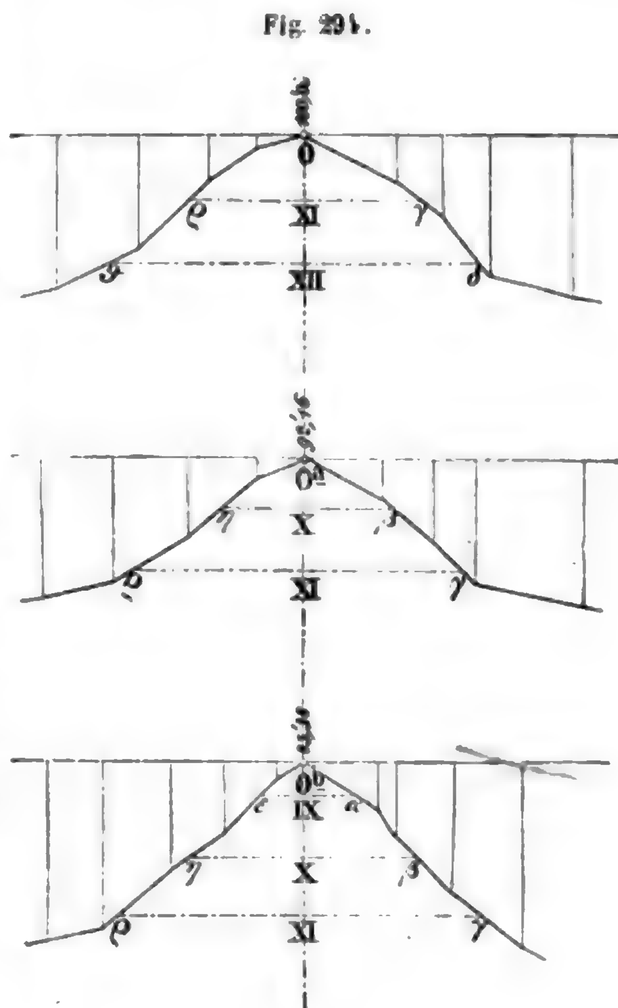
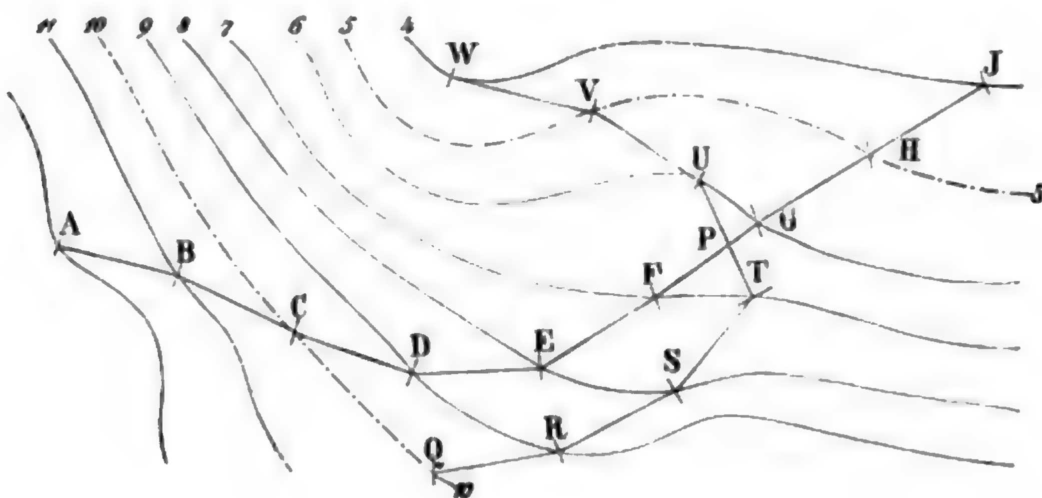


Fig. 295.



C. Berg- oder Grubenpläne.

§. 237. Die Berg- oder Grubenpläne bestehen, wie die geometrischen Pläne, aus Horizontal- und Verticalprojectionen oder aus „Grund- und Seigerrissen."

Die Grundrisse stellen entweder einen Theil der Erdoberfläche oder einen wagrechten Durchschnitt eines Grubenwerks vor; in dem ersteren Falle unterscheiden sie sich der Form nach durch Nichts von einem

geometrischen Situationsplane, und im letzteren Falle stimmen sie formell mit dem wagrechten Durchschnitte eines Gebäudes überein. Besondere allgemein übliche Zeichen für die Horizontalprojectionen von Gegenständen, die ausschliesslich dem Bergbaue und beziehungsweise der Markscheidekunst angehören, gibt es nur wenige. Die gebräuchlichsten sind in Fig. 296 zusammengestellt und nachstehend erklärt: a bedeutet einen Schacht, b ein Stollenmundloch ohne Rösche und c eines mit offener Rösche, d einen Bohrpunkt, ein Schurfzeichen, f einen Mark- oder Lochstein. Die Mineral-

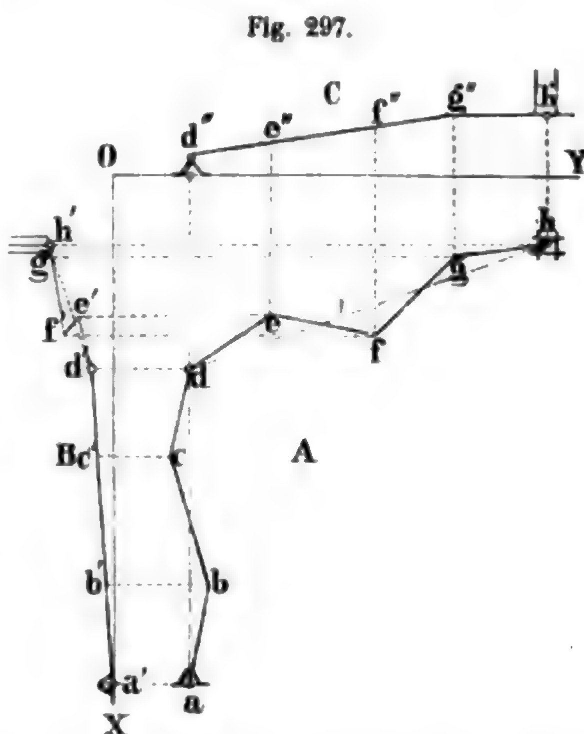
Fig. 296.

gattung, welche in einem Bergwerke gewonnen oder anderswo gefunden wird, bezeichnet man sowohl in topographischen Karten als in Situationsplänen und Grundrissen meist mit den in der Astronomie gebräuchlichen Zeichen der Himmelskörper, nämlich mit dem Zeichen der Sonne (g) das Gold, mit dem Zeichen des Monds (h) das Silber, mit dem des Merkurs (i) das Quecksilber, mit dem der Venus (k) das Kupfer, mit dem des Mars (l) das Eisen, mit dem der Erde (m) das Blei, mit dem des Jupiters (n) das Zinn. Für Schwefel gebraucht man das Zeichen lit. o, für Kochsalz das unter lit. p und für Alaun das bei q.

Die Seigerrisse der Markscheider stimmen im Allgemeinen mit den Längen- und Querprofilen der Ingenieure und Geometer überein; in einzelnen Fällen aber unterscheiden sie sich dadurch von den geometrischen Profilen, dass sie wirkliche Verticalprojectionen sind, während die genannten Längen- und Querprofile stets als Abwickelungen lothrecht stehender Prismen- oder Cylinderflächen erscheinen. In solchen Fällen sind dann auch gewöhnlich drei Projectionen eines Grubengebäudes vereinigt, nämlich die horizontale (söhlige Projection, Grundriss) und zwei auf einander senkrecht stehende (erste und zweite verticale Projection, Aufriss und Kreuzriss); es werden also die aufgenommenen Linien und Winkel auf drei senkrechte Coordinatenebenen nach den Regeln der analytischen und darstellenden Geometrie projicirt. Die Wahl der Projectionsaxen und beziehungsweise der Projectionsebenen ist im Wesentlichen unbeschränkt; man wird jedoch gut thun, bei Darstellungen von Stollen, Strecken, Querschlägen u. dgl. eine der Axen in das allgemeine Streichen dieser Grubenbaue zu legen, damit wenigstens eine verticale Projection nahezu unverkürzt ist. Ferner erscheint es zweckmässig, die horizontale Projectionsebene bei Stollenbauten durch den tiefsten Punkt der Stollensohle und bei Tiefbauten in die höchste Stelle des Schachtes, d. i. in seinen Tagkranz zu legen; endlich kann man auch, wenn es die bildliche Darstellung übersichtlicher oder verständlicher macht, die beiden verticalen Projectionsebenen unter einem spitzen oder stumpfen Winkel sich schneiden lassen.

In Fig. 297 ist die Axe O X dem allgemeinen Streichen a d des Stollens parallel, die Axe O Y aber senkrecht auf O X gestellt; A ist der Grundriss, B der Aufriss, C der Kreuzriss des Stollens a d und seines Querschlags d h. Dass dieses Auftragen nur auf Grund eines vollständig berechneten Markscheidezugs, wozu die §§. 177 bis 180 Anleitung geben, geschehen kann, versteht sich von selbst, und dass auch hier die Höhen in der Regel nach einem anderen Massstabe aufgetragen werden als die Längen, bedarf wohl kaum der Erinnerung.

Fig. 297.



Für das Ueberschreiben und Copiren der Grubenpläne gelten die für geometrische Pläne mitgetheilten Regeln; und was das Coloriren der Zeichnungen betrifft, so gibt man den oberirdischen Gegenständen dieselben Farben, welche sie in topographischen Karten und Plänen erhalten, während die Bezeichnung der unterirdischen Objecte mit Farben ziemlich willkürlich ist. Empfehlenswerthe colorirte Grubenpläne findet man in Hanstadt's „Anleitung zur Markscheidekunst,“ Pesth 1835, und in Weisbach's „neuer Markscheidekunst,“ Braunschweig 1851, auf die wir hier mit dem Wunsche verweisen, dass sich die bildlichen Darstellungen der Markscheider denen der Geometer und Ingenieure eben so nähern mögen, wie dieses bei den Messungsmethoden schon der Fall ist.

Dritter Abschnitt.

Abzeichnung der Karten und Pläne.

§. 238. Wenn auch in neuerer Zeit die in den meisten europäischen Staaten hergestellten topographischen Karten und Katasterpläne durch Lithographie und Kupferstich vervielfältigt werden und besondere Copien derselben desshalb unnöthig erscheinen, so ist doch diese Art des Copirens der Originalzeichnungen wegen ihrer Kostspieligkeit nicht auf alle geometrischen Aufnahmen, die man in mehreren Exemplaren zu besitzen wünscht, anwendbar, und es gibt also gleichwohl noch Fälle genug, in denen Karten

und Pläne jeder Art in gleicher oder verjüngter Grösse abzuzeichnen sind. Darum dürfen hier auch einige Erörterungen über das Copiren und Reduciren von Originalzeichnungen nicht fehlen.

Es gibt drei Methoden eine Zeichnung zu copiren, nämlich das Durchzeichnen, das Abzeichnen mittels quadratischer Netze, und das Abzeichnen mit Hilfe des Pantographen oder Storchschnabels. Die beiden letzteren Methoden sind zugleich geeignet, das Original in einem beliebigen Verhältniss zu verkleinern oder zu vergrössern. Das Vergrössern einer Karte oder eines Plans ist jedoch aus demselben Grunde nicht zu empfehlen, aus dem man bei der geometrischen Aufnahme immer nur vom Grossen in's Kleine und nicht umgekehrt vom Kleinen in's Grosse arbeitet: nämlich wegen der Anhäufung der Fehler, die dadurch unvermeidlich entsteht. Desshalb ist hier auch nur von dem Verkleinern oder Reduciren der Karten und Pläne die Rede.

A. Das Durchzeichnen.

§. 239. Man kann drei Arten des Durchzeichnens unterscheiden, nämlich: das Durchzeichnen mittels Strohpapiers oder Bausleinwand (das Bausen), das Durchzeichnen mittels des Copirpultes, und das Durchzeichnen mittels der Pikirnadel (das Pikiren).

Das Bausen setzt ein durchscheinendes Gewebe, auf dem weder Tusch noch Farbe fliessen, voraus. Bisher hat man immer das bekannte sogenannte Strohpapier dazu verwendet; in neuerer Zeit bedient man sich aber namentlich zu Bausen, welche längere Dauer haben sollen, der Bausleinwand. Diese Leinwand (oder das Strohpapier) breitet man über die zu bausende Zeichnung glatt aus und befestigt sie daran mit etwas Wachs oder kleinen Zwingen; hierauf zieht man (unter Benützung eines Dreiecks für die geraden Linien) die Grenzen der Figuren mit Tusch so genau als möglich aus, und bringt schliesslich die topographischen Zeichen, Schrift und Farben am rechten Ort und in der rechten Weise an. Zum Gebrauche spannt man dergleichen Bausen, mögen sie auf Strohpapier oder Bausleinwand gemacht sein, auf weisses Papier, wobei zu rathen ist, nicht bloss die Ränder der Bause, sondern deren ganze Fläche festzukleben.

Das Copirpult, dessen man zur zweiten Art des Durchzeichnens bedarf, besteht aus einer hinreichend grossen ebenen Glastafel, welche von einem Holzrahmen umschlossen ist und mit diesem um ein Scharnier wie eine Pultplatte gedreht werden kann. Zwei Spreizen dienen dazu, der Glastafel die Neigung zu geben, welche zum Zeichnen gewünscht wird.

Mit diesem Apparate copirt man eine Zeichnung dadurch, dass man sie erst mit dem Zeichenpapiere überspannt und dann beide auf der Glastafel des Pultes befestigt. Dieses wird gegen das Fenster gerückt und so lange gehoben oder gesenkt, bis man die Conturen gut durchscheinen sieht; wobei zu bemerken ist, dass man durch das Herablassen einer Rolette bis

auf den oberen Holzrand des Pultes die Deutlichkeit der durchscheinenden Linien noch etwas vermehren kann. Hierauf wird wie beim Bausen verfahren.

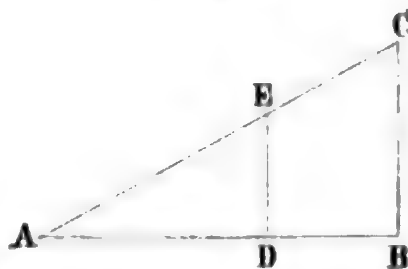
Das Pikiren einer Karte oder eines Plans besteht darin, dass man alle Eck- und Krümmungspunkte der Originalzeichnung mittels einer feinen, in Holz befestigten Nadel durchsticht und auf diese Weise in das unverrückbar darunter liegende Zeichenpapier überträgt. Nachdem dieses geschehen ist, verbindet man die zusammengehörigen Punkte durch gerade oder krumme Linien und vollendet die Zeichnung, wie früher angegeben. Dass diese Art des Durchzeichnens das Original verdirbt, bedarf wohl keiner weiteren Erinnerung.

B. Das Abzeichnen durch Quadratnetze.

§. 240. Soll die Copie die Grösse des Originals erhalten, so wird erfordert, dass man sowohl dieses als das Zeichenpapier der Copie mit feinen Bleilinien in Quadrate von gleicher Grösse eintheilt und in jedes Quadrat der Copie genau Das einträgt, was das entsprechende Quadrat des Originals enthält. Das Einzeichnen in die Quadrate von 3 bis 6 Linien Seitenlänge geschieht im Allgemeinen nach dem Augenmasse; es hindert jedoch Nichts, einzelne Punkte mit dem Zirkel auf den Quadratseiten abzumessen oder in der Quadratfläche durch Kreisbögen zu bestimmen. Quadrate, welche sehr viel Detail enthalten, theilt man noch durch ihre Diagonalen, um weitere Anhaltspunkte für das Uebertragen nach dem Augenmasse zu erhalten.

Ist für die Copie ein kleinerer Massstab vorgeschrieben und verhält sich dieser zu dem Massstabe des Originals wie $c : o$, so müssen sich die Quadratseiten der Copie ebenfalls wie $c : o$ verhalten. Wäre $o = {}^1/_{2000}$ und $c = {}^1/_{5000}$, so hätte man $c : o = 2 : 5 = 0{,}4 : 1$, d. h. die Quadratseiten der Copie dürften nur 0,4 der Länge der Seiten der Originalquadrate haben. Das Uebertragen des Details in die Copiequadrate geschieht wiederum nach dem Augenmasse; will man aber auch einzelne Entfernungen abmessen, so kann dieses entweder mit Hilfe eines Proportionalzirkels, dessen Einrichtung und Gebrauch als bekannt vorausgesetzt wird, oder mittels eines Reductions-Dreiecks geschehen. Von diesem Dreiecke verhalten sich zwei Seiten A B, B C (Fig. 298) zu einander wie $o : c$ und machen bei B einen beliebigen (also z. B. einen rechten) Winkel. Ist nun A D die zu reducirende Länge, so gibt die zu B C parallele Gerade D E den im Verhältniss von $o : c$ verjüngten und in die Copie überzutragenden Abstand.

Fig. 298.



Wenn man eine Zeichnung zu copiren hat, deren Kostbarkeit nicht gestattet, sie mit einem Netze von Bleilinien zu überziehen, so zeichnet man dieses Netz mit Tusche auf Bausleinwand und befestigt diese auf dem

Rande der Originalzeichnung so lange, bis die Copie gemacht ist. Netze von Seidenfäden, die man über die zu copirenden Karten und Pläne spannt, und ebenso Netze, die auf Glastafeln geritzt sind, verursachen viel mehr Umstände und Kosten als die auf Bausleinwand, wesshalb diese nicht bloss in dem bezeichneten Falle vorzuziehen, sondern überhaupt zu empfehlen sind, da man sich damit die Mühe ersparen kann, für jede Copie ein Quadratnetz auf das Original zu zeichnen.

C. Das Abzeichnen mit dem Pantographen.

§. 241. Theorie und Beschreibung des Pantographen. Der Pantograph besteht aus einem verschiebbaren Parallelogramm A B C D (Fig. 299), dessen Seiten an den Enden durch Gewinde verbunden sind, und aus zwei auf den Seiten A B, A D befestigten Stiften E und G, welche mit einer auf der dritten Seite C D angebrachten Axe F in einer verticalen Ebene liegen. Bei dem Gebrauche dreht sich das Instrument um die Axe F,

Fig. 299.

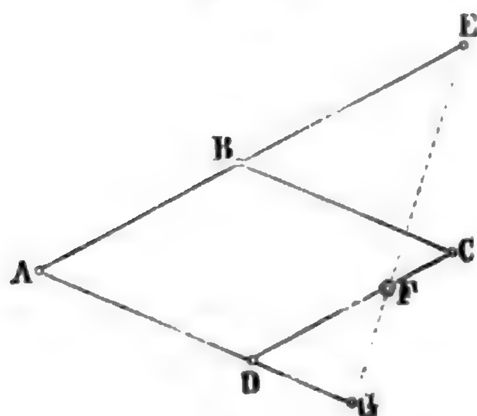
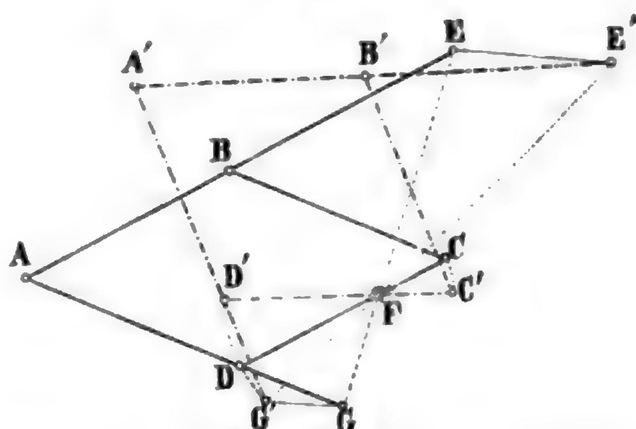


Fig. 300.



welche ihren Ort nicht ändert; der Stift E wird auf dem Original herumgeführt und der Stift G dient zum Nachzeichnen.

Von einer solchen Vorrichtung lässt sich leicht beweisen: erstens, dass der Stift G eine Figur beschreibt, welche der vom Stifte E durchlaufenen ähnlich ist, und zweitens, dass sich die homologen Seiten beider Figuren wie die Abstände der Axe F von den Stiften E und G verhalten.

Denn es verhält sich in den ähnlichen Dreiecken A E G und D F G:

$$AE : DF = EG : FG = AG : DG;$$

und wenn man die erste Figur in die zweite Lage (Fig. 300) versetzt, in den ähnlichen Dreiecken A′ E′ G′ und D′ F G′:

$$A'E' : D'F = E'G' : FG' = A'G' : D'G'.$$

Weil nun vermöge der Construction D′ F = D F und A′ E′ = A E, so folgt

$$EG : FG = E'G' : FG' \text{ oder } EF : FG = E'F : FG',$$

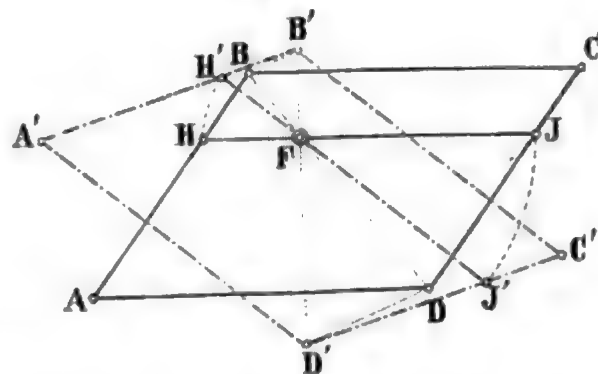
d. h. das Dreieck F G G′ ist dem Dreiecke F E E′ ähnlich und der vom Stifte G durchlaufene Weg G G′ verhält sich zu dem Wege E E′ des Stifts E wie F G zu F E. Was aber von diesen zwei Dreiecken gilt, ist von

allen wahr, in die sich die von den Stiften E und G beschriebenen Figuren von dem Punkte F aus zerlegen lassen; folglich ist auch bewiesen, was behauptet wurde.

Nennt man die constanten Längen A D und A E beziehlich p und q, die veränderlichen Grössen D G und D F beziehlich x und y, und setzt das Verhältniss der Abstände F G : F E = u : v, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke A E G und D F G (Fig. 299):

$$x = \frac{u}{v}\,p \text{ und } y = \frac{u}{u+v}\,q. \tag{382}$$

Ertheilt man den Grössen p und q die Werthe, welche einem bestimmten Instrumente entsprechen, und nimmt man das Verhältniss von u : v ebenfalls als gegeben an, so kann man die Werthe von x und y berechnen, welche dazu dienen, auf dem Arme A D den Stift G (durch Abzählung von x = D G) und auf dem Arme C D die Axe F (durch Abmessung von y = D F) so festzustellen, dass die mit dem Stifte E umfahrene Figur von F in dem Verhältniss von v : u verkleinert wird. Von der genauen Berechnung und Abmessung der Werthe von x und y kann man überzeugt sein, sobald die Punkte E, F und G in einer Geraden liegen.



Eine Abänderung des in seinen mathematischen Beziehungen eben dargestellten Pantographen besteht darin, dass man die Stifte E und G in die Eckpunkte B und D des Parallelogramms A B C D (Fig. 299) und die Axe F in die Diagonale B D verlegt, wie die beigedruckte Fig. 301) zeigt, in der die accentuirten Buchstaben die aus der Drehung um die Axe F entstandene zweite Lage des Parallelogramms A B C D bezeichnen. Soll diese Vorrichtung wie die vorige wirken, so ist nachzuweisen, dass △ D D' F dem △ B B' F ähnlich ist, wenn alle Seiten des Parallelogramms und die Parallele H J gleiche und unveränderliche Längen haben und der Punkt F fortwährend in der Diagonale B D liegt. Man findet aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke A B D und H B F, so wie der Dreiecke A' B' D' und H' B' F, und aus dem Umstande, dass F H' = F H und B' H' = B H ist, sehr einfach die Proportion

$$B D : B F = B' D' : B' F, \text{ und hieraus } D F : B F = D' F : B' F;$$

und damit ist bewiesen, was zu beweisen war.

Setzt man D J = y', D F = x', H B = u, B F = v und A B = A D = p, so hat man zur Berechnung der Werthe, welche die Lage der Axe F bestimmen, wenn p, u, v gegeben sind, die Gleichungen:

$$H B : D J = B F : D F \text{ oder } p - y' : y' = v : u, \text{ woraus}$$

$$y' = \frac{u}{u+v}\,p. \tag{383}$$

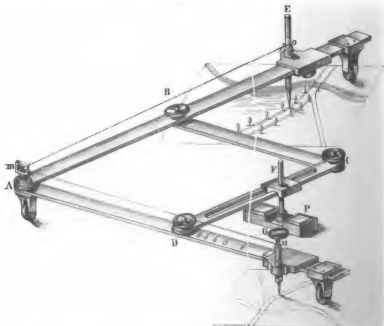
Da ferner nach der Fig. 299 die Proportion stattfindet:

$$D J : J C = D F : B F = u : v \qquad (384)$$

so ist es hier gleichgültig, ob man sagt: der Stift D verkleinert im Verhältniss der Abstände der Stifte von der Axe F, oder im Verhältniss des Abstands der Linie H J von den parallelen Seiten A D und B C.

Die Fig. 302 stellt einen Storchschnabel vor, dem die in Fig. 299 angedeutete ältere Anordnung zu Grunde liegt. Das verschiebbare Parallelogramm ist auch hier mit A B C D, der auf der Originalzeichnung herumzuführende Fahrstift mit E, der Zeichenstift mit G, und endlich die verticale

Fig. 302.



Axe, um welche sich das Instrument während der Arbeit dreht, mit F bezeichnet. Die zwei Lineale A B, A D bewegen sich an ihren Enden auf Rollen von Bein, während das dritte C D geschlitzt ist und dadurch gestattet, die Axe F mittels eines Schiebers so zu verstellen, dass sie in die durch die Stifte E und F bestimmte Gerade kommt. Mit ihrem unteren Theile ist die Axe F in ein eben bearbeitetes Stück Blei P, das in Folge seines Gewichts und dreier sehr feiner kurzen Spitzen während der Arbeit auf dem Zeichentische unverrückt liegen bleibt, eingelassen. Die Stifte E und F lassen sich, wie man sieht, auf den Linealen A B und A D ebenfalls mittels Schiebern verstellen: wenn sie die richtige Lage haben, so werden

sie wie der Schieber für F mittels Druckschrauben an den Linealen festgehalten. Um die in den Gleichungen (382) dargestellten Werthe von x und y von D aus auf den Linealen A D und C D abmessen zu können, sind auf denselben entsprechende Theilungen angebracht, deren Einrichtung durch die beigefügten Zahlen von selbst klar ist. Durch die Linien m n, m o ist ein Faden angedeutet, der sich bei n um die Röhre, welche den Zeichenstift trägt, schlingt, bei m durch den Kopf des Zapfens A geht und bei o von dem Zeichner gehalten wird. Dieser Faden hat den Zweck, durch Anziehen den Zeichenstift G dann zu heben, wenn der Fahrstift E beim Versetzen von einem Punkte zum anderen eine Linie beschreibt, die nicht nachgezeichnet werden soll.

§. 242. **Gebrauch des Pantographen.** Der Gebrauch des Pantographen ist im Wesentlichen schon in seiner Theorie und Beschreibung enthalten; zur vollständigen Erläuterung desselben fügen wir aber noch einige Bemerkungen bei. Zum Nachzeichnen ist ein Tisch mit ganz ebener Platte oder ein Reissbrett nöthig, worauf Original und Copie hinreichend Raum finden. Um dem Papiere der letzteren gegen das bereits festgelegte Original die richtige Lage zu geben, ist es gut, dieses mit einem Rechtecke zu umgeben, dessen homologe Seiten in dem Verhältniss der Massstäbe der Copie und des Originals stehen. Verrückt man nun dieses zweite Rechteck so lange, bis nacheinander drei Eckpunkte desselben vom Zeichenstifte berührt werden, wenn der Fahrstift auf den gleichnamigen Eckpunkten des Originalrechtecks steht, so wird die Nachzeichnung den gewünschten Platz auf dem Papiere einnehmen. Ist diese Lage gefunden, so befestigt man Original und Copie auf dem Zeichentische, so dass während der Abzeichnung nicht die mindeste Verrückung desselben stattfindet. Der Zeichenstift muss genau centrisch gespitzt sein, wenn er richtig zeichnen soll. Ob er es ist, erfährt man durch Drehung der Röhre, welche ihn hält: deckt hierbei die Spitze immer einen und denselben Punkt, so ist sie centrisch. Während des Abzeichnens sieht man manchmal nach, ob sich die Lage des Originals und der Copie gegen die Axe des Instruments nicht geändert haben: es hat keine Aenderung stattgefunden, wenn, wie beim Anfange der Arbeit, die beiden Stifte je zwei gleichnamige Eckpunkte der auf dem Originale und der Copie befindlichen Hilfsrechtecke gleichzeitig decken. Ist das Original so gross, dass es nicht auf einmal copirt werden kann, so geschieht dieses in Abtheilungen, wobei aber sehr darauf zu achten ist, dass die Copie bei jeder Abtheilung richtig verschoben wird. Am zweckmässigsten ist es wohl, diese Verschiebung nach Richtungslinien vorzunehmen, welche man vor Anfang des Copirens in das Original- und Zeichenblatt, unter Berücksichtigung des Reductionsverhältnisses, auf's Genaueste eingezeichnet hat.

Anhang.

Tafeln über verschiedene Gegenstände der Vermessungskunde.

Einrichtung und Gebrauch.

Tafel Nr. I

gibt verschiedene oft gebrauchte Grössen der Erdgestalt. Sie ist nach den in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 enthaltenen „Tafeln für die Gestalt der Erde nach Bessel's Bestimmungen" zusammengestellt, und bedarf hinsichtlich ihrer Einrichtung und ihres Gebrauchs wohl nur der Bemerkung, dass, wenn man die Grösse des Halbmessers eines Parallelkreises aus der in der Tafel enthaltenen Länge eines Grads in Toisen finden will, diese Länge lediglich zu multipliciren ist mit der Zahl

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}2957795, \text{ deren } \log = 1{,}7581226.$$

Wegen der Formeln zur Berechnung dieser Tafel auf das genannte Jahrbuch (S. 318—342) verweisend, fügen wir noch einige Zahlen bei, welche als eine Ergänzung der Tafel I anzusehen sind.

Bezeichnet a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe und e die Excentricität eines elliptischen Erdmeridians, so ist

$$\begin{aligned} a &= 3\,272\,077^{t},140 & \log a^{t} &= 6{,}5148235 \\ &= 6\,377\,397^{m},156 & \log a^{m} &= 6{,}8046435 \\ b &= 3\,261\,139^{t},328 & \log b^{t} &= 6{,}5133693 \\ &= 6\,356\,078^{m},963 & \log b^{m} &= 6{,}8031893 \\ e &= \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}} & \log e &= 8{,}9122052. \end{aligned}$$

Nach diesen Bestimmungen ist die Länge einer geographischen Meile, wovon 15 auf einen Grad des Aequators gehen, = 3807,23463 Toisen (log = 3,5806096) = 7420,43854 Meter (log = 3,8704296); ferner die Oberfläche der ganzen Erde = 9 261 238,3 geographischen Quadratmeilen, und der Rauminhalt des ganzen Erdkörpers = 2 650 184 445 geographischen Cubikmeilen.

Tafel Nr. II

dient zur Reduction der mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser gemessenen schiefen Längen auf den Horizont. Die Theorie zur Berechnung derselben ist in §. 199, Bd. I enthalten, und die zu Grunde gelegten Constanten beziehen sich auf die Reichenbach'schen Distanzmesser, welche Ertel und Sohn in München für Messtisch-Aufnahmen liefern. Für andere Fernrohre und Latten würden sich die Constanten und damit auch die Reductionsgrössen ändern.

Da es nicht gleichgültig ist, ob die zu reducirende Linie über oder unter dem Horizont des Instruments liegt, so zerfällt die Tafel in zwei Abtheilungen, wovon die erste, mit „Erhebung des Rohrs" bezeichnet, die Reductionen für beobachtete Höhen- oder Elevationswinkel, die zweite mit der Ueberschrift „Senkung des Rohrs" die Reductionen für Tiefen- oder Depressionswinkel liefert. Bei dem Gebrauche der entsprechenden Abtheilung der Tafel sucht man die abgelesene schiefe Länge oder eine ihr nahestehende in der obersten Horizontalreihe, den Neigungswinkel oder seinen Nachbarwerth in der ersten Verticalreihe auf und zieht von beiden Reihen aus beziehungsweise ab- und seitwärts senkrechte Linien, bis sie sich begegnen: an dieser Stelle steht die Länge, welche von der Ablesung abzuziehen ist.

Ist z. B. bei einem Höhenwinkel von 14° 36′ eine Ablesung von 438′,5 gemacht worden, so benützt man in der Abtheilung 1 die Verticalreihe 14° 30′ und die Horizontalreihe 450′: beide zusammen geben die Reductionsgrösse 12′,8 und somit beträgt die reducirte Länge 438,5 — 12,8 = 425,7 Fuss. Würde dieselbe Ablesung auf der Latte bei einem Tiefenwinkel von 14° 36′ gemacht worden sein, so lieferte die Abtheilung 2 als Reductionsgrösse 16′,1 und die reducirte Länge wäre = 438,5 — 16,1 = 422,4 Fuss.

Die Tafel Nr. II ist für jedes bestimmte Fussmass zu benützen, wenn das Distanzfernrohr und die Distanzlatte dafür eingerichtet sind. Diese Einrichtung erfordert nur, dass die in §. 199, Bd. I, mit c, d, l bezeichneten Constanten ihre Werthe auch in dem neuen Masse behalten, und wird von der Ertel'schen Werkstätte auf Verlangen besorgt.

Tafel Nr. III

gibt die Reductionen für den Ertel'schen und jeden Reichenbach'schen Distanzmesser, welchem die in §. 204, Bd. I besprochenen Constanten zukommen. Einrichtung und Gebrauch stimmen ganz und gar mit denen der vorhergehenden Tafel überein, sowie auch die für jene Tafel gemachte Schlussbemerkung hier gültig ist.

Tafel Nr. IV

gehört wie die beiden nächsten zum Gebrauche des zum Distanzmessen eingerichteten Nivellirinstruments von Stampfer und Starke. Nach der in §. 210, Bd. I enthaltenen Theorie, worauf die Berechnung beruht, liefert diese

der „Anleitung zum Nivelliren“ von Stampfer entnommene Tafel den Werth des ersten Glieds in dem Ausdrucke Nr. 163 für die Horizontalprojection der gemessenen schiefen Länge, nämlich den Werth von

$$\frac{324}{o-u} \text{ von } \frac{1}{100} \text{ zu } \frac{1}{100} \text{ Schraubengang.}$$

Sind die Schraubengänge bis auf $\frac{1}{1000}$ abgelesen worden, so findet man den Werth des genannten ersten Glieds mit Hilfe der „Proportionaltheile,“ welche hinter der „Distanz“ stehen. Diese Proportionaltheile sind so gestellt, dass sie mit den Endziffern der ersten Spalte (o — u) correspondiren. So steht z. B. der Proportionaltheil für 0,003 in jener Zeile, worin der genäherte Werth von o — u die Endziffer 3 hat, und beträgt, wenn o — u = 1,03 ist, 0,88; wenn o — u = 1,13 ist, 0,74 u. s. w. Diese Proportionaltheile müssen stets von der in der zweiten Spalte aufgesuchten Distanz abgezogen werden, da die Entfernung abnimmt, wenn die Differenz o — u wächst.

Wenn o — u = 2,784 gefunden worden; was ist der Werth von 324 : (o — u)?

Zunächst ist für 2,78 die Distanz . .	= 116,55
Alsdann für 0,004 der Proportionaltheil	= 0,17
Daher der gesuchte Werth	= 116,38.

Mit dieser Zahl ist die in der Formel (163) enthaltene Grösse d zu multipliciren, wenn die Entfernung e in Ruthen, Klaftern, Fussen u. s. w. ausgedrückt werden soll. Stehen die beiden Scheiben der Distanzlatte genau 1 Klafter von einander ab, so ist d = 1 Klafter und daher in dem vorstehenden Falle e = 116,38 Klafter. Betrüge der Abstand der Scheiben 10 preuss. Fuss oder 1 preuss. Ruthe, so wäre d = 1 Ruthe und daher e = 116,38 preuss. Ruthen. Hätte man aber die Scheiben 7 Fuss bayerisch auseinander gestellt, so wäre d = 7′ bayer. und e = 7 × 116,38 = 814,66 bayer. Fuss.

Die Werthe 1 und 10 für o — u, welche in der Tafel enthalten sind, werden zwar selten überschritten werden; sollte aber o — u kleiner als 1 werden, so suche man die Distanz für den zehnfach grösseren Werth von o — u und nehme dieselbe zehnmal grösser; wird o — u grösser als 10, so verfahre man entgegengesetzt. Ist z. B. o — u = 0,943, so findet man für 9,43 die Distanz = 34,36; es entspricht also 0,943 der Werth 343,6. Wäre o — u = 12,34, so hätte man für 1,234 die Distanz = 262,59 und daher für 12,34 die Entfernung = 26,259.

Tafel Nr. V

enthält die Verbesserung der Distanz, welche wegen des veränderlichen Werths der Schraubengänge oder desshalb nöthig wird, weil die Grösse k von dem Mittelwerthe 324, nach welchem die Tafel Nr. IV berechnet ist, mehr oder weniger abweicht. In Gl. (163) ist die genannte Verbesserung durch den Ausdruck

$$\frac{0{,}0356\,(o + u - 2m)}{o - u}$$

gegeben, wobei m nach Gl. (164) bestimmt wird; in der Tafel kommen die Glieder (o — u) und (o + u — 2m) ebenfalls vor.

Will man nun für einen gegebenen Werth von (o — u) den Werth des obigen Ausdrucks in Tafel Nr. V finden, so berechnet man erst (o + u — 2 m), sucht diesen Werth in der obersten Horizontalreihe und (o — u) in der ersten Verticalreihe auf und fährt ab- und seitwärts bis zum Schnittpunkte der Zeilen, wo sich die gesuchte Correction findet, welche mit (o + u — 2 m) zugleich positiv oder negativ ist. Wenn sich der berechnete Werth von (o + u — 2m) oder der gegebene von (o — u) nicht genau in der Tafel findet, was häufig der Fall sein wird, so genügt es die nächstliegenden Werthe der Tafel dafür zu nehmen. Und sollte (o — u) kleiner als 1 oder grösser als 10 sein, so verfährt man nach dem Schlusse der zu Tafel Nr. IV gegebenen Anweisung.

Tafel Nr. VI

gibt die Reduction der nach beiden vorhergehenden Tafeln bestimmten Entfernung auf den Horizont oder das letzte Glied

$$-\frac{0{,}0031\,(h - u)^2}{o - u}$$

der Formel Nr. 163. Sie wird in derselben Weise wie Tafel Nr. V gebraucht. Die gefundene Reduction ist stets abzuziehen; in den meisten Fällen ist sie aber so gering, dass sie vernachlässigt werden kann. Sollte (h — u) grösser als 22 sein, so suche man zu $\frac{1}{2}$ (h — u) die Reduction, multiplicire diese mit 4 und sehe das Product als die zu (h — u) gehörige Reduction an.

Beispiel. Wenn d = 1 Klafter, m = 28,1 gegeben und
h = 23,937   o = 18,200   u = 16,757
beobachtet worden sind; wie gross ist die horizontale Entfernung der Latte vom Instrumente?

Mit o — u = 1,523 liefert Tafel Nr. IV:	212,76
mit o + u — 2m = — 21,2 Tafel Nr. V:	— 0,47
und mit h — u = 7,2 gibt Tafel Nr. VI:	— 0,11
Daher die gesuchte Entfernung =	212,18 Klafter.

Tafel Nr. VII

enthält die von Delcros nach der Formel von Schleiermacher berechneten und in Poggendorff's Annalen (Bd. 60, S. 377) sowie in Marbach's physik. Lexikon (Bd. 1, S. 739) zusammengestellten Werthe der Capillardepressionen des Quecksilbers in Barometerröhren, und man findet die zu einer gegebenen Röhrenweite und Kuppenhöhe gehörige Depression, indem man die Hälfte der ersteren, d. h. den Halbmesser der Röhre in der ersten Verticalspalte und die Höhe der Quecksilberkuppe in der obersten Horizontal-

reihe aufsucht, und von diesen beiden Stellen aus wagrecht und lothrecht fortgeht, bis sich die betreffenden Spalten schneiden. An dem Schnittpunkte steht die gesuchte Depression in Millimetern.

Tafel Nr. VIII

oder die 1. hypsometrische Tafel gibt den zu (T + t) gehörigen Werth $A = \log k + \log [1{,}0025 + 0{,}0000057\ (T + t)] + \log [1 + 0{,}0029\ (T + t)]$ sowohl für k = 18404,9 Meter als für k = 56660 Pariser Fuss. Der letztere Werth ist mit A' bezeichnet. Für Bruchtheile der Temperaturgrade findet man den zugehörigen Werth von A oder A' durch einfache Interpolation.

Tafel Nr. IX

oder die 2. hypsometrische Tafel gibt für jede geographische Breite ψ der Beobachtungsstationen die Correction wegen der Veränderlichkeit der Schwere oder $\log G = \log (1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)$. Diese Correction ist für $\psi = 45^0$ null, für Breiten unter 45^0 positiv, und für Breiten über 45^0 negativ. Hiernach versteht sich der Gebrauch dieser Tafel von selbst.

Tafel Nr. X

oder die 3. hypsometrische Tafel gibt den Werth von $\log Z = \log (1 + (22 + h) : r)$ in der Art, dass man mit dem aus A + log u zusammengesetzten Werthe von log h in die erste Verticalspalte eingeht, wenn die Höhe h in Metern, und in die letzte, wenn h in Pariser Fuss gesucht wird, hierauf die zugehörige Horizontalreihe durchführt bis an die Verticalreihe, deren Kopf die beiläufige Meereshöhe z der unteren Station enthält, und die daselbst stehende Zahl als Einheiten der fünften Stelle des gesuchten Logarithmus ansieht. Für $z = 390^m$ und $A + \log u = 3{,}54275$ ist $\log Z = 0{,}00027$; aber für $z = 390^m$ und $A' + \log u = 3{,}54275$ wird $\log Z = 0{,}00012$.

Tafel Nr. XI

oder die 4. hypsometrische Tafel gibt die Maximalspannungen des in der Luft vorkommenden Wasserdampfs und zwar in der Abtheilung A für Réaumur'sche Grade der Lufttemperatur in Pariser Linien, und in der Abtheilung B für Centigrade in Millimetern Quecksilberdruck. Für Bruchtheile von Graden wird der entsprechende Druck durch einfaches Interpoliren gefunden. (Vergl. die Schlussbemerkung zu Tafel XIII).

Tafel Nr. XII

oder die 5. hypsometrische Tafel gibt das zweite Glied des Ausdrucks zur Berechnung des wirklichen Dampfdrucks der Atmosphäre nach der Formel: $\sigma = \sigma' - \mu\,(t - t')\,b$, und zwar in der Abtheilung A in Pariser Linien, wenn der Barometerstand b in derselben Masseinheit und die psychrometrische Differenz t — t' in Réaumur'schen Graden gegeben ist,

und in der Abtheilung B in Millimetern Quecksilberdruck, wenn der Barometerstand in Millimetern und die psychrometrische Differenz in Centigraden bekannt ist. Diese und die vorige Tafel liefern zusammen die Spannung σ.

Tafel Nr. XIII

oder die 6. hypsometrische Tafel gibt den $\log F = \log\ (1 + {}^3/_8\ \varphi)$, wenn man den mittleren Barometerstand b der beiden Stationen und den mittleren Dampfdruck σ kennt. Ist b und σ in Linien gegeben, so benützt man die Abtheilung A; hat man aber b und σ in Millimetern, so findet sich log F in der Abtheilung B. Wenn in der obersten Horizontalreihe der 5. und 6. hypsometrischen Tafel beziehungsweise nur ganze Grade und Linien (oder Millimeter) stehen, während man die Werthe von μ (t — t') b und $\log\ (1 + {}^3/_8\ \varphi)$ auch für Bruchtheile von Graden und Linien (oder Millimetern) sucht, so ist zu bemerken, dass in dem vorliegenden Falle die gesuchten Werthe den Temperaturen und Dampfspannungen proportional sind, also für Zehntel- und Hundertel-Grade und Linien (oder Millimeter) leicht durch Division mit 10 oder 100 gefunden werden können. So ist z. B. für $t - t' = 6^0{,}54$ R. und $b = 310'''$ nach Abtheilung A der 5. Tafel: $\mu\ (t - t')\ b = 1{,}860 + 0{,}155 + 0{,}012 = 2''',027$ und für $\sigma = 10''',51$ und $b = 275'''$ nach Abtheilung A der 6. Tafel:

$$\log\ (1 + {}^3/_8\ \varphi) = 0{,}00592 + 0{,}000296 + 0{,}0000059 = 0{,}00622.$$

Statt der Tafeln XI, XII, XIII kann man sich der in Bd. II, §. 161, Seite 337 mitgetheilten Ersatztafel (IV) in dem Falle bedienen, wo die Feuchtigkeit der Luft gar nicht beobachtet worden ist.

Tafel Nr. XIV

enthält die Werthe von $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ und $\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$, deren man bedarf, um aus den am Stromquadranten beobachteten Ablenkungswinkeln α die Geschwindigkeit des Wassers nach der Formel $v = k \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ zu berechnen. Da k für jedes Instrument einen anderen Werth hat, so konnte hier nicht mehr als der Factor $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ und dessen Logarithmus gegeben werden.

Tafel Nr. XV

dient zur Berechnung der Geschwindigkeiten der Flüsse, wenn mit dem Reichenbach'schen Strommesser oder der Darcy'schen Röhre die Grösse h' beobachtet und für das Instrument die Constante k bekannt ist. Nimmt man aus der Tafel den Werth von $\sqrt{h'}$ und multiplicirt ihn mit k, so ist die zu h' gehörige Geschwindigkeit gefunden. Wir haben die Tabelle nur bis zu Erhebungs-Unterschieden $h' = 1$ Fuss fortgesetzt, weil diese schon Geschwindigkeiten von mehr als 8 Fuss entsprechen, der Reichenbach'sche Strommesser aber und die Darcy'sche Röhre zur Messung grosser Geschwindigkeiten wenig geeignet sind.

Tafel Nr. XVI

dient zur Absteckung von Kreisbögen und enthält die Ordinaten für gegebene Abscissen. Sie ist nach der Gleichung $y = r - \sqrt{(r + x)(r - x)}$ berechnet. Für Kreise bis zu 450′ Halbmesser wachsen die auf den Tangenten von den Berührungspunkten aus gezählten Abscissen von 10 zu 10, für Kreise zwischen 500 und 950′ Halbmesser von 25 zu 25, und für Kreise von 1000 bis 10000′ Halbmesser von 50 zu 50 Fuss. Der Gebrauch dieser Tafel für eine andere Längeneinheit als Fuss bedarf wohl keiner Erläuterung.

Tafel Nr. XVII

setzt abgesteckte Kreisbögen, deren Längen entweder 50 oder 100 Längeneinheiten betragen, voraus, und dient alsdann zur Absteckung von Zwischenpunkten dieser Bögen. Soll in der Mitte der Sehne eine senkrechte Ordinate abgesteckt werden, so findet man deren Werth in der Spalte, welche mit „Ordinate zu ½ b“ überschrieben ist; und braucht man die Ordinate im ersten oder dritten Viertel der Sehne, so liefert die Spalte „Ordinate zu ¼ b“ die gesuchte Ordinate. Die Längeneinheit der Bögen, Sehnen, Halbmesser und Ordinaten kann selbstverständlich jede beliebige sein.

Tafel Nr. XVIII

ist nach der in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von Gauss befindlichen Tafel zusammengestellt und enthält die einander entsprechenden geographischen Breiten auf dem Erdellipsoid und der dafür substituirten Kugelfläche. Da es häufiger vorkommt, dass die Breite auf der Kugel gegeben und die für das Sphäroid gesucht wird, als umgekehrt, so bildet jene Breite das Argument der Tafel. Gauss lässt dieses innerhalb 12 Graden von Minute zu Minute wachsen und gibt die Secunden der Breiten des Ellipsoids auf 5 Decimalstellen genau an, um die Tafel „für die allerschärfste Berechnung einer trigonometrischen Vermessung, nämlich für eine Durchführung derselben mit zehnzifferigen Logarithmen vollkommen zureichend“ zu machen; für unsere Zwecke genügt es jedoch, das Argument von 2 zu 2 Minuten fortschreiten zu lassen und die Secunde der elliptischen Breiten auf 2 Decimalstellen genau anzugeben. Die in der Tafel nicht vorkommenden Breiten lassen sich mit hinreichender Genauigkeit aus den Differenzen je zweier Nachbarwerthe berechnen. Denn gesetzt, man wolle die elliptische Breite φ' finden, welche der Kugelbreite $\varphi = 49^0 25' 10''$ entspricht, so liefert die Tafel für $29^0 24'$ eine elliptische Breite von $49^0 25' 44'',74$ und für $49^0 26'$ eine elliptische Breite von $49^0 27' 44'',96$; die Differenz für 2 Minuten Kugelbreite beträgt also $2' 0'',22$ elliptische Breite und folglich genau genug $1' 10'',13$ elliptische Breite für $1' 10''$ Kugelbreite. Es ist somit $\varphi' = 49^0 25' 44'',74 + 1' 10'',13 = 49^0 26' 54'',87$.

Tafel Nr. XIX

gibt die mittleren Werthe der astronomischen Refraction für alle Höhenwinkel zwischen 0 und 90°. Diese Werthe bedürften noch Correctionen wegen der Temperatur und des Barometerstands, wofür es ebenfalls nach Bessel's Bestimmungen entworfene Tafeln gibt. (Besonders zu empfehlen: Wolf, Handbuch der Mathematik etc. Bd. II, Seite 401). Da aber diese Correctionen nur unbedeutende Grössen sind, und die geodätischen Aufgaben, welche in diesem Buche vorkommen und die Berücksichtigung der astronomischen Refraction erfordern, nur angenäherte Resultate liefern sollen, so unterblieb die Mittheilung der Correctionstafeln. Die Berechnung der mittleren Refraction für andere als in der Tabelle vorkommende Höhenwinkel geschieht mit Hilfe der Proportionaltheile.

Tafel Nr. XX

ist eigentlich schon in der ersten Tafel enthalten, indem dort die Längen der Parallelgrade in Toisen angegeben sind. Wenn nun hier dieselben Längen in geographischen Meilen, wovon 15 auf einen Grad des Aequators gehen, ausgedrückt werden, so hat dieses lediglich darin seinen Grund, dass man bei Kartenzeichnungen gewöhnlich die geographische Meile (3807,2346 Toisen) als Längeneinheit des Massstabs wählt und daher die Reductionen der in Toisen ausgedrückten Längen auf Meilen erspart.

Tafel Nr. XXI

dient zur Zeichnung der Parallelkreise auf Karten, die nach der conischen Projection von Bonne oder de l'Isle (Mercator) entworfen werden. Diese Parallele erscheinen als Kreise, die ihre Mittelpunkte auf der verlängerten Erdaxe haben und deren Halbmesser R sich nach der Gleichung $R = r \cot \varphi$ bestimmt, in welcher r den Halbmesser der Erdkugel und φ die geographische Breite des Parallels bezeichnet. Der Berechnung der Tafel liegt der Werth $r = 857{,}43$ geographische Meilen zu Grunde.

Tafel Nr. XXII

enthält Vorschriften über Gattung und Grösse der Schrift zur Bezeichnung einzelner Objecte auf Karten und Plänen von verschiedenen Massstäben. Die Höhen können in Duodecimallinien jedes deutschen Fussmasses angewendet und durch Multiplication mit 2 (hier hinreichend genau) in Millimeter verwandelt werden:

Die Abkürzungen in der Tafel bedeuten:

S. C: stehende Capitalschrift (grosse römische stehende Schrift);
L. C: liegende Capitalschrift (grosse römische liegende Schrift);
S. R: stehende Rotondschrift (kleine römische stehende Schrift);
T. C: topographische Cursivschrift.

Tafel Nr. I.

Längen der Erdmeridiane und Parallelkreise.

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen (Toise du Pérou bei 13° R.).			
0°		56727,356	57108,519	57108,519	0,000
	30′	727,399	108,534	106,359	28363,685
1°		56727,529	57108,578	57099,880	56727,414
	30′	727,745	108,650	089,080	85091,229
2°		56728,048	57108,752	57073,963	113455,173
	30′	728,437	108,882	054,527	141819,291
3°		56728,912	57109,041	57030,776	170183,624
	30′	729,473	109,230	002,710	198548,217
4°		56730,120	57109,447	56970,331	226913,111
	30′	730,852	109,693	933,643	255278,350
5°		56731,670	57109,967	56892,646	283643,977
	30′	732,574	110,270	847,346	312010,035
6°		56733,562	57110,602	56797,744	340376,565
	30′	734,635	110,962	743,844	368743,611
7°		56735,792	57111,350	56685,651	397111,214
	30′	737,033	111,767	623,168	425479,417
8°		56738,358	57112,211	56556,399	453848,261
	30′	739,766	112,684	485,350	482217,789
9°		56741,257	57113,184	56410,026	510588,041
	30′	742,830	113,712	330,432	538959,060
10°		56744,485	57114,267	56246,573	567330,885
	30′	746,222	114,850	158,456	595703,558
11°		56748,039	57115,459	56066,088	624077,120
	30′	749,937	116,096	55969,474	652451,611
12°		56751,915	57116,760	55868,621	680827,071
	30′	753,972	117,450	763,538	709203,539
13°		56756,107	57118,166	55654,231	737581,056
	30′	758,320	118,908	540,708	765959,659
14°		56760,611	57119,677	55422,978	794339,389
	30′	762,978	120,471	301,049	822720,283
15°		56765,421	57121,290	55174,930	851102,380
	30′	767,940	122,135	044,629	879485,717
16°		56770,532	57123,005	54910,156	907870,332
	30′	773,199	123,899	771,522	936256,262
17°		56775,938	57124,818	54628,735	964643,543
	30′	778,749	125,760	481,806	993032,211
18°		56781,632	57126,727	54330,746	1021422,304
	30′	784,84	127,717	175,566	1049813,855

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen.			
19°		56787,607	57128,731	54016,276	1078206,900
	30′	790,698	129,767	53852,889	1106601,473
20°		56793,856	57130,826	53685,416	1134997,608
	30′	797,081	131,908	513,869	1163395,340
21°		56800,372	57133,011	53338,261	1191749,700
	30′	803,728	134,136	158,604	1220195,723
22°		56807,147	57135,283	52974,912	1248598,439
	30′	810,629	136,450	787,197	1277002,880
23°		56814,173	57137,638	52595,473	1305409,078
	30′	817,777	138,846	399,755	1333817,063
24°		56821,441	57140,074	52200,055	1362226,865
	30′	825,163	141,322	51996,390	1390638,514
25°		56828,943	57142,589	51788,773	1419052,038
	30′	832,779	143,875	577,220	1447467,466
26°		56836,670	57145,179	51361,746	1475884,826
	30′	840,614	146,501	142,367	1504304,145
27°		56844,612	57147,840	50919,099	1532725,449
	30′	848,661	149,197	691,957	1561148,765
28°		56852,760	57150,571	50460,959	1589574,119
	30′	856,908	151,961	226,121	1618001,534
29°		56861,105	57153,367	49987,461	1646431,035
	30′	865,347	154,788	744,995	1674862,646
30°		56869,635	57156,225	49498,743	1703296,390
	30′	873,967	157,676	248,720	1731732,288
31°		56878,341	57159,141	48994,947	1760170,364
	30′	882,757	160,620	737,441	1788610,637
32°		56887,213	57162,113	48476,221	1817053,127
	30′	891,708	163,618	211,307	1845497,856
33°		56896,240	57165,136	47942,717	1873944,841
	30′	900,808	166,666	670,472	1902394,102
34°		56905,410	57168,207	47394,592	1930845,655
	30′	910,046	169,760	115,096	1959299,517
35°		56914,713	57171,322	46832,006	1987755,706
	30′	919,411	172,895	545,341	2016214,235
36°		56924,138	57174,478	46255,124	2044675,121
	30′	928,892	176,070	45961,376	2073138,378
37°		56933,673	57177,670	45664,118	2101604,018
	30′	938,478	179,279	363,372	2130072,055
38°		56943,306	57180,895	45059,160	2158542,500
	30′	948,156	182,518	44751,505	2187015,364
39°		56953,027	57184,148	44440,430	2215490,659
	30′	957,916	185,785	125,957	2243968,394
40°		56962,822	57187,427	43808,110	2272448,578

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen.			
40°	30′	56967,744	57189,074	43486,913	2300931,219
41°		56972,681	57190,726	43162,389	2329416,324
	30′	977,631	192,382	42834,561	2357903,902
42°		56982,591	57194,041	42503,456	2386393,957
	30′	987,562	195,704	169,097	2414886,495
43°		56992,541	57197,370	41831,508	2443381,520
	30′	997,527	199,038	41490,716	2471879,037
44°		57002,518	57200,708	41146,746	2500379,048
	30′	007,513	202,378	40799,622	2528881,555
45°		57012,510	57204,050	449,371	2557386,561
	30′	017,508	205,721	40096,020	2585894,065
46°		57022,505	57207,392	39739,594	2614404,068
	30′	027,499	209,062	380,120	2642916,570
47°		57032,490	57210,731	39017,625	2671431,567
	30′	037,476	212,398	38652,136	2699949,059
48°		57042,454	57214,063	28283,681	2728469,042
	30′	047,425	215,725	37912,286	2756991,512
49°		57052,385	57217,383	37537,981	2785516,465
	30′	057,334	219,037	160,792	2814043,895
50°		57062,270	57220,687	36780,749	2842573,796
	30′	067,191	222,332	397,879	2871106,162
51°		57072,097	57223,972	36012,212	2899640,985
	30′	076,985	225,605	35623,777	2928178,256
52°		57081,854	57227,232	35232,602	2956717,966
	30′	086,702	228,853	34838,718	2985260,106
53°		57091,529	57230,466	34442,154	3013804,665
	30′	096,332	232,070	042,940	3042351,631
54°		57101,111	57233,667	33641,105	3070900,993
	30′	105,863	235,255	236,682	3099452,737
55°		57110,587	57236,833	32829,699	3128006,851
	30′	115,282	238,401	420,187	3156563,319
56°		57119,946	57239,959	32008,179	3185122,128
	30′	124,578	241,507	31593,705	3213683,260
57°		57129,176	57243,042	31176,795	3242246,700
	30′	133,740	244,567	30757,483	3270812,431
58°		57138,267	57246,079	30335,800	3299380,434
	30′	142,756	247,578	29911,777	3327950,691
59°		57147,206	57249,064	29485,448	3356523,184
	30′	151,616	250,536	056,843	3385097,891
60°		57155,984	57251,995	28625,997	3413674,793
	30′	160,308	253,439	192,942	3442253,868
61°		57164,588	57254,867	27757,711	3470835,094
	30′	168,822	256,281	320,336	3499418,448

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen.			
62⁰		57173,009	57257,679	26880,852	3528003,908
	30′	177,147	259,060	439,292	3556591,449
63⁰		57181,236	57260,425	25995,689	3585181,047
	30′	185,273	261,773	550,078	3613772,676
64⁰		57189,258	57263,103	25102,492	3642366,311
	30′	193,190	264,415	24652,966	3670961,925
65⁰		57197,067	57265,709	24201,534	3699559,492
	30′	200,888	266,984	23748,231	3728158,983
66⁰		57204,652	57268,240	23293,092	3756760,370
	30′	208,357	269,477	22836,150	3785363,625
67⁰		57212,003	57270,693	22377,443	3813968,718
	30′	215,589	271,890	21917,003	3842575,618
68⁰		57219,113	57273,065	21454,868	3871184,297
	30′	222,574	274,220	20991,072	3899794,721
69⁰		57225,971	57275,354	20525,651	3928406,860
	30′	229,304	276,465	058,641	3957020,681
70⁰		57232,570	57277,555	19590,078	3985636,153
	30′	235,770	278,622	119,997	4014253,240
71⁰		57238,901	57279,667	18648,435	4042871,911
	30′	241,964	280,688	175,429	4071492,130
72⁰		57244,957	57281,687	17701,015	4100113,863
	30′	247,879	282,661	225,228	4128737,075
73⁰		57250,729	57283,612	16748,107	4157361,730
	30′	253,507	284,538	269,688	4185987,792
74⁰		57256,211	57285,440	15790,007	4214615,225
	30′	258,841	286,317	309,102	4243243,991
75⁰		57261,396	57287,169	14827,011	4271874,053
	30′	263,875	287,996	343,769	4300505,374
76⁰		57266,277	57288,797	13859,414	4329137,916
	30′	268,602	289,573	373,985	4357771,639
77⁰		57270,849	57290,322	12887,518	4386406,505
	30′	273,017	291,045	400,052	4415042,474
78⁰		57275,105	57291,741	11911,623	4443679,508
	30′	277,113	292,410	11422,270	4472317,566
79⁰		57279,041	57293,053	10932,030	4500956,608
	30′	280,887	293,669	440,942	4529596,593
80⁰		57282,651	57294,257	9949,043	4558237,481
	30′	284,332	294,817	9456,372	4586879,230
81⁰		57285,931	57295,350	8962,967	4615521,799
	30′	287,445	295,855	468,867	4644165,147
82⁰		57288,876	57296,332	7974,108	4672809,231
	30′	290,223	296,781	478,731	4701454,009
83⁰		57291,484	57297,202	6982,772	4730099,440

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen.			
83°	30′	57292,661	57297,594	6486,272	4758745,479
84°		57293,751	57297,957	5989,267	4787392,086
	30′	294,756	298,292	491,798	4816039,216
85°		57296,674	57298,598	4993,902	4844686,827
	30′	296,506	298,876	495,618	4873334,876
86°		57297,251	57299,124	3996,985	4901938,318
	30′	297,908	299,343	498,041	4930632,112
87°		57298,479	57299,533	2998,826	4959281,212
	30′	298,962	299,694	499,378	4987930,576
88°		57299,357	57299,826	1999,735	5016580,159
	30′	299,665	299,929	499,937	5045229,918
89°		57299,885	57300,002	1000,023	5073879,809
	30′	300,017	300,046	500,031	5102529,788
90°		57300,061	57300,061	0,000	5131179,811

Tafel Nr. II.

Reductionen für den Reichenbach'schen Distanzmesser.

1. Erhebung des Rohrs.

Höhenwinkel.		50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Höhenwinkel.	
1°		2′,7	1′,1	0′,7	0′,4	0′,3	0′,2	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	1°	
	30′	2,6	1,1	0,6	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1		30′
2°		2,5	1,0	0,6	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2°	
	30′	2,4	1,0	0,5	0,3	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3		30′
3°		2,4	0,9	0,5	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	3°	
	30′	2,4	0,9	0,5	0,4	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7		30′
4°		2,3	0,9	0,5	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	4°	
	30′	2,2	0,8	0,5	0,5	0,5	0,6	0,7	0,9	1,0	1,2		30′
5°		2,1	0,8	0,6	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	5°	
	30′	2,1	0,8	0,6	0,6	0,7	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8		30′
6°		2,0	0,8	0,7	0,7	0,9	1,1	1,4	1,6	1,9	2,2	6°	
	30′	2,0	0,9	0,7	0,8	1,1	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6		30′
7°		2,0	0,9	0,8	0,9	1,3	1,6	1,9	2,3	2,7	3,1	7°	
	30′	2,0	0,9	0,9	1,1	1,5	1,8	2,3	2,7	3,1	3,6		30′
8°		1,9	1,0	1,0	1,3	1,7	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	8°	
	30′	1,9	1,0	1,1	1,5	1,9	2,4	3,0	3,5	4,1	4,7		30′
9°		1,9	1,1	1,2	1,7	2,2	2,8	3,4	4,0	4,6	5,3	9°	
	30′	1,9	1,1	1,3	1.9	2,5	3,1	3,8	4,5	5,2	5,9		30′

Höhen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Höhen-winkel.
10°	1′,9	1′,1	1′,5	2′,1	2′,8	3′,5	4′,3	5′,0	5′,8	6′,6	10°
30′	1,9	1,2	1,7	2,3	3,1	3,9	4,8	5,6	6,5	7,3	30′
11°	1,9	1,3	1,9	2,6	3,4	4,3	5,3	6,2	7,2	8,1	11°
30′	1,9	1,4	2,0	2,9	3,8	4,8	5,8	6,8	7,9	8,9	30′
12°	1,9	1,5	2,2	3,1	4,2	5,2	6,3	7,5	8,6	9,7	12°
30′	1,9	1,6	2,4	3,4	4,6	5,7	6,9	8,1	9,4	10,5	30′
13°	1,9	1,7	2,6	3,7	5,0	6,2	7,5	8,7	10,2	11,5	13°
30′	1,9	1,8	2,8	4,1	5,4	6,8	8,2	9,6	11,0	12,5	30′
14°	2,0	2,0	3,0	4,4	5,8	7,3	8,8	10,4	11,8	13,5	14°
30′	2,0	2,1	3,3	4,8	6,3	7,9	9,5	11,2	12,8	14,5	30′
15°	2,0	2,3	3,6	5,1	6,8	8,5	10,2	12,0	13,8	15,5	15°
30′	2,0	2,4	3,8	5,5	7,3	9,1	11,0	12,9	14,8	16,7	30′
16°	2,1	2,6	4,1	5,9	7,8	9,8	11,8	13,8	15,8	17,8	16°
30′	2,1	2,8	4,4	6,4	8,4	10,4	12,5	14,7	16,8	18,9	30′
17°	2,1	2,9	4,7	6,8	8,9	11,1	13,4	15,6	17,9	20,2	17°
30′	2,2	3,0	5,0	7,2	9,5	11,9	14,2	16,6	19,0	21,4	30′
18°	2,2	3,3	5,4	7,7	10,1	12,6	15,1	17,6	20,1	22,6	18°
30′	2,2	3,5	5,7	8,2	10,7	13,3	16,0	18,6	21,3	24,0	30′
19°	2,3	3,7	6,0	8,7	11,3	14,1	16,9	19,7	22,5	25,3	19°
30′	2,4	3,9	6,4	9,2	12,0	14,9	17,8	20,7	23,7	26,7	30′
20°	2,4	4,1	6,7	9,7	12,6	15,7	18,8	21,9	25,0	28,1	20°
30′	2,5	4,3	7,1	10,2	13,3	16,6	19,8	23,0	26,2	29,6	30′
21°	2,6	4,5	7,5	10,7	14,0	17,4	20,8	24,2	27,6	31,1	21°
30′	2,6	4,8	7,9	11,3	14,7	18,3	21,9	25,4	29,1	32,6	30′
22°	2,7	5,0	8,3	11,9	15,5	19,2	23,0	26,7	30,4	34,2	22°
30′	2,8	5,3	8,7	12,5	16,2	20,2	24,0	27,9	31,9	35,8	30′
23°	2,9	5,5	9,2	13,1	17,0	21,1	25,2	29,2	33,3	37,5	23°
30′	3,0	5,8	9,6	13,7	17,8	22,1	26,3	30,6	34,8	39,1	30′
24°	3,1	6,1	10,1	14,3	18,6	23,1	27,5	31,9	36,4	40,8	24°
30′	3,2	6,4	10,6	15,0	19,5	24,1	28,7	33,3	37,9	42,5	30′
25°	3,3	6,7	11,1	15,6	20,3	25,1	29,9	34,7	39,5	44,3	25°
30′	3,4	7,0	11,6	16,3	21,2	26,2	31,1	36,1	41,1	46,1	30′
26°	3,5	7,3	12,1	17,0	22,1	27,3	32,4	37,6	42,8	48,0	26°
30′	3,6	7,6	12,6	17,7	23,0	28,4	33,7	39,1	44,5	49,8	30′
27°	3,7	7,9	13,1	18,4	23,9	29,5	35,0	40,6	46,2	51,8	27°
30′	3,8	8,2	13,6	19,2	24,8	30,6	36,4	42,1	47,9	53,7	30′
28°	3,9	8,5	14,2	19,9	25,8	31,7	37,7	43,7	49,7	55,7	28°
30′	4,1	8,9	14,7	20,7	26,7	32,9	39,1	45,3	51,5	57,7	30′
29°	4,2	9,2	15,3	21,4	27,7	34,1	40,5	46,9	53,4	59,8	29°
30′	4,3	9,6	15,8	22,2	28,7	35,3	42,0	48,6	55,2	61,9	30′
30°	4,4	9,9	16,4	23,0	29,7	36,6	43,4	50,2	57,1	64,0	30°
30′	4,6	10,3	17,0	23,9	30,8	37,8	44,9	51,9	59,1	66,1	30′
31°	4,7	10,7	17,6	24,7	31,8	39,1	46,4	53,7	61,0	68,7	31°
30′	4,9	11,1	18,3	25,5	32,9	40,4	47,9	55,4	63,0	70,6	30′
32°	5,0	11,4	18,9	26,4	34,0	41,8	49,5	57,2	65,0	72,8	32°
30′	5,2	11,8	19,5	27,2	35,1	43,1	51,1	59,0	67,1	75,0	30′

Höhenwinkel.	50'	100'	150'	200'	250'	300'	350'	400'	450'	500'	Höhenwinkel.
33°	5',3	12',2	20',1	28',1	36',2	44',5	52',7	60',9	69',1	77',3	33°
30'	5,5	12,6	20,8	29,0	37,3	45,8	54,3	62,7	71,2	79,7	30'
34°	5,6	13,1	21,5	29,9	38,5	47,2	55,9	64,6	73,4	82,1	34°
30'	5,8	13,5	22,2	30,7	39,7	48,6	57,6	66,6	76,5	84,5	30'
35°	6,0	13,9	22,8	31,7	40,9	50,0	59,3	68,5	77,7	86,9	35°
30'	6,2	14,3	23,5	32,7	42,1	51,5	61,0	70,4	80,0	89,4	30'
36°	6,3	14,8	24,4	33,7	43,3	53,0	62,7	72,4	82,2	91,9	36°

Höhenwinkel.	550'	600'	650'	700'	750'	800'	850'	900'	950'	1000'	Höhenwinkel.
1°	0',1	0',1	0',0	0',0	0',0	0',0	0',0	0',1	0',1	0',1	1°
30'	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	30'
2°	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	2°
30'	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	30'
3°	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	3°
30'	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	30'
4°	1,0	1,1	1,2	1,4	1,5	1,7	1,8	2,0	2,1	2,3	4°
30'	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,3	2,5	2,7	2,9	30'
5°	1,7	1,9	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,1	3,4	3,6	5°
30'	2,1	2,3	2,5	2,8	3,0	3,3	3,6	3,8	4,1	4,4	30'
6°	2,5	2,8	3,0	3,3	3,7	4,0	4,3	4,6	4,9	5,2	6°
30'	2,9	3,3	3,6	4,0	4,3	4,7	5,1	5,4	5,8	6,0	30'
7°	3,5	3,9	4,2	4,7	5,1	5,5	5,9	6,3	6,7	7,1	7°
30'	4,0	4,5	4,9	5,4	5,9	6,3	6,8	7,3	7,7	8,2	30'
8°	4,6	5,1	5,6	6,2	6,7	7,2	7,8	8,3	8,8	9,4	8°
30'	5,2	5,8	6,4	7,0	7,6	8,2	8,8	9,4	10,0	10,6	30'
9°	5,9	6,6	7,2	7,9	8,5	9,2	9,9	10,6	11,2	11,9	9°
30'	6,6	7,4	8,1	8,8	9,5	10,3	11,1	11,8	12,5	13,3	30'
10°	7,4	8,2	9,0	9,8	10,6	11,5	12,3	13,1	13,9	14,7	10°
30'	8,2	9,1	10,0	10,8	11,8	12,7	13,6	14,5	15,4	16,3	30'
11°	9,1	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	14,9	15,9	17,7	17,9	11°
30'	10,0	11,0	12,0	13,1	14,2	15,3	16,3	17,4	19,3	19,5	30'
12°	10,9	12,0	13,2	14,4	15,5	16,7	17,8	19,0	20,8	21,3	12°
30'	11,8	13,1	14,3	15,7	16,8	18,1	19,4	20,6	21,9	23,1	30'
13°	12,9	14,2	15,4	16,9	18,2	19,6	21,0	22,3	23,7	25,0	13°
30'	13,9	15,3	16,8	18,2	19,7	21,2	22,6	24,1	25,4	27,0	30'
14°	15,0	16,6	18,1	19,6	21,2	22,8	24,4	25,9	27,5	29,1	14°
30'	16,1	17,8	19,4	21,1	22,8	24,5	26,2	27,8	29,5	31,2	30'
15°	17,2	19,1	20,8	22,6	24,4	26,2	28,1	29,8	31,6	33,4	15°
30'	18,5	20,3	22,3	24,2	26,1	28,1	29,9	31,8	33,7	35,7	30'
16°	19,7	21,8	23,8	25,8	28,0	29,9	32,0	34,0	36,0	38,1	16°
30'	21,0	23,2	25,3	27,6	29,5	31,8	34,0	36,1	38,3	40,5	30'
17°	22,4	24,7	26,9	29,2	31,2	33,8	36,1	38,3	40,6	42,9	17°
30'	23,8	26,2	28,5	31,0	33,3	35,8	38,2	40,6	43,1	45,5	30'
18°	25,3	27,7	30,2	32,8	35,3	37,9	40,5	43,0	45,6	48,1	18°
30'	26,6	29,3	31,9	37,4	37,4	40,0	42,8	45,4	48,1	50,8	30'

Höhenwinkel.	550'	600'	650'	700'	750'	800'	850'	900'	950'	1000'	Höhenwinkel.
19°	28',1	30',9	33',6	36',6	39',4	42',2	45',1	47',9	50',8	53',6	19°
30'	29,7	32,6	35,5	38,6	41,5	44,5	47,5	50,5	53,5	56,0	30'
20°	31,2	34,3	37,4	40,6	43,6	46,8	50,0	53,1	56,5	59,4	20°
30'	32,8	36,1	39,3	42,7	45,9	49,2	52,5	55,8	59,1	62,4	30'
21°	34,5	37,9	41,3	44,7	48,2	51,7	55,1	58,6	62,0	65,5	21°
30'	36,2	39,8	43,3	47,0	50,6	54,2	57,8	61,4	65,0	68,6	30'
22°	37,9	41,7	45,4	49,2	53,0	56,1	60,5	64,4	68,0	71,8	22°
30'	39,7	43,6	47,5	51,5	55,5	59,4	63,3	67,2	71,2	75,1	30'
23°	41,6	45,6	49,6	53,7	57,8	62,0	66,1	70,2	74,3	78,5	23°
30'	43,3	47,6	51,8	56,2	60,4	64,7	69,0	73,3	77,6	81,9	30'
24°	45,2	49,7	54,1	58,6	63,0	67,5	72,0	76,4	80,9	85,2	24°
30'	47,1	51,8	56,4	61,1	65,7	70,3	75,0	79,6	84,3	89,0	30'
25°	49,1	53,9	58,7	63,6	68,4	73,2	78,0	82,8	87,7	92,6	25°
30'	51,2	56,1	61,1	66,2	71,1	76,1	81,2	86,2	91,2	96,3	30'
26°	53,1	58,3	63,5	68,8	74,0	79,1	84,4	89,6	94,8	100,1	26°
30'	55,2	60,6	66,0	71,4	76,8	82,2	87,7	93,1	98,5	103,9	30'
27°	57,3	62,9	68,5	74,1	79,7	85,3	91,0	96,6	102,2	107,8	27°
30'	59,5	65,2	70,9	76,9	82,7	88,5	94,3	100,2	105,9	111,8	30'
28°	61,7	67,7	73,6	79,7	85,7	91,7	97,8	103,8	109,8	115,8	28°
30'	63,9	70,1	76,3	82,6	88,8	95,0	101,2	107,4	113,7	119,9	30'
29°	66,2	72,6	79,0	85,5	91,9	98,3	104,8	111,2	117,6	124,1	29°
30'	68,5	75,1	81,7	88,4	95,1	101,7	108,3	115,0	121,7	128,4	30'
30°	70,8	77,7	84,5	91,4	98,3	105,1	112,0	118,9	125,0	132,7	30°
30'	73,2	80,3	87,3	94,5	101,8	108,6	115,7	122,8	129,8	137,0	30'
31°	75,6	82,9	90,1	97,5	104,8	112,1	119,5	126,8	134,1	141,5	31°
30'	78,0	85,5	93,0	100,7	108,2	115,8	123,4	130,9	138,4	146,0	30'
32°	80,5	88,3	95,7	103,9	111,6	119,4	127,2	135,0	142,7	150,6	32°
30'	83,0	91,0	99,0	107,1	115,1	123,1	131,1	139,1	147,1	155,1	30'
33°	85,5	93,8	102,1	110,4	118,6	126,8	135,1	143,3	151,6	159,9	33°
30'	88,2	96,7	105,1	113,6	122,1	130,6	139,1	147,6	156,1	164,7	30'
34°	90,8	99,5	108,2	117,0	125,7	134,5	143,3	152,0	160,7	169,5	34°
30'	93,4	102,3	111,3	120,4	129,4	138,4	147,4	156,4	165,4	174,4	30'
35°	96,1	106,5	114,5	123,9	133,1	142,2	151,6	160,8	170,1	179,3	35°
30'	98,9	109,3	117,8	127,4	136,9	146,3	155,8	165,3	174,8	184,4	30'
36°	101,6	114,4	121,1	130,9	140,6	150,4	160,2	169,9	179,6	189,9	36°

2. Senkung des Rohrs.

Tiefenwinkel.	50'	100'	150'	200'	250'	300'	350'	400'	450'	500'	Tiefenwinkel.
1°	2',9	1',4	1',0	0',7	0',6	0',5	0',4	0',3	0',3	0',3	1°
30'	3,0	1,5	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,5	0,4	30'
2°	3,1	1,6	1,2	0,9	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	2°
30'	3,2	1,7	1,3	1,1	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	30'
3°	3,3	1,9	1,4	1,2	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	3°
30'	3,4	2,0	1,6	1,4	1,2	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	30'

Tiefen-winkel.	50'	100'	150'	200'	250'	300'	350'	400'	450'	500'	Tiefen-winkel.
4°	3',5	2',1	1',7	1',6	1',4	1',5	1',6	1',6	1',7	1',8	4°
30'	3,6	2,2	1,9	1,8	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0	2,2	30'
5°	3,7	2,4	2,1	2,0	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	5°
30'	3,9	2,6	2,3	2,2	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	3,0	30'
6°	4,0	2,7	2,5	2,5	2,4	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	6°
30'	4,1	2,9	2,7	2,7	2,7	3,1	3,3	3,5	3,8	4,0	30'
7°	4,2	3,1	2,9	3,0	3,1	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	7°
30'	4,4	3,3	3,2	3,3	3,4	4,0	4,2	4,5	4,8	5,1	30'
8°	4,5	3,5	3,4	3,6	3,8	4,4	4,6	5,0	5,4	5,8	8°
30'	4,6	3,7	3,7	3,9	4,1	4,8	5,1	5,6	6,0	6,5	30'
9°	4,8	3,9	4,0	4,3	4,5	5,3	5,7	6,2	6,7	7,2	9°
30'	4,9	4,1	4,3	4,6	4,9	5,8	6,2	6,8	7,4	8,0	30'
10°	5,1	4,3	4,6	5,0	5,4	6,3	6,8	7,5	8,1	8,8	10°
30'	5,2	4,5	4,9	5,4	5,8	6,8	7,4	8,2	8,9	9,6	30'
11°	5,4	4,8	5,2	5,8	6,3	7,3	8,0	8,9	9,7	10,5	11°
30'	5,6	5,0	5,5	6,2	6,8	7,8	8,7	9,6	10,5	11,4	30'
12°	5,8	5,3	5,8	6,6	7,3	8,4	9,4	10,4	11,3	12,3	12°
30'	5,9	5,5	6,2	7,0	7,8	9,0	10,2	11,2	12,2	13,3	30'
13°	6,1	5,8	6,5	7,5	8,4	9,7	10,9	12,0	13,1	14,3	13°
30'	6,2	6,1	6,9	8,0	8,9	10,4	11,8	12,8	14,1	15,4	30'
14°	6,4	6,4	7,3	8,5	9,5	11,0	12,7	13,7	15,1	16,5	14°
30'	6,6	6,7	7,7	9,0	10,1	11,7	13,6	14,7	16,1	17,6	30'
15°	6,8	7,0	8,1	9,5	10,7	12,5	14,5	15,6	17,2	18,8	15°
30'	7,0	7,3	8,5	10,0	11,3	13,2	15,4	16,6	18,3	20,0	30'
16°	7,2	7,6	8,9	10,5	12,0	14,0	16,3	17,6	19,4	21,2	16°
30'	7,3	7,9	9,4	11,1	12,7	14,8	17,2	18,6	20,5	22,5	30'
17°	7,5	8,2	9,8	11,7	13,4	15,6	18,1	19,7	21,7	23,8	17°
30'	7,8	8,5	10,3	12,3	14,1	16,5	18,9	20,7	22,9	25,1	30'
18°	8,0	8,9	10,8	12,8	14,9	17,4	19,6	21,8	24,2	26,5	18°
30'	8,2	9,2	11,2	13,5	15,6	18,2	20,5	23,0	25,5	27,9	30'
19°	8,4	9,6	11,7	14,2	16,3	19,1	21,6	24,2	26,8	29,4	19°
30'	8,6	9,9	12,2	14,8	17,1	20,0	22,7	25,4	28,1	30,9	30'
20°	8,8	10,3	12,7	15,4	17,9	21,0	23,8	26,7	29,5	32,4	20°
30'	9,0	10,7	13,3	16,1	18,7	22,0	24,9	27,9	30,9	34,0	30'
21°	9,2	11,1	13,8	16,8	19,5	23,0	26,1	29,2	32,4	35,6	21°
30'	9,4	11,4	14,3	17,5	20,4	24,0	27,2	30,5	33,8	37,2	30'
22°	9,7	11,8	14,9	18,2	21,2	25,0	28,4	31,9	35,3	38,8	22°
30'	9,9	12,2	15,5	18,9	22,1	26,0	29,6	33,3	36,9	40,5	30'
23°	10,1	12,6	16,0	19,7	23,0	27,1	30,9	34,7	38,5	42,3	23°
30'	10,4	13,0	16,6	20,4	24,0	28,2	32,1	36,1	40,1	44,1	30'
24°	10,6	13,5	17,2	21,2	24,9	29,3	33,4	37,6	41,7	45,9	24°
30'	10,9	13,9	17,8	22,0	25,9	30,5	34,8	39,1	43,4	47,7	30'
25°	11,1	14,3	18,4	22,8	26,8	31,6	36,1	40,6	45,1	49,6	25°
30'	11,4	14,8	19,1	23,6	27,8	32,8	37,5	42,1	46,8	51,5	30'
26°	11,7	15,2	19,7	24,4	28,8	34,0	38,8	43,7	48,5	53,4	26°
30'	11,9	15,7	20,3	25,2	29,8	35,2	40,2	45,3	50,3	55,4	30'

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Tiefen-winkel.
27°	12′,2	16′,1	21′,0	26′,1	30′,9	36′,4	41′,7	46′,9	52′,0	57′,4	27°
30′	12,4	16,6	21,7	26,9	31,9	37,7	43,1	48,6	54,0	59,5	30′
28°	12,7	17,1	22,3	27,8	33,0	39,0	44,6	50,3	55,9	61,6	28°
30′	12,9	17,6	23,0	28,7	34,1	40,3	46,1	52,0	57,8	63,7	30′
29°	13,2	18,1	23,7	29,6	35,2	41,6	47,6	53,7	59,7	65,8	29°
30′	13,4	18,5	24,4	30,5	36,3	42,9	49,2	55,4	61,6	68,0	30′
30°	13,7	19,0	25,1	31,4	37,4	44,3	50,7	57,3	63,6	70,2	30°
30′	14,0	19,5	25,8	32,4	38,6	45,6	52,3	59,0	65,7	72,4	30′
31°	14,3	20,0	26,6	33,3	39,8	47,0	54,0	60,9	67,8	74,7	31°
30′	14,6	20,5	27,3	34,3	41,0	48,5	55,6	62,7	69,9	77,0	30′
32°	14,9	21,1	28,1	35,3	42,2	49,9	57,3	64,6	72,0	79,4	32°
30′	15,2	21,6	28,8	36,3	43,4	51,3	58,9	66,5	74,1	81,8	30′
33°	15,5	22,1	29,6	37,3	44,6	52,8	61,6	68,5	76,3	84,2	33°
30′	15,8	22,6	30,4	38,3	45,9	54,3	62,4	70,4	78,5	86,6	30′
34°	16,1	23,2	31,2	39,3	47,2	55,8	64,1	72,3	80,7	89,1	34°
30′	16,4	23,8	32,0	40,4	48,5	57,3	65,9	74,3	83,0	91,6	30′
35°	16,7	24,3	32,8	41,4	49,7	58,9	67,7	76,5	85,3	94,1	35°
30′	17,0	24,9	33,6	42,5	51,0	60,5	69,5	78,6	87,6	96,7	30′
36°	17,3	25,5	34,4	43,6	52,2	62,0	71,3	80,7	89,9	99,3	36°

Tiefen-winkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Tiefen-winkel.
1°	0′,3	0′,3	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	1°
30′	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	30′
2°	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	2°
30′	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	30′
3°	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	3°
30′	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	2,0	30′
4°	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,6	2,6	4°
30′	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,2	3,3	30′
5°	2,7	2,8	3,0	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	3,9	4,1	5°
30′	3,2	3,4	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9	30′
6°	3,7	3,9	4,1	4,4	4,6	4,8	5,1	5,3	5,6	5,8	6°
30′	4,3	4,6	4,8	5,1	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,8	30′
7°	4,9	5,2	5,5	5,8	6,1	6,5	6,8	7,1	7,5	7,8	7°
30′	5,6	5,9	6,3	6,6	7,0	7,4	7,8	8,1	8,6	8,9	30′
8°	6,3	6,7	7,1	7,4	7,9	8,4	8,8	9,2	9,7	10,1	8°
30′	7,0	7,5	8,0	8,3	8,9	9,4	9,9	10,4	10,9	11,4	30′
9°	7,8	8,3	8,9	9,3	9,9	10,5	11,1	11,6	12,2	12,7	9°
30′	8,6	9,2	9,8	10,4	11,0	11,7	12,3	12,9	13,5	14,1	30′
10°	9,5	10,1	10,8	11,5	12,2	12,9	13,6	14,3	15,0	15,6	10°
30′	10,4	11,1	11,9	12,6	13,4	14,2	14,9	15,7	16,5	17,3	30′
11°	11,3	12,2	13,0	13,8	14,6	15,5	16,3	17,2	18,0	18,9	11°
30′	12,3	13,2	14,1	15,0	15,9	16,9	17,9	18,8	19,7	20,6	30′
12°	13,3	14,3	15,3	16,3	17,3	18,4	19,4	20,4	21,4	22,4	12°
30′	14,4	15,5	16,6	17,6	18,7	19,9	21,0	22,1	23,2	24,3	30′
13°	15,5	16,7	17,9	19,0	20,2	21,5	22,6	23,8	25,0	26,2	13°

Tiefen-winkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Tiefen-winkel.
13° 30′	16′,6	17′,9	19′,2	20′,5	21′,8	23′,1	24′,4	25′,7	27′,0	28′,2	13° 30′
14°	17,8	19,2	20,6	22,0	23,3	24,8	26,2	27,6	29,0	30,3	14°
30′	19,1	20,6	22,1	23,5	25,0	26,6	28,0	29,5	31,0	32,5	30′
15°	20,4	22,0	23,6	25,1	26,7	28,4	29,9	31,6	33,2	34,7	15°
30′	21,7	23,4	25,1	26,7	28,5	30,2	31,9	33,7	35,3	37,1	30′
16°	23,0	24,9	26,7	28,5	30,3	32,2	34,0	35,8	37,6	39,5	16°
30′	24,4	26,4	28,3	30,2	32,1	34,2	36,1	38,0	39,9	41,8	30′
17°	25,8	27,9	30,0	32,0	34,1	36,2	38,3	40,3	42,4	44,3	17°
30′	27,3	29,5	31,7	33,8	36,0	38,3	40,5	42,7	44,9	47,1	30′
18°	28,8	31,1	33,4	35,7	38,1	40,5	42,8	45,1	47,5	49,9	18°
30′	30,4	32,8	35,3	37,7	40,1	42,7	45,1	47,6	50,1	52,6	30′
19°	32,0	34,6	37,2	39,7	42,3	45,0	47,5	50,1	52,8	55,3	19°
30′	33,6	36,3	39,1	41,7	44,5	47,3	50,0	52,7	55,5	58,2	30′
20°	35,3	38,2	41,0	43,8	46,7	49,6	52,5	55,4	58,3	61,2	20°
30′	37,0	40,0	43,0	46,0	49,1	52,1	55,1	58,2	61,2	64,4	30′
21°	38,7	41,9	45,1	48,2	51,4	54,7	57,8	61,0	64,2	67,4	21°
30′	40,5	43,9	47,2	50,4	53,8	57,2	60,5	63,9	67,2	70,6	30′
22°	42,3	45,9	49,3	52,7	56,3	59,8	63,3	66,8	70,3	73,8	22°
30′	44,2	47,9	51,5	55,1	58,8	62,5	66,1	69,8	73,5	77,1	30′
23°	46,1	49,9	53,8	57,5	61,3	65,3	69,0	72,9	76,7	80,5	23°
30′	48,0	52,0	56,1	59,9	63,9	68,1	72,0	76,0	80,0	84,0	30′
24°	50,0	54,2	58,4	62,4	66,6	70,9	75,0	79,2	83,4	87,5	24°
30′	52,1	56,4	60,7	65,0	69,3	73,8	78,1	82,5	86,8	91,1	30′
25°	54,1	58,6	63,2	67,6	72,1	76,8	81,3	85,8	90,2	94,8	25°
30′	56,2	60,9	65,7	70,2	74,9	79,8	84,5	89,1	93,8	98,5	0′
26°	58,3	63,2	68,2	72,9	77,8	82,8	87,7	92,6	97,5	102,3	26°
30′	60,5	65,5	70,7	75,7	80,8	85,9	91,0	96,1	101,2	106,3	30′
27°	62,7	67,9	73,3	78,5	83,8	89,0	94,3	99,6	104,9	110,2	27°
30′	65,0	70,3	75,9	81,3	86,8	92,3	97,8	103,3	108,8	114,2	30′
28°	67,2	72,9	78,6	84,2	89,9	95,6	101,3	107,0	112,7	118,3	28°
30′	69,5	75,4	81,3	87,1	93,0	99,0	104,8	110,7	116,6	122,4	30′
29°	71,9	78,0	84,1	90,1	96,2	102,4	108,4	114,5	120,6	126,6	29°
30′	74,4	80,6	86,9	93,1	99,4	105,8	112,0	118,4	124,7	130,9	30′
30°	76,8	83,2	89,8	96,1	102,7	109,3	115,7	122,3	128,8	135,3	30°
30′	79,2	85,9	92,7	99,3	106,0	112,8	119,5	126,3	133,0	139,7	30′
31°	81,7	88,6	95,6	102,4	109,4	116,4	123,3	130,3	137,2	144,2	31°
30′	84,2	91,4	98,6	105,6	112,8	120,1	127,2	134,4	141,6	148,7	30′
32°	86,8	94,2	101,6	108,9	116,2	123,8	131,1	138,6	146,0	153,3	32°
30′	89,4	96,9	104,7	112,2	119,8	127,5	135,1	142,8	150,4	158,0	30′
33°	92,0	99,5	107,8	115,5	123,4	131,4	139,2	147,1	154,9	162,8	33°
30′	94,7	102,3	110,9	118,9	127,0	135,2	143,3	151,4	159,5	167,6	30′
34°	97,4	105,2	114,1	122,3	130,7	139,1	147,4	155,8	164,1	172,4	34°
30′	100,1	108,2	117,3	125,8	134,4	143,1	151,6	160,2	168,8	177,4	30′
35°	102,9	111,2	120,6	129,3	138,1	147,1	155,9	164,7	173,6	182,4	35°
30′	105,7	114,3	123,9	132,9	142,0	151,2	160,2	169,3	178,4	187,4	30′
36°	108,6	117,4	127,3	136,4	145,8	155,2	164,5	174,0	183,2	192,5	36°

Tafel Nr. III.

Reductionen für den Ertel'schen Distanzmesser.

1. Erhebung des Rohrs.

Höhen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Höhen-winkel.
1°	0′,4	0′,2	0′,01	0′,03	0′,03	0′,04	0′,05	0′,05	0′,06	0′,06	0′,08	0′,1	1°
30′	0,3	0,1	0,01	0,05	0,05	0,07	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	30′
2°	0,3	0,1	0,02	0,08	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	2°
30′	0,3	0,1	0,05	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	30′
3°	0,3	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	3°
30′	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	30′
4°	0,3	0,2	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	4°
30′	0,3	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,8	30′
5°	0,3	0,2	0,3	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,2	5°
30′	0,3	0,3	0,4	0,7	1,0	1,2	1,5	1,7	2,0	2,2	2,5	2,7	30′
6°	0,3	0,3	0,5	0,8	1,2	1,4	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,2	6°
30′	0,3	0,4	0,7	1,0	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,2	3,5	3,8	30′
7°	0,3	0,5	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,7	4,1	4,4	7°
30′	0,3	0,6	0,9	1,4	1,9	2,3	2,8	3,2	3,7	4,2	4,7	5,1	30′
8°	0,4	0,6	1,1	1,6	2,2	2,6	3,2	3,7	4,3	4,8	5,3	5,8	8°
30′	0,4	0,7	1,2	1,8	2,5	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4	6,0	6,5	30′
9°	0,4	0,8	1,4	2,1	2,8	3,4	4,0	4,7	5,4	6,1	6,7	7,3	9°
30′	0,5	0,9	1,6	2,3	3,1	3,8	4,5	5,3	6,0	6,8	7,5	8,2	30′
10°	0,5	1,0	1,8	2,6	3,5	4,2	5,1	5,9	6,7	7,5	8,3	9,1	10°
30′	0,6	1,2	2,0	2,9	3,8	4,7	5,6	6,5	7,4	8,3	9,2	10,0	30′
11°	0,6	1,3	2,2	3,2	4,2	5,2	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,0	11°
30′	0,7	1,4	2,4	3,5	4,6	5,7	6,7	7,8	8,9	9,9	11,0	12,0	30′
12°	0,7	1,6	2,7	3,9	5,0	6,2	7,3	8,5	9,7	10,8	12,0	13,1	12°
30′	0,8	1,7	2,9	4,2	5,5	6,7	8,0	9,2	10,5	11,7	13,0	14,2	30′
13°	0,8	1,9	3,2	4,6	5,9	7,3	8,6	10,0	11,3	12,6	14,0	15,3	13°
30′	0,9	2,1	3,4	5,0	6,4	7,9	9,3	10,8	12,2	13,6	15,1	16,5	30′
14°	1,0	2,2	3,7	5,3	6,9	8,5	10,0	11,6	13,1	14,7	16,3	17,8	14°
30′	1,1	2,4	4,1	5,7	7,5	9,1	10,7	12,4	14,1	15,8	17,4	19,1	30′
15°	1,1	2,6	4,4	6,2	8,0	9,7	11,5	13,2	15,1	16,9	18,6	20,4	15°
30′	1,2	2,8	4,7	6,6	8,5	10,4	12,3	14,2	16,2	18,0	19,9	21,8	30′
16°	1,3	3,0	5,0	7,1	9,1	11,1	13,1	15,2	17,2	19,2	21,3	23,2	16°
30′	1,4	3,2	5,3	7,5	9,7	11,8	14,0	16,1	18,3	20,4	22,6	24,6	30′
17°	1,5	3,4	5,7	8,0	10,3	12,5	14,8	17,1	19,4	21,7	24,0	26,2	17°
30′	1,6	3,7	6,1	8,5	10,9	13,3	15,7	18,1	20,6	23,0	25,4	27,7	30′
18°	1,7	3,9	6,5	9,0	11,6	14,1	16,7	19,2	21,8	24,3	26,9	29,3	18°
30′	1,8	4,2	6,8	9,5	12,3	14,9	17,6	20,3	23,0	25,7	28,4	31,0	30′
19°	1,9	4,4	7,2	10,1	12,9	15,7	18,6	21,4	24,2	27,1	29,9	32,6	19°
30′	2,0	4,7	7,6	10,6	13,6	16,6	19,6	22,5	25,5	28,5	31,5	34,3	30′
20°	2,1	4,9	8,0	11,2	14,4	17,5	20,6	23,7	26,8	30,0	33,1	36,1	20°
30′	2,2	5,2	8,5	11,8	15,1	18,4	21,6	24,9	28,2	31,5	34,8	37,0	30′

Höhenwinkel	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Höhenwinkel.
21°	2′,4	5′,5	8′,9	12′,4	15′,9	19′,3	22′,7	26′,1	29′,6	33′,0	36′,5	39′,8	21°
30′	2,5	5,7	9,3	13,0	16,7	20,2	23,8	27,4	31,0	34,6	38,2	41,7	30′
22°	2,6	6,0	9,8	13,6	17,4	21,1	24,9	28,7	32,4	36,2	40,0	43,7	22°
30′	2,8	6,3	10,3	14,3	18,2	22,1	26,0	30,0	33,9	37,9	41,8	45,7	30′
23°	2,9	6,6	10,8	14,9	19,1	23,1	27,2	31,3	35,4	39,5	43,7	47,7	23°
30′	3,0	7,0	11,3	15,6	19,9	24,1	28,4	32,7	37,0	41,2	45,6	49,8	30′
24°	3,2	7,3	11,8	16,3	20,8	25,1	29,6	34,1	38,5	43,0	47,5	51,8	24°
30′	3,3	7,6	12,3	17,0	21,6	26,2	30,9	35,5	40,2	44,8	49,5	53,9	30′
25°	3,5	7,9	12,8	17,7	22,5	27,3	32,1	37,0	41,8	46,6	51,5	56,1	25°
30′	3,6	8,3	13,3	18,4	23,5	28,4	33,4	38,4	43,5	48,5	53,5	58,4	30′
26°	3,8	8,6	13,9	19,1	24,4	29,5	34,8	39,9	45,2	50,4	55,6	60,6	26°
30′	3,9	9,0	14,4	19,9	25,3	30,7	36,1	41,5	46,9	52,3	57,8	63,0	30′
27°	4,1	9,3	15,0	20,6	26,3	31,8	37,4	43,0	48,6	54,3	59,9	65,3	27°
30′	4,3	9,7	15,6	21,4	27,3	33.0	38,8	44,6	50,4	56,3	62,1	67,7	30′
28°	4,5	10,1	16,2	22,2	28,3	34,2	40,2	46,2	52,3	58,3	64,3	70,1	28°
30′	4,7	10,5	16,8	23,0	29,3	35,4	41,7	47,9	54,1	60,3	66,6	72,6	30′
29°	4,8	10,9	17,4	23,8	30,3	36,7	43,1	49,6	56,0	62,4	68,9	75,1	29°
30′	5,0	11,3	18,0	24,7	31,4	37,9	44,6	51,3	57,9	64,6	71,2	77,7	30′
30°	5,2	11,7	18,6	25,5	32,4	39,2	46,1	53,0	59,8	66,8	73,6	80,3	30°
30′	5,4	12,1	19,3	26,4	33,5	40,5	47,6	54,7	61,8	68,9	76,0	82,9	30′
31°	5,6	12,5	19,9	27,2	34,6	41,9	49,2	56,5	63,8	71,1	78,5	85,6	31°
30′	5,8	12,9	20,6	28,1	35,7	43,2	50,8	58,3	65,8	73,4	81,0	88,3	30′
32°	6,0	13,3	21,2	29,0	36,8	44,6	52,4	60,1	67,9	75,7	83,5	91,1	32°
30′	6,2	13,8	21,9	29,9	38,0	46,0	54,0	62.0	70,0	78,0	86,0	93,9	30′
33°	6,4	14,2	22,6	30,9	39,2	47,4	55,6	63,9	72,1	80,3	88,6	96,8	33°
30′	6,6	14,7	23,3	31,9	40,4	48,8	57,3	65,8	74,2	82,8	91,2	99,7	30′
34°	6,8	15,2	24,0	32,8	41,6	50,2	59,0	67,7	76,4	85,2	93,9	102,5	34°
30′	7,0	15,6	24,7	33,7	42,8	51.7	60,7	69,7	78,6	87,6	96,6	105,4	30′
35°	7,3	16,1	25,4	34,7	44,0	53,2	62,4	71,6	80,8	90,1	99,4	108,4	35°
30′	7,5	16,5	26,1	35,7	45,3	54,7	64,2	73,6	83,1	92,7	102,1	111,4	30′
36°	7,8	17,0	26,9	36,7	46,6	56,2	66,1	75,7	88,4	95,2	104,9	114,5	36°

2. Senkung des Rohrs.

Tiefenwinkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefenwinkel
1°	0′,5	0′,3	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	1°
30′	0,5	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	30′
2°	0,6	0,4	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	2°
30′	0,6	0,5	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	30′
3°	0,7	0,5	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	3°
30′	0,7	0,6	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,1	30′
4°	0,8	0,7	0,6	0,7	0,7	0,9	0,9	1,0	1,2	1,2	1,3	1,4	4°
30′	0,8	0,8	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,6	1,7	30′
5°	0,9	0,9	0,8	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	5°
30′	1,0	1,0	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6	30′

Tiefenwinkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefenwinkel.
6°	1′,1	1′,2	1′,1	1′,4	1′,6	1′,9	2′,1	2′,3	2′,5	2′,8	2′,9	3′,0	6°
30′	1,2	1,3	1,3	1,6	1,8	2,2	2,4	2,7	3,0	3,3	3,4	3,5	30′
7°	1,2	1,4	1,5	1,8	2,1	2,5	2,8	3,1	3,5	3,8	3,9	4,1	7°
30′	1,3	1,5	1,7	2,1	2,3	2,8	3,2	3,6	4,0	4,3	4,5	4,7	30′
8°	1,4	1,7	1,9	2,3	2,7	3,2	3,6	4,1	4,5	4,9	5,2	5,5	8°
30′	1,5	1,9	2,1	2,6	3,1	3,6	4,0	4,6	5,1	5,5	5,9	6,4	30′
9°	1,6	2,0	2,3	2,9	3,4	4,0	4,5	5,1	5,7	6,2	6,7	7,3	9°
30′	1,8	2,2	2,6	3,2	3,8	4,4	5,1	5,7	6,3	6,9	7,6	8,3	30′
10°	1,9	2,4	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0	7,7	8,4	9,3	10°
30′	2,0	2,6	3,1	3,9	4,6	5,4	6,1	6,9	7,7	8,5	9,3	10,2	30′
11°	2,2	2,8	3,3	4,2	5,0	5,9	6,7	7,6	8,4	9,3	10,2	11,1	11°
30′	2,3	3,0	3,6	4,6	5,5	6,4	7,3	8,3	9,2	10,1	11,1	12,1	30′
12°	2,4	3,2	3,9	5,0	5,9	6,9	8,0	9,0	10,0	11,0	12,1	13,2	12°
30′	2,5	3,4	4,2	5,3	6,4	7,5	8,6	9,7	10,8	11,9	13,1	14,3	30′
13°	2,7	3,6	4,5	5,7	6,9	8,1	9,3	10,5	11,7	12,9	14,1	15,4	13°
30′	2,9	3,8	4,9	6,2	7,4	8,7	10,0	11,3	12,6	13,9	15,2	16,6	30′
14°	3,1	4,1	5,2	6,6	7,9	9,4	10,7	12,2	13,5	15,0	16,4	17,9	14°
30′	3,2	4,3	5,5	7,1	8,5	10,0	11,5	13,1	14,5	16,1	17,6	19,2	30′
15°	3,4	4,6	5,9	7,5	9,1	10,7	12,3	14,0	15,5	17,2	18,8	20,5	15°
30′	3,5	4,8	6,3	8,0	9,7	11,4	13,1	14,9	16,6	18,3	20,0	21,9	30′
16°	3,7	5,1	6,7	8,5	10,3	12,2	14,0	15,8	17,7	19,5	22,3	23,3	16°
30′	3,8	5,4	7,1	9,0	10,9	12,9	14,8	16,8	18,8	20,7	22,7	24,7	30′
17°	4,0	5,7	7,5	9,5	11,5	13,7	15,7	17,8	19,9	22,0	24,1	26,3	17°
30′	4,2	6,0	7,9	10,1	12,2	14,5	16,7	18,9	20,1	23,3	25,5	27,9	30′
18°	4,3	6,3	8,3	10,6	12,9	15,3	17,6	20,0	22,3	24,6	27,0	29,5	18°
30′	4,5	6,6	8,7	11,2	13,6	16,1	18,6	21,1	23,5	26,0	28,5	31,1	30′
19°	4,7	6,9	9,1	11,8	14,3	17,0	19,6	22,2	24,8	27,4	30,1	32,7	19°
30′	4,9	7,2	9,6	12,4	15,1	17,9	20,6	23,3	26,1	28,8	31,6	34,4	30′
20°	5,1	7,5	10,0	13,0	15,8	18,8	21,6	24,4	27,4	30,3	33,2	36,2	20°
30′	5,2	7,9	10,5	13,6	16,7	19,7	22,7	25,7	28,8	31,8	34,9	38,0	30′
21°	5,4	8,2	11,0	14,3	17,4	20,6	23,8	27,0	30,2	33,4	36,6	39,9	21°
30′	5,6	8,5	11,6	14,9	18,2	21,6	24,9	28,3	31,6	35,0	38,3	41,8	30′
22°	5,8	8,9	12,1	15,6	19,0	22,6	26,0	29,6	33,0	36,6	40,1	43,7	22°
30′	6,0	9,3	12,6	16,3	19,8	23,6	27,2	30,9	34,5	38,2	41,9	45,7	30′
23°	6,2	9,6	13,1	17,0	20,7	24,6	28,4	32,3	36,1	39,9	43,8	47,8	23°
30′	6,4	10,0	13,6	17,7	21,6	25,6	29,6	33,7	38,7	41,7	45,7	49,8	30′
24°	6,6	10,4	14,2	18,4	22,5	26,7	30,9	35,1	39,3	43,4	47,6	51,9	24°
30′	6,9	10,8	14,7	19,1	23,4	27,8	32,1	36,5	40,9	45,2	49,6	54,1	30′
25°	7,1	11,2	15,3	19,9	24,3	28,9	33,4	38,0	42,5	47,0	51,6	56,3	25°
30′	7,3	11,6	15,9	20,6	25,3	30,1	34,8	39,5	44,2	48,9	53,6	58,5	30′
26°	7,5	12,0	16,5	21,4	26,2	31,2	36,1	41,0	45,9	50,8	55,7	60,8	26°
30′	7,8	12,4	17,1	22,2	27,2	32,4	37,4	42,6	47,6	52,7	57,8	63,1	30′
27°	8,0	12,8	17,7	23,0	28,2	33,6	38,8	44,2	49,4	54,7	60,0	65,5	27°
30′	8,2	13,2	18,3	23,8	29,2	34,8	40,2	45,8	51,2	56,7	62,2	67,9	30′
28°	8,5	13,7	19,0	24,7	30,2	36,0	41,7	47,4	53,1	58,7	64,4	70,3	28°
30′	8,7	14,1	19,6	25,8	31,3	37,3	43,1	49,0	55,0	60,8	66,7	72,8	30′

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefen-winkel.
29⁰	8′,9	14′,6	20′,3	26,4	32′,4	38′,6	44′,6	50′,7	56′,9	62′,9	69′,0	75′,3	29⁰
30′	9,2	15,0	20,9	27,2	33,5	39,9	46,1	52,4	58,8	65,1	71,4	77,9	30′
30⁰	9,4	15,5	21,6	28,1	34,6	41,2	47,6	54,2	60,8	67,2	73,8	80,5	30⁰
30′	9,7	15,9	22,3	29,0	35,7	42,5	49,2	56,0	62,8	69,4	76,2	83,1	30′
31⁰	9,9	16,4	23,0	29,9	36,8	43,8	50,8	57,8	64,8	71,7	78,7	85,8	31⁰
30′	10,2	16,9	23,7	30,9	38,0	45,2	52,4	59,6	66,8	73,9	81,2	88,5	30′
32⁰	10,5	17,4	24,4	31,9	39,1	46,6	54,0	61,4	68,8	76,2	83,7	91,3	32⁰
30′	10,7	17,9	25,1	32,8	40,3	48,0	55,6	63,3	70,9	78,6	86,2	94,1	30′
33⁰	11,0	18,4	25,8	33,7	41,5	49,4	57,3	65,2	73,0	80,9	88,8	96,9	33⁰
30′	11,3	18,9	26,6	34,7	42,7	50,9	59,0	67,1	75,2	83,3	91,4	99,8	30′
34⁰	11,5	19,4	27,3	35,7	43,9	52,4	60,7	69,1	77,4	85,7	94,1	102,7	34⁰
30′	11,8	19,9	28,1	36,7	45,2	53,9	62,4	71,1	79,6	88,2	96,8	105,6	30′
35⁰	12,1	20,4	28,8	37,7	46,4	55,4	64,2	73,1	81,9	90,7	99,6	108,6	35⁰
30′	12,3	20,9	29,6	38,7	47,7	56,9	66,1	75,1	84,1	93,2	102,3	111,6	30′
36⁰	12,6	21,5	30,4	39,7	49,0	58,4	68,1	77,1	86,3	95,8	105,1	114,7	36⁰

Tafel Nr. IV.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $\frac{324}{o - u}$.

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
1,00	324,00		1,20	270,00		1,40	231,43	
1,01	320,79	0,29	1,21	267,77	0,21	1,41	229,79	0,15
1,02	317,65	0,59	1,22	265,58	0,42	1,42	228,17	0,31
1,03	314,56	0,88	1,23	263,42	0,62	1,43	226,57	0,46
1,04	311,54	1,18	1,24	261,29	0,83	1,44	225,00	0,62
1,05	308,57	1,47	1,25	259,20	1,04	1,45	223,45	0,77
1,06	305,66	1,76	1,26	257,14	1,25	1,46	221,92	0,93
1,07	302,80	2,06	1,27	255,12	1,45	1,47	220,41	1,08
1,08	300,00	2,35	1,28	253,13	1,66	1,48	218,92	1,23
1,09	297,95	2,65	1,29	251,16	1,87	1,49	217,45	1,39
1,10	294,54		1,30	249,23		1,50	216,00	
1,11	291,89	0,25	1,31	247,33	0,18	1,51	214,57	0,14
1,12	289,29	0,49	1,32	245,46	0,36	1,52	213,16	0,27
1,13	287,73	0,74	1,33	243,61	0,53	1,53	211,76	0,40
1,14	284,21	0,98	1,34	241,79	0,71	1,54	210,39	0,54
1,15	281,74	1,23	1,35	240,00	0,89	1,55	209,03	0,68
1,16	279,31	1,47	1,36	238,24	1,07	1,56	207,69	0,81
1,17	276,92	1,72	1,37	236,50	1,25	1,57	206,37	0,94
1,18	274,58	1,96	1,38	234,78	1,42	1,58	205,06	1,08
1,19	272,27	2,21	1,39	233,09	1,60	1,59	203,77	1,22

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
1,60	202,50		2,00	162,00		2,40	135,00	
1,61	201,21	0,12	2,01	161,18	0,08	2,41	134,44	0,05
1,62	200,00	0,24	2,02	160,20	0,15	2,42	133,88	0,11
1,63	198,77	0,36	2,03	159,61	0,23	2,43	133,34	0,16
1,64	197,56	0,48	2,04	158,82	0,31	2,44	132,79	0,22
1,65	196,36	0,60	2,05	158,05	0,39	2,45	132,25	0,27
1,66	195,18	0,71	2,06	157,28	0,46	2,46	131,71	0,32
1,67	194,01	0,83	2,07	156,53	0,54	2,47	131,18	0,38
1,68	192,86	0,95	2,08	155,77	0,62	2,48	130,64	0,43
1,69	191,72	1,07	2,09	155,03	0,69	2,49	130,12	0,49
1,70	190,59		2,10	154,28		2,50	129,60	
1,71	189,47	0,10	2,11	153,56	0,07	2,51	129,09	0,05
1,72	188,37	0,21	2,12	152,83	0,14	2,52	128,57	0,10
1,73	187,28	0,32	2,13	152,12	0,21	2,53	128,07	0,15
1,74	186,21	0,42	2,14	151,40	0,28	2,54	127,56	0,20
1,75	185,14	0,53	2,15	150,70	0,35	2,55	127,06	0,25
1,76	184,09	0,64	2,16	150,00	0,42	2,56	126,56	0,30
1,77	183,05	0,74	2,17	149,31	0,49	2,57	126,07	0,35
1,78	182,02	0,85	2,18	148,62	0,56	2,58	125,58	0,40
1,79	181,01	0,95	2,19	147,95	0,63	2,59	125,10	0,45
1,80	180,00		2,20	147,27		2,60	124,62	
1,81	179,01	0,09	2,21	146,61	0,06	2,61	124,14	0,05
1,82	178,02	0,19	2,22	145,95	0,13	2,62	123,66	0,09
1,83	177,05	0,28	2,23	145,29	0,19	2,63	123,20	0,14
1,84	176,09	0,38	2,24	144,64	0,26	2,64	122,73	0,18
1,85	175,14	0,47	2,25	144,00	0,32	2,65	122,27	0,23
1,86	174,19	0,57	2,26	143,36	0,38	2,66	121,80	0,28
1,87	173,26	0,66	2,27	142,73	0,45	2,67	121,35	0,32
1,88	172,34	0,76	2,28	142,10	0,51	2,68	120,90	0,37
1,89	171,43	0,85	2,29	141,49	0,58	2,69	120,45	0,42
1,90	170,53		2,30	140,87		2,70	120,00	
1,91	169,63	0,08	2,31	140,26	0,06	2,71	119,56	0,04
1,92	168,75	0,17	2,32	139,66	0,12	2,72	119,12	0,08
1,93	167,88	0,26	2,33	139,06	0,18	2,73	118,68	0,13
1,94	167,01	0,34	2,34	138,46	0,23	2,74	118,25	0,17
1,95	166,15	0,43	2,35	137,88	0,29	2,75	117,82	0,21
1,96	165,31	0,51	2,36	137,29	0,35	2,76	117,39	0,26
1,97	164,47	0,60	2,37	136,71	0,41	2,77	116,97	0,30
1,98	163,94	0,68	2,38	136,13	0,47	2,78	116,55	0,34
1,99	162,81	0,77	2,39	135,57	0,53	2,79	116,13	0,39

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
2,80	115,71		3,20	101,25		3,60	90,00	
2,81	115,33	0,04	3,21	100,94	0,03	3,61	89,75	0,02
2,82	114,89	0,08	3,22	100,62	0,06	3,62	89,50	0,05
2,83	114,49	0,12	3,23	100,31	0,09	3,63	89,26	0,07
2,84	114,08	0,16	3,24	100,00	0,12	3,64	89,01	0,09
2,85	113,69	0,20	2,25	99,69	0,15	3,65	88,77	0,12
2,86	113,29	0,24	3,26	99,39	0,18	3,66	88,52	0,14
2,87	112,89	0,28	3,27	99,08	0,21	3,67	88,28	0,17
2,88	112,50	0,32	3,28	98,78	0,24	3,68	88,04	0,19
2,89	112,11	0,36	3,29	98,48	0,28	3,69	87,81	0,22
2,90	111,72		3,30	98,18		3,70	87,57	
2,91	111,34	0,04	3,31	97,89	0,03	3,71	87,33	0,02
2,92	110,96	0,07	3,32	97,59	0,06	3,72	87,10	0,05
2,93	110,58	0,11	3,33	97,30	0,09	3,73	86,86	0,07
2,94	110,20	0,15	3,34	97,01	0,12	3,74	86,63	0,09
2,95	109,83	0,19	3,35	96,72	0,14	3,75	86,40	0,12
2,96	109,46	0,22	3,36	96,43	0,17	3,76	86,17	0,14
2,97	109,09	0,26	3,37	96,14	0,20	3,77	85,94	0,16
2,98	108,72	0,30	3,38	95,86	0,23	3,78	85,71	0,18
2,99	108,36	0,33	3,39	95,58	0,26	3,79	85,94	0,21
3,00	108,00		3,40	95,29		3,80	85,26	
3,01	107,64	0,03	3,41	95,02	0,03	3,81	85,04	0,02
3,02	107,28	0,07	3,42	94,74	0,05	3,82	84,82	0,04
3,03	106,93	0,10	3,43	94,46	0,08	3,83	84,60	0,06
3,04	106,58	0,14	3,44	94,19	0,11	3,84	84,38	0,09
3,05	106,23	0,17	3,45	93,91	0,14	3,85	84,16	0,11
3,06	105,88	0,21	3,46	93,64	0,16	3,86	83,94	0,13
3,07	105,54	0,24	3,47	93,37	0,19	3,87	83,72	0,15
3,08	105,20	0,28	3,48	93,10	0,22	3,88	83,50	0,17
3,09	104,86	0,31	3,49	92,84	0,24	3,89	83,29	0,20
3,10	104,52		3,50	92,57		3,90	83,08	
3,11	104,18	0,03	3,51	92,31	0,02	3,91	82,86	0,02
3,12	103,85	0,06	3,52	92,05	0,05	3,92	82,65	0,04
3,13	103,52	0,10	3,53	91,79	0,08	3,93	82,44	0,06
3,14	103,18	0,13	3,54	91,53	0,10	3,94	82,23	0,08
3,15	102,86	0,16	3,55	91,27	0,13	3,95	82,03	0,10
3,16	102,53	0,20	3,56	91,01	0,15	3,96	81,82	0,12
3,17	102,21	0,23	3,57	90,76	0,18	3,97	81,61	0,14
3,18	101,89	0,26	3,58	90,50	0,20	3,98	81,41	0,17
3,19	101,57	0,29	3,59	90,25	0,23	3,99	81,20	0,19

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
4,00	81,00		4,40	73,64		4,80	67,50	
4,01	80,79	0,02	4,41	73,47	0,02	4,81	67,36	0,01
4,02	80,59	0,04	4,42	73,30	0,03	4,82	67,22	0,03
4,03	80,39	0,06	4,43	73,14	0,05	4,83	67,08	0,04
4,04	80,20	0,08	4,44	72,97	0,06	4,84	66,94	0,06
4,05	80,00	0,09	4,45	72,81	0,08	4,85	66,80	0,07
4,06	79,80	0,12	4,46	72,65	0,10	4,86	66,67	0,08
4,07	79,61	0,14	4,47	72,49	0,11	4,87	66,53	0,10
4,08	79,41	0,16	4,48	72,32	0,13	4,88	66,39	0,11
4,09	79,22	0,18	4,49	72,16	0,15	4,89	66,26	0,12
4,10	79,03		4,50	72,00		4,90	66,12	
4,11	78,83	0,02	4,51	71,84	0,02	4,91	65,99	0,01
4,12	78,64	0,04	4,52	71,68	0,03	4,92	65,85	0,03
4,13	78,45	0,06	4,53	71,52	0,05	4,93	65,72	0,04
4,14	78,26	0,08	4,54	71,36	0,06	4,94	65,59	0,05
4,15	78,07	0,09	4,55	71,21	0,08	4,95	65,46	0,07
4,16	77,88	0,11	4,56	71,05	0,09	4,96	65,32	0,08
4,17	77,70	0,13	4,57	70,90	0,11	4,97	65,19	0,09
4,18	77,51	0,15	4,58	70,74	0,12	4,98	65,06	0,10
4,19	77,33	0,17	4,59	70,59	0,14	4,99	64,93	0,12
4,20	77,14		4,60	70,44		5,00	64,80	
4,21	76,96	0,02	4,61	70,28	0,02	5,01	64,67	0,01
4,22	76,78	0,04	4,62	70,13	0,03	5,02	64,54	0,02
4,23	76,60	0,05	4,63	69,98	0,04	5,03	64,41	0,04
4,24	76,42	0,07	4,64	69,83	0,06	5,04	64,29	0,05
4,25	76,24	6,09	4,65	69,68	0,08	5,05	64,16	0,06
4,26	76,06	0,10	4,66	69,53	0,09	5,06	64,03	0,08
4,27	75,88	0,12	4,67	69,38	0,10	5,07	63,91	0,09
4,28	75,70	0,14	4,68	69,23	0,12	5,08	63,78	0,10
4,29	75,53	0,16	4,69	69,08	0,14	5,09	63,66	0,11
4,30	75,35		4,70	68,94		5,10	63,53	
4,31	75,18	0,02	4,71	68,79	0,01	5,11	63,41	0,01
4,32	75,00	0,03	4,72	68,64	0,03	5,12	63,28	0,02
4,33	74,83	0,05	4,73	68,50	0,04	5,13	63,16	0,04
4,34	74,66	0,07	4,74	68,36	0,06	5,14	63,04	0,05
4,35	74,48	0,08	4,75	68,21	0,07	5,15	62,91	0,06
4,36	74,31	0,10	4,76	68,07	0,09	5,16	62,79	0,07
4,37	74,14	0,12	4,77	67,93	0,10	5,17	62,67	0,08
4,38	73,97	0,14	4,78	67,78	0,12	5,18	62,55	0,10
4,39	73,80	0,15	4,79	67,64	0,13	5,19	62,43	0,11

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
5,20	62,31		5,60	57,86		6,00	54,00	
5,21	62,19	0,01	5,61	57,75	0,01	6,01	53,91	0,01
5,22	62,07	0,02	5,62	57,65	0,02	6,02	53,82	0,02
5,23	61,95	0,04	5,63	57,55	0,03	6,03	53,73	0,03
5,24	61,83	0,05	5,64	57,45	0,04	6,04	53,64	0,04
5,25	61,72	0,06	5,65	57,35	0,05	6,05	53,55	0,04
5,26	61,60	0,07	5,66	57,24	0,06	6,06	53,47	0,05
5,27	61,48	0,08	5,67	57,14	0,07	6,07	53,37	0,06
5,28	61,36	0,09	5,68	57,04	0,08	6,08	53,29	0,07
5,29	61,25	0,11	5,69	56,94	0,09	6,09	53,20	0,08
5,30	61,13		5,70	56,84		6,10	53,12	
5,31	61,02	0,01	5,71	56,74	0,01	6,11	53,03	0,01
5,32	60,90	0,02	5,72	56,64	0,02	6,12	52,94	0,02
5,33	60,79	0,03	5,73	56,54	0,03	6,13	52,86	0,02
5,34	60,68	0,04	5,74	56,45	0,04	6,14	52,77	0,03
5,35	60,56	0,06	5,75	56,35	0,05	6,15	52,68	0,04
5,36	60,45	0,07	5,76	56,25	0,06	6,16	52,60	0,05
5,37	60,34	0,08	5,77	56,15	0,07	6,17	52,51	0,06
5,38	60,22	0,09	5,78	56,06	0,08	6,18	52,43	0,07
5,39	60,11	0,10	5,79	55,96	0,09	6,19	52,34	0,08
5,40	60,00		5,80	55,86		6,20	52,26	
5,41	59,89	0,01	5,81	55,76	0,01	6,21	52,17	0,01
5,42	59,78	0,02	5,82	55,67	0,02	6,22	52,09	0,02
5,43	59,67	0,03	5,83	55,57	0,03	6,23	52,01	0,02
5,44	59,56	0,04	5,84	55,48	0,04	6,24	51,92	0,03
5,45	59,45	0,05	5,85	55,38	0,05	6,25	51,84	0,04
5,46	59,34	0,06	5,86	55,29	0,06	6,26	51,76	0,05
5,47	59,23	0,08	5,87	55,20	0,07	6,27	51,68	0,06
5,48	59,12	0,09	5,88	55,10	0,08	6,28	51,59	0,07
5,49	59,02	0,10	5,89	55,01	0,08	6,29	51,51	0,07
5,50	58,91		5,90	54,92		6,30	51,43	
5,51	58,80	0,01	5,91	54,82	0,01	6,31	51,35	0,01
5,52	58,70	0,02	5,92	54,73	0,02	6,32	51,27	0,02
5,53	58,59	0,03	5,93	54,64	0,03	6,33	51,18	0,02
5,54	58,48	0,04	5,94	54,55	0,04	6,34	51,10	0,03
5,55	58,38	0,05	5,95	54,45	0,05	6,35	51,02	0,04
5,56	58,27	0,06	5,96	54,36	0,06	6,36	50.94	0,05
5,57	58,17	0,07	5,97	54,27	0,06	6,37	50,86	0,06
5,58	58,06	0,08	5,98	54,18	0,07	6,38	50,78	0,06
5,59	57,96	0,09	5,99	54,09	0,08	6,39	50,70	0,07

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
6,40	50,62		6,80	47,65		7,20	45,00	
6,41	50,55	0,01	6,81	47,58	0,01	7,21	44,94	0,01
6,42	50,47	0,02	6,82	47,51	0,01	7,22	44,88	0,01
6,43	50,39	0,02	6,83	47,44	0,02	7,23	44,81	0,02
6,44	50,31	0,03	6,84	47,37	0,03	7,24	44,75	0,02
6,45	50,23	0,04	6,85	47,30	0,03	7,25	44,69	0,03
6,46	50,16	0,05	6,86	47,23	0,04	7,26	44,63	0,04
6,47	50,08	0,05	6,87	47,16	0,05	7,27	44,56	0,04
6,48	50,00	0,06	6,88	47,09	0,06	7,28	44,51	0,05
6,49	49,92	0,07	6,89	47,02	0,06	7,29	44,44	0,06
6,50	49,85		6,90	46,96		7,30	44,38	
6,51	49,77	0,01	6,91	46,89	0,01	7,31	44,32	0,01
6,52	49,69	0,02	6,92	46,82	0,01	7,32	44,26	0,01
6,53	49,62	0,02	6,93	46,75	0,02	7,33	44,20	0,02
6,54	49,54	0,03	6,94	46,69	0,03	7,34	44,14	0,02
6,55	49,47	0,04	6,95	46,62	0,03	7,35	44,08	0,03
6,56	49,39	0,04	6,96	46,55	0,04	7,36	44,02	0,04
6,57	49,32	0,05	6,97	46,48	0,05	7,37	43,96	0,04
6,58	49,24	0,06	6,98	46,42	0,05	7,38	43,90	0,05
6,59	49,16	0,07	6,99	46,35	0,06	7,39	43,84	0,05
6,60	49,09		7,00	46,29		7,40	43,78	
6,61	49,02	0,01	7,01	46,22	0,01	7,41	43,72	0,01
6,62	48,94	0,01	7,02	46,15	0,01	7,42	43,67	0,01
6,63	48,87	0,02	7,03	46,09	0,02	7,43	43,61	0,02
6,64	48,79	0,03	7,04	46,02	0,03	7,44	43,55	0,02
6,65	48,72	0,04	7,05	45,96	0,03	7,45	43,49	0,03
6,66	48,65	0,04	7,06	45,89	0,04	7,46	43,43	0,03
6,67	48,58	0,05	7,07	45,84	0,05	7,47	43,37	0,04
6,68	48,50	0,06	7,08	45,76	0,05	7,48	43,32	0,05
6,69	48,43	0,06	7,09	45,70	0,06	7,49	43,25	0,05
6,70	48,36		7,10	45,63		7,50	43,20	
6,71	48,29	0,01	7,11	45,57	0,01	7,51	43,14	0,00
6,72	48,21	0,01	7,12	45,51	0,01	7,52	43,08	0,01
6,73	48,14	0,02	7,13	45,44	0,02	7,53	43,03	0,02
6,74	48,07	0,03	7,14	45,38	0,02	7,54	42,97	0,02
6,75	48,01	0,04	7,15	45,32	0,03	7,55	42,91	0,03
6,76	47,93	0,04	7,16	45,25	0,04	7,56	42,86	0,03
6,77	47,86	0,05	7,17	45,19	0,04	7,57	42,80	0,04
6,78	47,79	0,06	7,18	45,13	0,05	7,58	42,74	0,04
6,79	47,72	0,06	7,19	45,06	0,06	7,59	42,69	0,05

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
7,60	42,63		8,00	40,50		8,40	38,57	
7,61	42,58	0,00	8,01	40,45	0,00	8,41	38,53	0,00
7,62	42,52	0,01	8,02	40,40	0,01	8,42	38,48	0,01
7,63	42,46	0,02	8,03	40,34	0,01	8,43	38,43	0,01
7,64	42,41	0,02	8,04	40,29	0,02	8,44	38,39	0,02
7,65	42,35	0,03	8,05	40,25	0,02	8,45	38,34	0,02
7,66	42,30	0,03	8,06	40,20	0,03	8,46	38,30	0,03
7,67	42,24	0,04	8,07	40,15	0,03	8,47	38,25	0,03
7,68	42,19	0,04	8,08	40,10	0,04	8,48	38,20	0,04
7,69	42,13	0,05	8,09	40,05	0,04	8,49	38,16	0,04
7,70	42,08		8,10	40,00		8,50	38,12	
7,71	42,02	0,00	8,11	39,95	0,00	8,51	38,07	0,00
7,72	41,97	0,01	8,12	39,90	0,01	8,52	38,03	0,01
7,73	41,91	0,02	8,13	39,85	0,01	8,53	37,98	0,01
7,74	41,86	0,02	8,14	39,80	0,02	8,54	37,94	0,02
7,75	41,81	0,03	8,15	39,75	0,02	8,55	37,89	0,02
7,76	41,75	0,03	8,16	39,71	0,03	8,56	37,85	0,03
7,77	41,70	0,04	8,17	39,66	0,03	8,57	37,81	0,03
7,78	41,65	0,04	8,18	39,61	0,04	8,58	37,76	0,04
7,79	41,59	0,05	8,19	39,56	0,04	8,59	37,72	0,04
7,80	41,54		8,20	39,51		8,60	37,68	
7,81	41,48	0,00	8,21	39,46	0,00	8,61	37,63	0,00
7,82	41,43	0,01	8,22	39,42	0,01	8,62	37,59	0,01
7,83	41,38	0,02	8,23	39,37	0,01	8,63	37,54	0,01
7,84	41,33	0,02	8,24	39,32	0,02	8,64	37,50	0,02
7,85	41,27	0,03	8,25	39,27	0,02	8,65	37,46	0,02
7,86	41,22	0,03	8,26	39,23	0,03	8,66	37,41	0,03
7,87	41,17	0,04	8,27	39,18	0,03	8,67	37,37	0,03
7,88	41,12	0,04	8,28	39,13	0,04	8,68	37,33	0,04
7,89	41,06	0,05	8,29	39,08	0,04	8,69	37,28	0,04
7,90	41,01		8,30	39,04		8,70	37,24	
7,91	40,96	0,00	8,31	38,99	0,00	8,71	37,20	0,00
7,92	40,91	0,01	8,32	38,94	0,01	8,72	37,16	0,01
7,93	40,86	0,01	8,33	38,90	0,01	8,73	37,11	0,01
7,94	40,81	0,02	8,34	38,85	0,02	8,74	37,07	0,02
7,95	40,76	0,02	8,35	38,80	0,02	8,75	37,03	0,02
7,96	40,70	0,03	8,36	38,76	0,03	8,76	36,99	0,02
7,97	40,65	0,03	8,37	38,71	0,03	8,77	36,94	0,03
7,98	40,60	0,04	8,38	38,66	0,04	8,78	36,90	0,03
7,99	40,55	0,05	8,39	38,62	0,04	8,79	36,86	0,04

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
8,80	36,82		9,20	35,22		9,60	33,75	
8,81	36,78	0,00	9,21	35,18	0,00	9,61	33,72	0,00
8,82	36,74	0,01	9,22	35,14	0,01	9,62	33,68	0,01
8,83	36,69	0,01	9,23	35,10	0,01	9,63	33,64	0,01
8,84	36,65	0,02	9,24	35,07	0,01	9,64	33,61	0,01
8,85	36,61	0,02	9,25	35,03	0,02	9,65	33,58	0,02
8,86	36,57	0,02	9,26	34,99	0,02	9,66	33,54	0,02
8,87	36,53	0,03	9,27	34,95	0,02	9,67	33,52	0,02
8,88	36,49	0,03	9,28	34,91	0,03	9,68	33,47	0,03
8,89	36,45	0,04	9,29	34,88	0,03	9,69	33,44	0,03
8,90	36,40		9,30	34,84		9,70	33,40	
8,91	36,36	0,00	9,31	34,80	0,00	9,71	33,37	0,00
8,92	36,32	0,01	9,32	34,76	0,01	9,72	33,33	0,01
8,93	36,28	0,01	9,33	34,73	0,01	9,73	33,31	0,01
8,94	36,24	0,02	9,34	34,69	0,01	9,74	33,27	0,01
8,95	36,20	0,02	9,35	34,65	0,02	9,75	33,23	0,02
8,96	36,16	0,02	9,36	34,62	0,02	9,76	33,20	0,02
8,97	36,12	0,03	9,37	34,58	0,02	9,77	33,16	0,02
8,98	36,08	0,03	9,38	34,54	0,03	9,78	33,13	0,03
8,99	36,04	0,04	9,39	34,51	0,03	9,79	33,10	0,03
9,00	36,00		9,40	34,47		9,80	33,06	
9,01	35,96	0,00	9,41	34,43	0,00	9,81	33,03	0,00
9,02	35,92	0,01	9,42	34,40	0,01	9,82	32,99	0,01
9,03	35,88	0,01	9,43	34,36	0,01	9,83	32,96	0,01
9,04	35,84	0,02	9,44	34,32	0,01	9,84	32,93	0,01
9,05	35,80	0,02	9,45	34,29	0,02	9,85	32,89	0,02
9,06	35,76	0,02	9,46	34,25	0,02	9,86	32,86	0,02
9,07	35,72	0,03	9,47	34,21	0,02	9,87	32,83	0,02
9,08	35,68	0,03	9,48	34,18	0,03	9,88	32,79	0,03
9,09	35,64	0,03	9,49	34,15	0,03	9,89	32,76	0,03
9,10	35,60		9,50	34,11		9,90	32,73	
9,11	35,56	0,00	9,51	34,07	0,00	9,91	32,69	0,00
9,12	35,53	0,01	9,52	34,03	0,01	9,92	32,66	0,01
9,13	35,49	0,01	9,53	34,00	0,01	9,93	32,63	0,01
9,14	35,45	0,01	9,54	33,96	0,01	9,94	32,60	0,01
9,15	35,41	0,02	9,55	33,93	0,02	9,95	32,56	0,02
9,16	35,37	0,02	9,56	33,89	0,02	9,96	32,53	0,02
9,17	35,33	0,02	9,57	33,86	0,02	9,97	32,50	0,02
9,18	35,29	0,03	9,58	33,82	0,03	9,98	32,46	0,03
9,19	35,26	0,03	9,59	33,79	0,03	9,99	32,43	0,03

Tafel Nr. V.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $\frac{0{,}0355\ (o + u - 2m)}{o - u}$.

o — u	o + u — 2m									
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
1,0	0,14	0,28	0,43	0,57	0,71	0,85	1,00	1,14	1,28	1,42
1,05	0,13	0,26	0,41	0,54	0,68	0,82	0,95	1,09	1,22	1,36
1,1	0,13	0,26	0,39	0,52	0,65	0,78	0,91	1,04	1,17	1,30
1,15	0,12	0,25	0,37	0,50	0,62	0,74	0,87	1,00	1,12	1,24
1,2	0,12	0,24	0,36	0,47	0,59	0,71	0,83	0,95	1,07	1,19
1,25	0,11	0,23	0,34	0,46	0,57	0,68	0,80	0,91	1,03	1,14
1,3	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99	1,10
1,35	0,11	0,21	0,32	0,42	0,53	0,63	0,74	0,84	0,95	1,06
1,4	0,10	0,20	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,92	1,02
1,45	0,10	0,19	0,30	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,98
1,5	0,10	0,19	0,29	0,38	0,47	0,57	0,67	0,76	0,86	0,95
1,6	0,09	0,18	0,27	0,36	0,44	0,53	0,62	0,71	0,80	0,89
1,7	0,08	0,17	0,25	0,34	0,42	0,50	0,59	0,67	0,75	0,84
1,8	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,47	0,55	0,63	0,71	0,79
1,9	0,07	0,15	0,22	0,30	0,38	0,45	0,53	0,60	0,67	0,75
2,0	0,07	0,14	0,21	0,28	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71
2,1	0,07	0,13	0,20	0,27	0,34	0,41	0,47	0,55	0,61	0,68
2,2	0,06	0,13	0,19	0,26	0,32	0,39	0,45	0,52	0,58	0,65
2,3	0,06	0,12	0,19	0,25	0,31	0,37	0,43	0,50	0,56	0,62
2,4	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59
2,6	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,33	0,38	0,44	0,49	0,55
2,8	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,36	0,41	0,46	0,51
3,0	0,05	0,09	0,14	0,19	0,24	0,28	0,33	0,38	0,43	0,47
3,5	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,33	0,37	0,41
4,0	0,04	0,07	0,11	0,14	0,18	0,21	0,25	0,28	0,32	0,36
4,5	0,03	0,06	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25	0,29	0,32
5,0	0,03	0,06	0,09	0,11	0,14	0,17	0,20	0,23	0,26	0,28
6,0	0,02	0,05	0,07	0,09	0,12	0,14	0,17	0,19	0,21	0,24
7,0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
8,0	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11	0,12	0,14	0,16	0,18
9,0	0,01	0,03	0,05	0,06	0,08	0,09	0,11	0,13	0,14	0,16
10,0	0,01	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	0,13	0,14

o — u	o + u — 2m									
	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
1,0	1,57	1,71	1,85	1,99	2,14	2,28	2,42	2,56	2,70	2,85
1,05	1,50	1,63	1,76	1,90	2,04	2,17	2,31	2,40	2,58	2,72
1,1	1,42	1,55	1,68	1,81	1,94	2,07	2,20	2,33	2,46	2,59
1,15	1,36	1,49	1,60	1,74	1,86	1,98	2,11	2,23	2,36	2,48
1,2	1,31	1,42	1,54	1,66	1,78	1,90	2,02	2,14	2,26	2,37
1,25	1,25	1,37	1,48	1,60	1,71	1,82	1,94	2,05	2,17	2,28
1,3	1,20	1,31	1,42	1,53	1,64	1,75	1,86	1,97	2,08	2,19
1,35	1,16	1,26	1,37	1,48	1,58	1,69	1,79	1,90	2,00	2,11
1,4	1,12	1,22	1,32	1,42	1,52	1,63	1,73	1,83	1,93	2,03
1,45	1,08	1,18	1,28	1,38	1,47	1,57	1,67	1,77	1,87	1,97
1,5	1,04	1,14	1,24	1,33	1,42	1,52	1,61	1,71	1,81	1,90
1,6	0,98	1,07	1,16	1,25	1,33	1,42	1,51	1,60	1,69	1,78
1,7	0,92	1,01	1,09	1,17	1,26	1,34	1,42	1,51	1,59	1,68
1,8	0,87	0,96	1,04	1,11	1,19	1,26	1,34	1,42	1,50	1,58
1,9	0,82	0,90	0,98	1,05	1,12	1,20	1,27	1,35	1,42	1,50
2,0	0,78	0,85	0,92	1,00	1,07	1,14	1,21	1,28	1,35	1,42
2,1	0,75	0,81	0,88	0,95	1,02	1,09	1,15	1,22	1,29	1,35
2,2	0,71	0,78	0,84	0,91	0,97	1,04	1,10	1,17	1,23	1,29
2,3	0,68	0,74	0,80	0,87	0,93	1,00	1,05	1,12	1,18	1,24
2,4	0,65	0,71	0,77	0,83	0,89	0,95	1,01	1,07	1,13	1,19
2,6	0,60	0,66	0,71	0,77	0,82	0,87	0,93	0,99	1,04	1,10
2,8	0,56	0,61	0,66	0,71	0,76	0,81	0,86	0,91	0,97	1,02
3,0	0,52	0,57	0,62	0,66	0,71	0,76	0,81	0,85	0,90	0,95
3,5	0,45	0,49	0,53	0,57	0,61	0,65	0,69	0,73	0,77	0,81
4,0	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57	0,60	0,64	0,68	0,71
4,5	0,35	0,38	0,41	0,44	0,48	0,51	0,54	0,57	0,60	0,63
5,0	0,31	0,34	0,37	0,40	0,43	0,45	0,48	0,51	0,54	0,57
6,0	0,26	0,28	0,31	0,33	0,36	0,38	0,40	0,43	0,45	0,47
7,0	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,39	0,41
8,0	0,20	0,21	0,23	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
9,0	0,17	0,19	0,21	0,22	0,24	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32
10,0	0,16	0,17	0,18	0,20	0,21	0,23	0,24	0,25	0,27	0,28

Tafel Nr. VI.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $- \frac{0,0031\ (h - u)^2}{o - u}$.

o — u	h — u									
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
1,0	0,05	0,11	0,20	0,31	0,45	0,61	0,80	1,00	1,24	1,50
1,05	0,05	0,10	0,19	0,30	0,43	0,58	0,76	0,96	1,18	1,43
1,1	0,05	0,10	0,18	0,28	0,41	0,55	0,72	0,91	1,13	1,36
1,15	0,04	0,10	0,17	0,27	0,39	0,53	0,69	0,87	1,08	1,31
1,2	0,04	0,09	0,16	0,26	0,37	0,51	0,66	0,84	1,03	1,25
1,25	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,80	1,00	1,20
1,3	0,04	0,09	0,15	0,24	0,34	0,47	0,61	0,77	0,95	1,15
1,35	0,04	0,08	0,15	0,23	0,33	0,45	0,59	0,74	0,92	1,11
1,4	0,04	0,08	0,14	0,22	0,32	0,43	0,57	0,72	0,89	1,07
1,45	0,03	0,08	0,14	0,21	0,31	0,42	0,55	0,69	0,86	1,04
1,5	0,03	0,08	0,13	0,20	0,30	0,40	0,53	0,67	0,83	1,00
1,6	0,03	0,07	0,12	0,19	0,28	0,38	0,50	0,63	0,77	0,94
1,7	0,03	0,07	0,12	0,18	0,26	0,36	0,47	0,59	0,73	0,88
1,8	0,03	0,06	0,11	0,17	0,25	0,34	0,44	0,56	0,69	0,83
1,9	0,03	0,06	0,10	0,16	0,24	0,32	0,42	0,53	0,65	0,79
2,0	0,02	0,06	0,10	0,16	0,22	0,30	0,40	0,50	0,64	0,75
2,1	0,02	0,05	0,09	0,15	0,21	0,29	0,38	0,48	0,59	0,72
2,2	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	0,28	0,36	0,46	0,56	0,68
2,3	0,02	0,05	0,09	0,14	0,19	0,26	0,34	0,44	0,54	0,65
2,4	0,02	0,05	0,08	0,13	0,19	0,25	0,33	0,42	0,52	0,62
2,6	0,02	0,04	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30	0,39	0,48	0,58
2,8	0,02	0,04	0,07	0,11	0,16	0,22	0,28	0,36	0,44	0,54
3,0	0,02	0,04	0,07	0,10	0,15	0,20	0,26	0,33	0,41	0,50
3,5	0,01	0,03	0,06	0,09	0,13	0,17	0,23	0,29	0,35	0,43
4,0	0,01	0,03	0,05	0,08	0,11	0,15	0,20	0,24	0,31	0,37
4,5	0,01	0,03	0,04	0,07	0,10	0,13	0,18	0,22	0,28	0,33
5,0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,09	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30
6,0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,10	0,13	0,17	0,21	0,25
7,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,09	0,11	0,14	0,18	0,21
8,0	0,01	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,13	0,16	0,19
9,0	0,01	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,17
10,0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15

Tafel Nr. VII.

Capillardepressionen der Barometer, in Millimetern ausgedrückt.

Halbm. der Röhre.	Höhe der Quecksilberkuppe in Millimetern.											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
mm												
1,0	1,268	2,460	3,516	4,396	5,085	—	—	—	—	—	—	—
1,2	0,876	1,715	2,484	3,162	3,728	4,190	—	—	—	—	—	—
1,4	0,638	1,256	1,836	2,363	2,825	3,218	3,542	—	—	—	—	—
1,6	0,484	0,955	1,404	1,820	2,196	2,528	2,812	3,050	—	—	—	—
1,8	0,378	0,747	1,103	1,437	1,746	2,024	2,270	2,483	—	—	—	—
2,0	0,302	0,598	0,885	1,158	1,413	1,648	1,859	2,046	2,348	—	—	—
2,2	0,245	0,487	0,723	0,948	1,161	1,360	1,541	1,705	1,978	—	—	—
2,4	0,203	0,403	0,599	0,787	0,966	1,135	1,292	1,436	1,680	1,866	—	—
2,6	0,170	0,337	0,502	0,661	0,813	0,958	1,093	1,218	1,436	1,608	—	—
2,8	0,143	0,285	0,425	0,560	0,691	0,815	0,932	1,041	1,235	1,392	1,511	—
3,0	0,122	0,243	0,362	0,478	0,591	0,698	0,800	0,896	1,068	1,210	1,322	—
3,2	0,105	0,209	0,312	0,412	0,509	0,602	0,691	0,776	0,928	1,057	1,161	1,238
3,4	0,091	0,181	0,269	0,356	0,441	0,523	0,601	0,675	0,810	0,926	1,021	1,095
3,6	0,079	0,157	0,234	0,310	0,384	0,455	0,524	0,590	0,710	0,814	0,901	0,970
3,8	0,069	0,137	0,205	0,271	0,336	0,399	0,459	0,517	0,624	0,718	0,797	0,861
4,0	0,060	0,120	0,180	0,238	0,295	0,350	0,404	0,455	0,551	0,635	0,707	0,766

Tafel Nr. VIII.

Erste hypsometrische Tafel: Werthe von A und A′.

T + t. R⁰.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.	T + t. R⁰.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.	T + t. R⁰.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.
— 16⁰	4,24976	4,73809	— 3⁰	4,26301	4,75134	+ 10⁰	4,27587	4,76420
— 15	4,25079	4,73912	— 2	4,26401	4,75234	+ 11	4,27684	4,76517
— 14	4,25182	4,74015	— 1	4,26501	4,75334	+ 12	4,27781	4,76614
— 13	4,25285	4,74118	0	4,26601	4,75434	+ 13	4,27878	4,76711
— 12	4,25388	4,74221	+ 1	4,26701	4,75533	+ 14	4,27975	4,76808
— 11	4,25490	4,74323	+ 2	4,26800	4,75632	+ 15	4,28071	4,76904
— 10	4,25592	4,74425	+ 3	4,26899	4,75731	+ 16	4,28167	4,77000
— 9	4,25694	4,74527	+ 4	4,26998	4,75830	+ 17	4,28263	4,77096
— 8	4,25796	4,74629	+ 5	4,27097	4,75929	+ 18	4,28359	4,77192
— 7	4,25897	4,74730	+ 6	4,27196	4,76028	+ 19	4,28455	4,77288
— 6	4,25998	4,74831	+ 7	4,27294	4,76126	+ 20	4,28550	4,77383
— 5	4,26099	4,74932	+ 8	4,27392	4,76224	+ 21	4,28645	4,77478
— 4	4,26200	4,75033	+ 9	4,27490	4,76322	+ 22	4,28740	4,77573
— 3	4,26301	4,75134	+ 10	4,27587	4,76420	+ 23	4,28835	4,77668

T + t. R°.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.	T + t. R°.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.	T + t. R°.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.
+ 23°	4,28835	4,77668	+ 32°	4,29680	4,78513	+ 41°	4,30508	4,79342
+ 24	4,28930	4,77763	+ 33	4,29773	4,78606	+ 42	4,30599	4,79433
+ 25	4,29025	4,77858	+ 34	4,29866	4,78699	+ 43	4,30690	4,79524
+ 26	4,29119	4,77952	+ 35	4,29958	4,78791	+ 44	4,30781	4,79614
+ 27	4,29213	4,78046	+ 36	4,30050	4,78883	+ 45	4,30871	4,79704
+ 28	4,29307	4,78140	+ 37	4,30142	4,78975	+ 46	4,30961	4,79794
+ 29	4,29401	4,78234	+ 38	4,30234	4,79067	+ 47	4,31051	4,79884
+ 30	4,29494	4,78327	+ 39	4,30326	4,79159	+ 48	4,31141	4,79974
+ 31	4,29587	4,78420	+ 40	4,30417	4,79251	+ 49	4,31231	4,80064
+ 32	4,29680	4,78513	+ 41	4,30508	4,79342	+ 50	4,31321	4,80153

Tafel Nr. IX.

Zweite hypsom. Tafel: Werthe von $\log G = \log (1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)$.

ψ +	log G.	ψ −	ψ +	log G.	ψ −	ψ +	log G.	ψ −	ψ +	log G.	ψ −	ψ +	log G.	ψ −
0°	0,00114	90°	10°	1,00107	80°	20°	0,00087	70°	30°	0,00057	60°	40°	0,00020	50°
1	114	89	11	106	79	21	85	69	31	54	59	41	16	49
2	114	88	12	104	78	22	82	68	32	50	58	42	12	48
3	114	87	13	103	77	23	79	67	33	46	57	43	8	47
4	113	86	14	101	76	24	76	66	34	43	56	44	4	46
5	112	85	15	99	75	25	73	65	35	39	55	45	0	45
6	112	84	16	97	74	26	70	64	36	35	54			
7	111	83	17	95	73	27	67	63	37	31	53			
8	110	82	18	92	72	28	64	62	38	28	52			
9	109	81	19	90	71	29	60	61	39	24	51			

Tafel Nr. X.

Dritte hypsometrische Tafel: Werthe von $\log Z = \log \left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)$ in Einheiten der 5. Decimale.

log h.	0m	100m	200m	300m	400m	500m	600m	700m	800m	900m	1000m	1200m	1500m	2000m	log h′.
2,0	1	2	3	5	6	8	9	10	12	13	14	17	21	28	2,5
2,2	1	2	4	5	7	8	9	11	12	13	15	17	22	28	2,7
2,4	2	3	4	6	7	9	10	11	13	14	15	18	22	29	2,9
2,6	3	4	5	7	8	10	11	12	14	15	16	19	23	30	3,1
2,8	4	6	7	9	10	11	13	14	15	17	18	21	25	32	3,3
3,0	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	23	27	34	3,5
3,2	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	25	27	31	38	3,7
3,4	17	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31	34	38	44	3,9
3,6	27	29	30	31	33	34	35	37	38	39	41	44	48	54	4,1
3,8	43	44	46	47	48	50	51	52	54	55	56	59	64	70	4,3
4,0	68	69	71	72	73	75	76	78	79	80	82	85	89	95	4,5

Tafel Nr. XI.

Vierte hypsometrische Tafel: Spannung des Wasserdampfs.

A. Achtzigtheiliges Thermometer und Pariser Linien.

Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.
	'''		'''		'''		'''		'''		'''		'''
− 15°	0,453	− 9°	0,846	− 3°	1,518	+ 3°	2,628	+ 9°	4,393	+ 15°	7,134	+ 21°	11,259
− 14	0,504	− 8	0,935	− 2	1,669	+ 4	2,869	+ 10	4,775	+ 16	7,712	+ 22	12,119
− 13	0,560	− 7	1,032	− 1	1,830	+ 5	3,130	+ 11	5,179	+ 17	8,330	+ 23	13,034
− 12	0,622	− 6	1,139	0	2,006	+ 6	3,412	+ 12	5,620	+ 18	8,992	+ 24	14,009
− 11	0,690	− 5	1,255	+ 1	2,197	+ 7	3,715	+ 13	6,089	+ 19	9,699	+ 25	15,048
− 10	0,764	− 4	1,381	+ 2	2,403	+ 8	4,046	+ 14	6,593	+ 20	10,454	+ 26	16,088
B. Hunderttheiliges Thermometer und Millimeter.													
	mm		mm		mm		mm		mm		mm		mm
− 15°	1,403	− 8°	2,471	− 1°	4,205	+ 6°	6,939	+ 13°	11,130	+ 20°	17,396	+ 27°	26,547
− 14	1,525	− 7	2,671	0	4,525	+ 7	7,436	+ 14	11,882	+ 21	18,505	+ 28	28,148
− 13	1,655	− 6	2,886	+ 1	4,867	+ 8	7,964	+ 15	12,677	+ 22	19,675	+ 29	29,832
− 12	1,796	− 5	3,115	+ 2	5,231	+ 9	8,525	+ 16	13,519	+ 23	20,909	+ 30	31,602
− 11	1,947	− 4	3,361	+ 3	5,619	+ 10	9,126	+ 17	14,409	+ 24	22,211	+ 31	33,464
− 10	2,109	− 3	3,624	+ 4	6,032	+ 11	9,751	+ 18	15,351	+ 25	23,582	+ 32	35,419
− 9	2,284	− 2	3,905	+ 5	6,471	+ 12	10,421	+ 19	16,345	+ 26	25,026	+ 33	37,473

Tafel Nr. XII.

Fünfte hypsometrische Tafel: Werthe von μ (t — t') b.

A. Achtzigtheiliges Thermometer und Pariser Linien.

b.	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''
240	0,24	0,48	0,72	0,96	1,20	1,44	1,68	1,92	2,16	2,40
250	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
260	0,26	0,52	0,78	1,04	1,30	1,56	1,82	2,08	2,34	2,60
270	0,27	0,54	0,81	1,08	1,35	1,62	1,89	2,16	2,43	2,70
280	0,28	0,56	0,84	1,12	1,40	1,68	1,96	2,24	2,52	2,80
290	0,29	0,58	0,87	1,16	1,45	1,74	2,03	2,32	2,61	2,90
300	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00
310	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	1,86	2,17	2,48	2,79	3,10
320	0,32	0,64	0,96	1,28	1,60	1,92	2,24	2,56	2,88	3,20
330	0,33	0,66	0,99	1,32	1,65	1,98	2,31	2,64	2,97	3,30
340	0,34	0,68	1,02	1,36	1,70	2,04	2,38	2,72	3,06	3,40
B. Hunderttheiliges Thermometer und Millimeter.										
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
550	0,44	0,88	1,32	1,76	2,20	2,64	3,08	3,52	3,96	4,40
570	0,46	0,91	1,37	1,82	2,28	2,74	3,19	3,65	4,10	4,56
590	0,47	0,94	1,42	1,89	2,36	2,83	3,30	3,78	4,25	4,72
610	0,49	0,98	1,46	1,95	2,44	2,93	3,41	3,90	4,39	4,88

b.	1⁰	2⁰	3⁰	4⁰	5⁰	6⁰	7⁰	8⁰	9⁰	10⁰
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
630	0,50	1,01	1,51	2,01	2,52	3,02	3,53	4,03	4,53	5,04
650	0,52	1,04	1,56	2,08	2,60	3,12	3,64	4,16	4,68	5,20
670	0,53	1,07	1,61	2,14	2,68	3,21	3,75	4,29	4,82	5,36
690	0,55	1,10	1,65	2,21	2.76	3,31	3,86	4,41	4,97	5,52
710	0,57	1,13	1,70	2,27	2,84	3,41	3,97	4,54	5,11	5,68
730	0,58	1,17	1,75	2,33	2,92	3,50	4,09	4,67	5,25	5,84
750	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,46	6,00
770	0,62	1,23	1,85	2,46	3,08	3,69	4,31	4,93	5,54	6,16

Tafel Nr. XIII.

Sechste hypsometrische Tafel: Werthe von log $(1 + \frac{3}{8}\varphi)$.[1]

A. Luft- und Dunstdruck in Pariser Linien.

b.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
'''										
240	0,00068	0,00136	0,00203	0,00271	0,00338	0,00405	0,00472	0,00540	0,00606	0,00673
250	65	130	195	260	324	389	453	518	582	646
260	63	125	188	250	312	374	437	498	560	622
270	60	121	181	241	301	362	422	482	543	603
280	58	116	174	233	291	349	407	465	523	582
290	56	112	168	225	281	337	393	449	505	562
300	54	108	163	217	271	326	380	434	486	543
310	52	105	157	210	263	315	368	420	473	525
320	51	102	153	203	254	305	356	407	458	509
330	49	99	148	197	247	296	345	395	444	493
340	48	96	114	191	239	287	335	383	431	479

B. Luft- und Dunstdruck in Millimetern.

b.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mm										
550	0,00030	0,00059	0,00089	0,00118	0,00148	0,00177	0,00207	0,00236	0,00266	0,00295
570	29	57	86	115	143	171	200	228	257	285
590	28	55	83	110	138	165	193	220	248	275
610	27	53	80	107	133	160	187	213	240	267
630	26	52	77	103	129	155	181	207	233	258
650	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
670	24	48	73	97	121	146	170	194	219	243
690	23	47	71	94	118	141	165	189	212	236
710	23	46	69	92	115	138	160	183	206	229
730	22	45	67	89	111	134	156	178	201	223
750	22	43	65	87	108	130	152	174	195	217
770	21	42	63	84	106	127	148	169	190	211

[1] Vergl. die Ersatztafel (IV) auf Seite 337 dieses Bands, welche statt XI, XII, XIII dann anzuwenden ist, wenn keine Feuchtigkeitsbeobachtungen vorligene.

Tafel Nr. XIV.

Für den Stromquadranten; Werthe von $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$.

α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$
1° 0′	9,12096	0,1321	8° 0′	9,57390	0,3749	15° 0′	9,71402	0,5176
10	9,15444	0,1427	10	9,57844	0,3788	10	9,71654	0,5206
20	9,18344	0,1526	20	9,58288	0,3827	20	9,71903	0,5236
30	9,20903	0,1618	30	9,58725	0,3866	30	9,72149	0,5266
40	9,23192	0,1706	40	9,59153	0,3904	40	9,72393	0,5296
50	9,25263	0,1789	50	9,59573	0,3942	50	9,72635	0,5325
2 0	9,27154	0,1869	9 0	9,59985	0,3980	16 0	9,72875	0,5355
10	9,28894	0,1945	10	9,60391	0,4017	10	9,73112	0,5384
20	9,30504	0,2019	20	9,60789	0,4054	20	9,73347	0,5413
30	9,32004	0,2089	30	9,61180	0,4091	30	9,73580	0,5442
40	9,33408	0,2158	40	9,61565	0,4127	40	9,73811	0,5471
50	9,34726	0,2225	50	9,61943	0,4163	50	9,74040	0,5500
3 0	9,35970	0,2289	10 0	9,62316	0,4199	17 0	9,74267	0,5529
10	9,37146	0,2352	10	9,62682	0,4235	10	9,74492	0,5558
20	9,38262	0,2413	20	9,63043	0,4270	20	9,74715	0,5587
30	9,39424	0,2473	30	9,63398	0,4305	30	9,74936	0,5615
40	9,40337	0,2531	40	9,63748	0,4340	40	9,75155	0,5643
50	9,41305	0,2589	50	9,64093	0,4374	50	9,75373	0,5672
4 0	9,42232	0,2644	11 0	9,64432	0,4409	18 0	9,75589	0,5700
10	9,43121	0,2699	10	9,64767	0,4443	10	9,75803	0,5728
20	9,43976	0,2753	20	9,65097	0,4477	20	9,76015	0,5756
30	9,44799	0,2805	30	9,65423	0,4511	30	9,76226	0,5784
40	9,45592	0,2857	40	9,65743	0,4544	40	9,76435	0,5812
50	9,46358	0,2908	50	9,66061	0,4577	50	9,76642	0,5840
5 0	9,47097	0,2958	12 0	9,66373	0,4610	19 0	9,76848	0,5868
10	9,47813	0,3007	10	9,66682	0,4643	10	9,77053	0,5896
20	9,48506	0,3055	20	9,66987	0,4676	20	9,77256	0,5923
30	9,49179	0,3103	30	9,67288	0,4708	30	9,77457	0,5951
40	9,49831	0,3150	40	9,67585	0,4741	40	9,77657	0,5978
50	9,50465	0,3196	50	9,67878	0,4773	50	9,77856	0,6006
6 0	9,51081	0,3242	13 0	9,68168	0,4805	20 0	9,78053	0,6033
10	9,51680	0,3287	10	9,68454	0,4837	10	9,78249	0,6060
20	9,52264	0,3332	20	9,68738	0,4868	20	9,78443	0,6087
30	9,52833	0,3375	30	9,69017	0,4900	30	9,78637	0,6115
40	9,53387	0,3419	40	9,69294	0,4931	40	9,78829	0,6142
50	9,53929	0,3462	50	9,69568	0,4962	50	9,79019	0,6169
7 0	9,54457	0,3504	14 0	9,69838	0,4993	21 0	9,79209	0,6196
10	9,54973	0,3546	10	9,70106	0,5024	10	9,79397	0,6223
20	9,55478	0,3587	20	9,70371	0,5055	20	9,79584	0,6249
30	9,55971	0,3628	30	9,70633	0,5085	30	9,79770	0,6276
40	9,56454	0,3669	40	9,70892	0,5116	40	9,79954	0,6303
50	9,56927	0,3709	50	9,71147	0,5146	50	9,80138	0,6330

α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$
22° 0'	9,80320	0,6356	29° 40'	9,87779	0,7547	44° 0'	9,99242	0,9827
10	9,80502	0,6383	50	9,87926	0,7573	30	9,99621	0,9913
20	9,80682	0,6409	30 0	9,88072	0,7598	45 0	0,00000	1,0000
30	9,80861	0,6436	10	9,88217	0,7624	30	0,00379	1,0088
40	9,81039	0,6462	20	9,88362	0,7649	46 0	0,00758	1,0176
50	9,81216	0,6489	30	9,88507	0,7675	30	0,01137	1,0265
23 0	9,81392	0,6515	40	9,88651	0,7700	47 0	0,01517	1,0355
10	9,81567	0,6541	50	9,88795	0,7726	30	0,01897	1,0446
20	9,81742	0,6568	31 0	9,88938	0,7751	48 0	0,02278	1,0539
30	9,81915	0,6594	10	9,89081	0,7777	30	0,02659	1,0631
40	9,82087	0,6620	20	9,89224	0,7803	49 0	0,03042	1,0726
50	9,82258	0,6646	30	9,89366	0,7828	30	0,03425	1,0821
24 0	9,82429	0,6672	40	9,89507	0,7854	50 0	0,03809	1,0917
10	9,82598	0,6698	50	9,89648	0,7879	30	0,04195	1,1014
20	9,82767	0,6725	32 0	9,89789	0,7905	51 0	0,04581	1,1113
30	9,82935	0,6751	10	9,89930	0,7930	30	0,04969	1,1212
40	9,83102	0,6777	20	9,90070	0,7956	52 0	0,05359	1,1313
50	9,83268	0,6803	30	9,90209	0,7982	30	0,05751	1,1415
25 0	9,83433	0,6829	40	9,90348	0,8007	53 0	0,06144	1,1520
10	9,83598	0,6855	50	9,90487	0,8033	30	0,06539	1,1625
20	9,83762	0,6880	33 0	9,90626	0,8059	54 0	0,06937	1,1732
30	9,83925	0,6906	10	9,90764	0,8084	30	0,07336	1,1840
40	9,84087	0,6932	20	9,90901	0,8110	55 0	0,07738	1,1950
50	9,84248	0,6958	30	9,91039	0,8136	30	0,08143	1,2062
26 0	9,84409	0,6984	40	9,91176	0,8161	56 0	0,08550	1,2176
10	9,84569	0,7009	50	9,91313	0,8187	30	0,08961	1,2292
20	9,84728	0,7035	34 0	9,91449	0,8213	57 0	0,09374	1,2409
30	9,84887	0,7061	30	9,91856	0,8290	30	0,09790	1,2529
40	9,85044	0,7087	35 0	9,92261	0,8368	58 0	0,10210	1,2650
50	9,85202	0,7112	30	9,92663	0,8446	30	0,10634	1,2774
27 0	9,85358	0,7138	36 0	9,93063	0,8524	59 0	0,11061	1,2901
10	9,85514	0,7164	30	9,93460	0,8602	30	0,11492	1,3029
20	9,85669	0,7189	37 0	9,93855	0,8681	60 0	0,11928	1,3161
30	9,85824	0,7215	30	9,94249	0,8760	30	0,12368	1,3295
40	9,85977	0,7240	38 0	9,94640	0,8839	61 0	0,12812	1,3431
50	9,86131	0,7266	30	9,95030	0,8919	30	0,13262	1,3571
28 0	9,86283	0,7292	39 0	9,95418	0,8999	62 0	0,13716	1,3714
10	9,86436	0,7317	30	9,95805	0,9079	30	0,14171	1,3858
20	9,86587	0,7343	40 0	9,96190	0,9160	63 0	0,14642	1,4010
30	9,86738	0,7368	30	9,96575	0,9242	30	0,15113	1,4162
40	9,86888	0,7394	41 0	9,96958	0,9323	64 0	0,15591	1,4319
50	9,87038	0,7420	30	9,97340	0,9406	30	0,16075	1,4480
29 0	9,87187	0,7445	42 0	9,97722	0,9489	65 0	0,16566	1,4644
10	9,87336	0,7471	30	9,98102	0,9572	30	0,17065	1,4813
20	9,87484	0,7496	43 0	9,98483	0,9657	66 0	0,17571	1,4987
30	9,87632	0,7522	30	9,98862	0,9741	30	0,18085	1,5165

Digitized by Google

α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	α	$\log\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$
67° 0′	0,18607	1,5349	70° 0′	0,21946	1,6575	73° 0′	0,25733	1,8086
30	0,19139	1,5538	30	0,22542	1,6804	30	0,26420	1,8370
68 0	0,19679	1,5732	71 0	0,23151	1,7042	74 0	0,27125	1,8675
30	0,20230	1,5933	30	0,23774	1,7288	30	0,27850	1,8989
69 0	0,20791	1,6140	72 0	0,24411	1,7543	75 0	0,28597	1,9318
30	0,21363	1,6354	30	0,25064	1,7809	30	0,29367	1,9664
						76 0	0,30161	2,0027

Tafel Nr. XV.

Für den Reichenbach'schen Strommesser; Werthe von $\sqrt{h'}$.

h′	$\log\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h′	$\log\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h′	$\log\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$
0′,005	8,84948	0,0707	0′,21	9,66105	0,4582	0′,51	9,85382	0,7142
0,010	9,00000	0,1000	0,22	9,67117	0,4690	0,52	9,85799	0,7211
0,015	9,08778	0,1224	0,23	9,68088	0,4796	0,53	9,86213	0,7280
0,020	9,15045	0,1414	0,24	9,69011	0,4899	0,54	9,86617	0,7348
0,025	9,19893	0,1581	0,25	9,69897	0,5000	0,55	9,87017	0,7416
0,030	9,23855	0,1732	0,26	9,70748	0,5099	0,56	9,87407	0,7483
0,035	9,27207	0,1871	0,27	9,71567	0,5196	0,57	9,87789	0,7549
0,040	9,30103	0,2000	0,28	9,72354	0,5291	0,58	9,88167	0,7615
0,045	9,32674	0,2122	0,29	9,73118	0,5385	0,59	9,88542	0,7681
0,050	9,34947	0,2236	0,30	9,73846	0,5476	0,60	9,88908	0,7746
0,055	9,37014	0,2345	0,31	9,74562	0,5567	0,61	9,89265	0,7810
0,060	9,38881	0,2448	0,32	9,75251	0,5656	0,62	9,89619	0,7874
0,065	9,40637	0,2549	0,33	9,75921	0,5744	0,63	9,89933	0,7931
0,070	9,42259	0,2646	0,34	9,76574	0,5831	0,64	9,90309	0,8000
0,075	9,43743	0,2738	0,35	9,77203	0,5916	0,65	9,90644	0,8062
0,080	9,45148	0,2828	0,36	9,77815	0,6000	0,66	9,90977	0,8124
0,085	9,46464	0,2915	0,37	9,78405	0,6082	0,67	9,91302	0,8185
0,090	9,47712	0,3000	0,38	9,78986	0,6164	0,68	9,91624	0,8246
0,095	9,48883	0,3082	0,39	9,79553	0,6245	0,69	9,91939	0,8306
0,10	9,49996	0,3162	0,40	9,80099	0,6324	0,70	9,92252	0,8366
0,11	9,52283	0,3333	0,41	9,80638	0,6403	0,71	9,92562	0,8426
0,12	9,53958	0,3464	0,42	9,81164	0,6481	0,72	9,92865	0,8485
0,13	9,55690	0,3605	0,43	9,81670	0,6557	0,73	9,93166	0,8544
0,14	9,57299	0,3741	0,44	9,82171	0,6633	0,74	9,93460	0,8602
0,15	9,58805	0,3873	0,45	9,82659	0,6708	0,75	9,93752	0,8660
0,16	9,60206	0,4000	0,46	9,83136	0,6782	0,76	9,94037	0,8717
0,17	9,61521	0,4123	0,47	9,83601	0,6855	0,77	9,94325	0,8775
0,18	9,62757	0,4242	0,48	9,84061	0,6928	0,78	9,94606	0,8832
0,19	9,63929	0,4358	0,49	9,84510	0,7000	0,79	9,94880	0,8888
0,20	9,65050	0,4472	0,50	9,84948	0,7071	0,80	9,95153	0,8944

h'	log √h'	√h'	h'	log √h'	√h'	h'	log √h'	√h'
0',82	9,95689	0,9055	0',90	9,97718	0,9487	0',98	9,99559	0,9899
0,84	9,96213	0,9165	0,92	9,98191	0,9592	1,00	10,00000	1,0000
0,86	9,96727	0,9274	0,94	9,98655	0,9695	1,02	10,00430	1,010
0,88	9,97225	0,9381	0,96	9,99114	0,9798	1,04	10,00851	1,020

Tafel Nr. XVI.

Coordinaten für Kreisbögen; die Tangenten als Abscissen-Axen. [1]

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	100	125	150	175	200	250	300	350	400	450
10	0,51	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,17	0,15	0,14	0,12
20	2,02	1,62	1,34	1,15	1,00	0,81	0,67	0,58	0,51	0,45
30	4,61	3,66	3,04	2,59	2,27	1,83	1,51	1,29	1,12	1,11
40	8,35	6,58	5,44	4,64	4,04	3,23	2,68	2,30	2,01	1,78
50	13,40	10,44	8,58	7,30	6,35	5,06	4,20	3,59	3,14	2,79
60	20,00	15,35	12,53	10,61	9,22	7,31	6,07	5,19	4,53	4,02
70	28,59	21,44	17,34	14,61	12,64	10,00	8,29	7,08	6,18	5,48
80	40,00	28,96	23,12	19,36	16,70	13,15	10,87	9,27	8,09	7,17
90	56,41	38,26	30,00	24,92	21,40	16,77	13,82	11,77	10,27	9,10
100	.	50,00	38,20	31,39	26,80	20,87	17,16	14,59	12,71	11,26
110	.	65,63	48,02	38,90	32,97	25,51	20,90	17,74	15,43	13,66
120	.	.	60,00	47,62	40,00	30,69	25,05	21,22	18,43	16,30
130	.	.	.	57,85	48,02	36,46	29,63	25,04	21,72	19,19
140	.	.	.	.	57,17	42,88	34,68	29,22	25,31	22,34
150	.	.	.	.	67,72	50,00	40,20	33,78	29,19	25,74
160	.	.	.	.	80,00	57,91	46,23	38,72	33,39	29,41
170	.	.	.	.	.	66,67	52,82	44,06	37,93	33,35
180	.	.	.	.	.	76,52	60,00	49,84	42,79	37,56
190	.	.	.	.	.	.	67,84	56,07	48,12	42,08
200	.	.	.	.	.	.	76,40	62,78	53,59	46,89
Abscissen.	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
25	0,63	0,56	0,53	0,48	0,45	0,41	0,39	0,37	0,35	0,33
50	2,51	2,28	2,10	1,93	1,80	1,67	1,56	1,48	1,40	1,32
75	5,68	5,14	4,71	4,34	4,04	3,76	3,53	3,32	3,13	2,97
100	10,11	9,17	8,40	7,74	7,18	6,70	6,28	5,91	5,56	5,29
125	15,96	14,40	13,17	12,14	11,26	10,49	9,83	9,25	8,72	8,26

[1] Es versteht sich wohl von selbst, dass die Halbmesser und Coordinaten in einer und derselben Längeneinheit angegeben sind.

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
150	23,03	20,85	19,05	17,54	16,27	15,16	14,18	13,34	12,58	11,92
175	31,63	28,59	26,10	24,00	22,23	20,70	19,38	18,21	17,18	16,26
200	41,75	37,62	34,33	31,53	29,17	27,16	25,40	23,87	22,52	21,30
225	53,49	48,13	43,79	40,19	37,15	34,55	32,29	30,32	28,58	27,04
250	66,99	60,10	54,56	50,00	46,56	42,90	40,06	37,60	35,42	33,49
275	82,42	73,69	66,73	61,04	56,28	52,24	48,75	45,72	43,05	40,26
300	100,00	89,02	80,39	73,37	67,54	62,62	58,38	54,69	51,48	48,61
325	120,03	106,30	95,65	87,09	80,03	74,08	68,97	64,59	60,74	57,32
350	142,93	125,74	112,68	102,28	93,79	86,68	80,62	75,41	70,87	66,83
375	169,28	147,67	131,63	119,08	108,93	100,48	93,33	87,20	81,85	77,15
400	200,00	172,51	152,78	137,65	125,54	115,57	107,18	100,00	93,77	88,32
425	236,61	200,90	176,48	158,20	143,79	132,04	122,23	113,88	106,67	100,37
450	282,05	233,78	203,14	180,96	163,81	150,00	138,56	128,88	120,58	113,34
475	343,87	272,74	233,43	206,30	185,83	169,59	156,28	145,11	135,56	127,28
500	.	320,88	268,34	234,67	210,11	190,98	175,50	162,62	151,66	142,23
525	.	.	.	.	230,56	214,39	196,37	181,52	167,31	158,25
550	.	.	.	.	266,99	240,10	219,06	201,93	187,60	175,40
575	.	.	.	.	.	.	.	.	207,63	193,75
600	.	.	.	.	.	.	.	.	229,17	213,45
625	.	.	.	.	.	.	.	.	.	234,55

Abscissen.	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
50	1,25	1,14	1,04	0,96	0,89	0,83	0,78	0,73	0,70	0,66
100	5,00	4,55	4,17	3,85	3,58	3,33	3,13	2,94	2,78	2,63
150	11,30	10,28	9,41	8,68	8,06	7,52	7,05	6,63	6,26	5,93
200	20,22	18,33	16,79	15,48	14,36	13,39	12,55	11,80	11,14	10,56
250	31,78	28,79	26,33	24,27	22,50	20,98	19,65	18,48	17,45	16,52
300	46,06	41,70	38,10	35,09	32,52	30,30	28,37	26,68	25,18	23,83
350	63,26	57,17	52,17	48,00	44,45	41,40	38,75	36,42	34,36	32,51
400	83,48	75,31	68,63	63,07	58,36	54,32	50,81	47,73	45,00	42,58
450	106,92	96,26	87,57	80,37	74,29	69,09	64,58	60,64	57,16	54,06
500	133,98	120,20	109,13	100,00	92,33	85,78	80,13	75,19	70,84	66,97
550	164,84	147,30	133,46	122,08	112,56	104,47	97,50	91,43	86,09	81,35
600	200,00	178,04	160,77	146,74	135,09	125,23	116,76	109,40	102,94	97,23
650	240,08	212,59	191,29	174,70	160,04	140,15	137,98	129,17	121,46	114,64
700	.	.	225,32	202,03	187,57	173,35	161,25	150,81	141,69	133,65
750	.	.	.	.	217,84	200,96	186,67	174,38	163,69	154,29
800	.	.	.	.	.	231,14	215,36	200,00	187,55	176,63
850	.	.	.	.	.	.	.	227,76	213,34	200,74
900	.	.	.	.	.	.	.	.	241,15	226,68
950	.	.	.	.	,	.	.	.	.	254,55

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900
50	0,62	0,60	0,57	0,54	0,52	0,50	0,48	0,46	0,45	0,43
100	2,50	2,38	2 27	2,18	2,08	2,00	1,93	1,85	1,79	1,73
150	5,63	5,37	5,12	4,90	4,69	4,50	4,33	4,17	4,02	3,88
200	10,03	9,55	9,11	8,71	8,33	8,01	7,71	7,42	7,15	6,90
250	15,69	14,93	14,25	13,63	13,06	12,53	12,05	11,60	11,18	10,80
300	22,63	21,54	20,55	19,65	18,82	18,07	17,37	16,72	16,12	15,56
350	30,86	29,37	28,02	26,79	25,66	24,62	23,67	22,78	21,96	21,20
400	40,41	38,45	36,67	35,05	33,57	32,21	30,95	29,79	28,72	27,72
450	51,28	48,78	46,52	44,45	42,57	40,83	39,24	37,76	36,40	35,13
500	63,51	60,39	57,57	55,01	52,66	50,51	48,53	46,70	45,00	43,43
550	77,11	73,30	69,86	66,72	63,87	61,25	58,84	56,61	54,55	52,63
600	92,12	87,55	83,40	79,64	76,21	73,07	70,12	67,51	65,04	62,75
650	108,57	103,13	98,22	93,76	89,70	85,98	82,56	79,41	76,49	73,78
700	126,50	120,10	114,33	109,11	104,35	100,00	96,00	92,32	88,91	85,75
750	145,95	138,50	131,79	125,72	120,20	115,15	110,52	106,25	102,32	98,63
800	166,97	158,35	150,61	143,61	137,26	131,45	126,14	121,20	116,72	112,50
850	189,61	179,71	170,84	162,83	155,57	148,94	142,87	137,28	132,14	127,37
900	213,94	202,63	192,51	183,30	175,14	167,62	160,74	154 42	148,59	143,19
950	240,03	227,17	215,69	205,36	195,98	187,53	179,77	172,65	166,09	160,02
1000	267,95	253,38	240,41	228,77	218,26	208,71	200,00	192,01	184.66	177,87
1050	297,80	281,35	266,74	253,66	241,88	231,19	221,45	212,53	204,33	196,76
1100	.	.	294,74	280,10	266,93	255,01	244,16	234,23	225,15	216,72
1150	.	.	.	.	293,46	280,20	268,15	257,15	247,06	237,76
1200	.	.	.	.	.	.	293,49	281,32	270,18	259,92

Abscissen.	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900
50	0,42	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,33	0,32
100	1,67	1,61	1,56	1,52	1,47	1,43	1,39	1,35	1,32	1,28
150	3,77	3,63	3,52	3,41	3,31	3,22	3,13	3,04	2,96	2,89
200	6,67	6,46	6,26	6,07	5,89	5,72	5,56	5,41	5,26	5,13
250	10,43	10,10	9,78	9,48	9,20	8,94	8,69	8,46	8,23	8,02
300	15,04	14,20	14,09	13,66	13,26	12,88	12,52	12,18	11,87	11,56
350	20,49	19,82	19,20	18,99	18,06	17,55	17,05	16,59	16,15	15,75
400	26,79	25,92	25,10	24,33	23,61	22,93	22,29	21,68	21,11	20,57
450	33,94	32,83	31,80	30,83	29,91	29,05	28,24	27,47	26,74	26,05
500	41,96	40,59	39,30	38,10	36,97	35,90	34,89	33,94	33,04	32,18
550	50,85	49,18	47,62	46,16	44,78	43,49	42,26	41,11	40,01	38,91
600	60,61	58,62	56,75	55,00	53,36	51,81	50,35	48,97	47,67	46,43
650	71,26	68,91	66.71	64,65	62,71	60,89	59,17	57,54	56,00	54,55
700	82,81	80,07	77,50	75,10	72,81	70,71	68,71	66,82	65,03	63,33
750	95,26	92,09	89,13	86,36	83,75	81,30	78,99	76,81	74,75	72,80

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900
800	108,63	105,00	101,61	98,44	95,46	92,80	90,01	87,52	85,14	82,93
850	122,94	118,81	114,96	111,35	107,96	104,78	101,79	98,96	96,29	93,76
900	138,18	133,52	129,17	125,10	121,28	117,69	114,31	111,13	108,12	105,27
950	154,72	149,15	144,27	139,70	135,42	131,39	127,61	124,04	120,67	117,48
1000	171,57	165,72	160,26	155,16	150,38	145,90	141,68	137,70	133,94	130,39
1050	189,75	183,24	177,17	171,50	166,20	161,21	156,53	152,11	147,95	144,00
1100	208,94	201,73	195,00	188,73	182,86	177,85	172,17	167,30	162,69	158,34
1150	229,20	221,20	213,78	206,86	200,39	194,32	188,62	183,25	178,19	173,40
1200	250,45	241,68	233,52	225,92	218,80	212,14	205,89	200,00	194,45	189,17
1250	272,82	263,19	254,24	245,90	238,12	230,83	223,98	217,45	211,48	205,75
1300	.	.	275,96	266,85	258,34	250,39	242,92	235,90	229,29	223,05
1350	.	.	298,71	288,77	279,50	270,84	262,71	255,08	247,89	241,11
1400	.	.	322,50	311,69	301,61	292,20	283,38	275,10	267,30	259,95
1450	.	.	.	.	.	.	.	.	287,52	262,86
1500	.	.	.	.	.	.	.	.	308,58	299,96

Abscissen.	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900
50	0,31	0,31	0,30	0,29	0,28	0,28	0,27	0,27	0,26	0,26
100	1,25	1,22	1,19	1,16	1,14	1,11	1,09	1,06	1,04	1,02
150	2,81	2,75	2,68	2,62	2,56	2,50	2,43	2,40	2,34	2,30
200	5,00	4,88	4,77	4,65	4,55	4,45	4,36	4,26	4,16	4,08
250	7,82	7,63	7,45	7,27	7,11	6,95	6,80	6,65	6,51	6,38
300	11,27	10,99	10,73	10,48	10,24	10,01	9,79	9,59	9,39	9,19
350	15,34	14,97	14,61	14,27	13,94	13,63	13,33	13,05	12,78	12,52
400	20,05	19,56	19,09	18,65	18,22	17,81	17,42	17,05	16,70	16,35
450	25,39	24,77	24,18	23,61	23,07	22,56	22,06	21,59	21,14	20,71
500	31,36	30,60	29,92	29,19	28,50	27,86	27,26	26,67	26,11	25,58
550	37,99	37,06	36,17	35,32	34,51	33,74	33,00	32,29	31,61	30,97
600	45,26	44,14	43,08	42,07	41,10	40,18	39,30	38,45	37,65	36,87
650	53,17	51,85	50,60	49,41	48,28	47,19	46,16	45,16	44,21	43,30
700	61,73	60,20	58,84	57,36	56,04	54,78	53,57	52,42	51,32	50,26
750	70,94	69,18	67,51	65,91	64,39	62,94	61,55	60,23	58,97	57,74
800	80,82	78,81	76,90	75,07	73,34	71,68	70,10	68,59	67,14	65,75
850	91,36	89,09	86,91	84,85	82,88	81,01	79,22	77,50	75,86	74,29
900	102,56	100,00	97,56	95,24	93,04	90,92	88,90	86,98	85,13	83,36
950	114,45	111,58	108,85	106,26	103,78	101,45	99,17	97,01	94,95	92,97
1000	127,02	123,82	120,79	117,90	115,14	112,52	110,01	107,62	105,32	103,12
1050	140,27	136,73	133,37	130,17	127,10	124,21	121,44	118,79	116,25	113,82
1100	154,22	150,32	146,67	143,08	139,71	136,51	133,46	130,54	127,74	125,07
1150	168,33	164,58	160,51	156,63	152,94	149,42	146,07	142,86	139,80	136,86

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900
1200	184,25	179,54	175,08	170,85	166,80	162,93	159,28	155,77	152,42	149,22
1250	200,33	195,20	190,32	185,70	181,29	177,10	173,09	169,27	165,62	162,12
1300	217,15	211,56	206,25	201,22	196,43	191,87	187,57	183,36	179,40	175,60
1350	235,70	228,63	222,88	217,41	212,22	207,27	202,56	198,06	193,75	189,64
1400	253,00	246,43	240,20	234,29	228,67	223,32	218,22	213,35	208,70	204,26
1450	272,07	264,96	258,24	251,85	245,79	240,01	234,51	229,26	224,25	219,45
1500	291,90	284,24	276,99	270,11	263,58	257,36	251,44	245,79	240,40	235,24
1550	312,52	304,28	296,48	289,08	282,05	275,37	269,01	262,94	257,15	251,61
1600	333,94	325,08	316,70	308,76	301,22	294,05	287,23	280,72	274,52	273,92

Abscissen.	5000	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900
50	0,25	0,25	0,24	0,24	0,23	0,23	0,22	0,22	0,21	0,21
100	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	0,91	0,89	0,88	0,86	0,85
150	2,25	2,21	2,16	2,12	2,08	2,05	2,01	1,97	1,94	1,91
200	4,00	3,92	3,85	3,78	3,71	3,65	3,57	3,51	3,45	3,39
250	6,25	6,13	6,01	5,90	5,79	5,69	5,58	5,47	5,39	5,30
300	9,01	8,83	8,66	8,50	8,34	8,19	8,04	7,90	7,76	7,64
350	12,26	12,03	11,79	11,57	11,35	11,15	10,95	10,76	10,57	10,39
400	16,12	15,71	15,39	15,12	14,84	14,57	14,30	14,06	13,81	13,58
450	20,29	19,89	19,31	19,14	18,78	18,44	18,11	17,79	17,48	17,19
500	25,06	24,57	24,09	23,64	23,20	22,74	22,37	21,97	21,59	21,22
550	30,34	29,76	29,17	28,62	28,08	27,57	27,08	26,60	26,14	25,69
600	36,13	35,42	34,73	34,07	33,44	32,83	32,24	31,67	31,12	30,59
650	42,43	41,59	40,79	40,01	39,26	38,56	37,85	37,18	36,54	35,91
700	49,24	48,27	47,33	46,43	45,56	44,73	43,92	43,15	42,40	41,67
750	56,57	55,45	54,37	53,34	52,34	51,38	50,45	49,56	48,70	47,86
800	64,42	63,14	61,89	60,73	59,59	58,49	57,44	56,42	55,44	54,49
850	72,78	71,33	69,94	68,60	67,32	66,08	64,89	63,73	62,62	61,55
900	81,67	80,03	78,48	76,97	75,53	74,14	72,80	71,50	70,26	69,05
950	91,08	89,26	87,49	85,84	84,22	82,67	81,17	79,73	78,33	76,99
1000	101,02	99,00	97,06	95,19	93,40	91,67	90,01	88,40	86,96	85,36
1050	111,49	109,25	107,11	105,05	103,07	101,12	99,32	97,55	95,83	94,19
1100	122,50	120,04	117,68	115,41	112,22	111,12	109,10	107,15	105,27	103,45
1150	134,07	131,35	128,71	126,27	123,88	121,57	119,35	117,21	115,15	113,16
1200	146,14	143,19	140,36	137,60	135,02	132,51	130,08	127,75	125,50	123,32
1250	158,77	155,56	152,48	149,62	146,91	143,93	141,29	138,75	136,30	133,94
1300	171,96	168,47	165,12	161,89	158,79	155,85	152,98	150,23	147,57	145,00
1350	185,90	181,92	178,20	174,82	171,47	168,26	165,16	162,18	159,30	156,53
1400	200,00	195,92	191,99	188,25	184,64	181,17	177,84	174,60	171,50	168,51
1450	214,87	210,47	206,25	202,21	198,32	194,58	190,86	187,51	184,51	180,96

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	5000	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900
1500	230,30	225,58	221,04	216,69	212,51	208,51	204,63	200,91	197,32	193,86
1550	246,36	241,25	236,39	231,72	227,24	222,93	218,78	214,79	210,95	207,24
1600	262,91	257,48	252,28	247,28	242,48	237,87	233,44	229,17	225,06	221,09
1650	280,10	274,29	268,73	263,38	258,26	253,34	248,50	244,04	239,65	235,42
1700	297,88	291,68	285,74	280,04	274,58	269,32	264,37	259,41	254,73	250,22

Abscissen.	6000	6100	6200	6300	6400	6500	6600	6700	6800	6900
50	0,21	0,21	0,20	0,20	0,20	0,19	0,19	0,19	0,18	0,18
100	0,83	0,82	0,81	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73
150	1,88	1,84	1,82	1,79	1,76	1,73	1,71	1,68	1,65	1,63
200	3,33	3,28	3,23	3,18	3,13	3,08	3,03	2,99	2,94	2,90
250	5,21	5,13	5,04	4,96	4,89	4,81	4,74	4,67	4,60	4,53
300	7,50	7,38	7,26	7,15	7,03	6,93	6,82	6,72	6,70	6,53
350	10,22	10,05	9,89	9,73	9,58	9,44	9,29	9,15	9,01	8,88
400	13,35	13,13	12,92	12,71	12,51	12,42	12,13	11,95	11,78	11,60
450	16,90	16,62	16,35	16,09	15,84	15,60	15,36	15,13	14,91	14,69
500	20,87	20,53	20,19	19,87	19,56	19,26	18,97	18,68	18,41	18,14
550	25,26	24,85	24,44	24,05	23,68	23,31	22,96	22,61	22,28	21,96
600	30,08	29,58	29,10	28,64	28,19	27,75	27,33	26,82	26,52	26,14
650	35,31	34,73	34,17	33,62	33,09	32,58	32,09	31,60	31,14	30,68
700	40,97	40,30	39,64	39,01	38,40	37,80	37,23	36,67	36,13	35,60
750	47,06	46,28	45,53	44,80	44,10	43,41	42,75	42,11	41,49	40,88
800	53,57	52,69	51,84	51,00	50,20	49,42	48,67	47,78	47,22	46,54
850	60,51	59,51	58,54	57,61	56,70	55,82	54,97	54,14	53,33	52,56
900	67,89	66,76	65,66	64,62	63,60	62,61	61,65	60,72	59,82	58,95
950	75,66	74,43	73,21	72,04	70,90	69,80	68,73	67,69	66,69	65,71
1000	83,92	82,53	81,18	79,87	78,61	77,38	76,20	75,05	73,93	72,85
1050	92,59	91,05	89,56	88,12	86,72	85,52	84,06	82,79	81,56	80,36
1100	101,78	100,00	98,36	96,78	95,24	93,75	92,31	90,91	89,71	88,23
1150	111,24	109,38	107,59	105,85	104,17	102,54	100,95	99,43	97,95	96,51
1200	121,23	119,20	117,24	115,34	113,51	111,73	110,16	108,34	106,72	105,15
1250	131,65	129,45	127,32	125,25	123,26	121,32	119,45	117,64	115,88	114,17
1300	142,53	140,14	137,82	135,57	133,42	131,33	129,30	127,33	125,42	123,57
1350	153,85	151,26	148,76	146,34	144,00	141,74	139,54	137,42	135,36	133,36
1400	165,61	162,83	160,13	157,53	155,00	152,56	150,19	147,90	145,68	143,52
1450	177,85	174,84	171,94	169,14	166,22	163,70	161,25	158,78	156,40	154,08
1500	190,52	187,30	184,19	181,18	178,26	175,45	172,71	170,07	167,50	165,02
1550	203,67	200,21	196,88	193,65	190,53	187,51	184,59	181,76	179,01	176,35
1600	217,27	213,58	210,01	206,56	203,23	200,00	196,88	193,85	190,91	188,08
1650	231,73	227,39	223,59	219,91	216,35	212,91	209,58	206,35	203,22	200,19
1700	245,87	241,67	237,62	233,70	229,89	226,25	222,70	219,26	215,96	212,70

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von				Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von			
	7000	8000	9000	10000		7000	8000	9000	10000
50	0,18	0,16	0,14	0,12	1050	79,20	69,21	61,46	55,28
100	0,72	0,63	0,56	0,50	1100	87,00	75,99	67,48	60,68
150	1,61	1,41	1,25	1,13	1150	95,11	83,09	73,78	66,35
200	2,86	2,50	2,22	2,00	1200	103,62	90,50	80,36	72,26
250	4,47	3,91	3,47	3,13	1250	112,51	98,26	87,23	78,43
300	6,43	5,63	5,00	4,50	1300	121,77	106,24	94,39	84,86
350	8,76	7,58	6,81	6,13	1350	131,42	114,73	101,83	91,54
400	11,44	9,09	8,89	8,00	1400	141,43	123,45	109,56	98,58
450	14,48	12,67	11,26	10,13	1450	151,83	132,51	117,57	105,68
500	17,88	15,64	13,90	12,51	1500	162,60	141,88	125,88	113,14
550	21,64	18,93	16,82	15,14	1550	173,76	151,59	134,48	120,86
600	25,76	22,53	20,02	18,01	1600	185,31	161,63	143,36	128,83
650	30,25	26,45	23,50	21,15	1650	197,23	172,01	152,55	137,06
700	35,09	30,68	27,26	24,53	1700	209,57	182,71	162,01	145,56
750	40,30	35,24	31,31	28,17	1750	222,28	193,75	171,78	154,32
800	45,87	40,01	35,63	32,05	1800	235,39	205,13	181,84	163,33
850	51,80	45,28	40,23	36,19	1850	248,89	216,85	192,19	172,61
900	58,10	50,79	45,11	40,58	1900	262,79	228,90	202,84	182,16
950	64,76	56,61	50,07	45,23	1950	277,09	241,30	213,79	191,97
1000	71,80	62,75	55,73	50,13	2000	291,80	254,03	225,04	202,04

Tafel Nr. XVII.

Ordinaten für Kreisbögen; die Sehnen als Abscissen-Axen.

1. Bogenlänge = 50 Einheiten.

Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate	
	zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.
1000	0,31	0,24	1200	0,26	0,19	1400	0,22	0,17
20	0,31	0,23	20	0,26	0,19	20	0,22	0,17
40	0,30	0,22	40	0,25	0,19	40	0,22	0,16
60	0,29	0,22	60	0,25	0,18	60	0,22	0,16
80	0,29	0,22	80	0,25	1,18	80	0,21	0,16
1100	0,28	0,21	1300	0,24	0,18	1500	0,21	0,16
20	0,28	0,21	20	0,24	0,18	20	0,21	0,16
40	0,28	0,21	40	0,23	0,18	40	0,20	0,15
60	0,27	0,20	60	0,23	0,17	60	0,20	0,15
80	0,27	0,20	80	0,23	0,17	80	0,20	0,15

Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate	
	zu $^1/_2$ b.	zu $^1/_4$ b.		zu $^1/_2$ b.	zu $^1/_4$ b.		zu $^1/_2$ b.	zu $^1/_4$ b.
1600	0,19	0,15	2400	0,13	0,10	3200	0,10	0,05
20	0,19	0,15	20	0,13	0,10	20	0,10	0,05
40	0,19	0,14	40	0,13	0,10	40	0,10	0,05
60	0,19	0,14	60	0,13	0,10	60	0,10	0,05
80	0,18	0,14	80	0,13	0,09	80	0,09	0,05
1700	0,18	0,14	2500	0,13	0,09	3300	0,09	0,05
20	0,18	0,14	20	0,12	0,09	20	0,09	0,05
40	0,18	0,14	40	0,12	0,09	40	0,09	0,05
60	0,18	0,13	60	0,12	0,09	60	0,09	0,05
80	0,18	0,13	80	0,12	0,09	80	0,09	0,05
1800	0,17	0,13	2600	0,12	0,09	3400	0,09	0,05
20	0,17	0,13	20	0,12	0,09	20	0,09	0,04
40	0,17	0,13	40	0,12	0,09	40	0,09	0,04
60	0,17	0,13	60	0,12	0,09	60	0,09	0,04
80	0,17	0,13	80	0,12	0,09	80	0,09	0,04
1900	0,17	0,12	2700	0,12	0,09	3500	0,09	0,04
20	0,17	0,12	20	0,12	0,09	20	0,09	0,04
40	0,16	0,12	40	0,11	0,09	40	0,09	0,04
60	0,16	0,12	60	0,11	0,08	60	0,09	0,04
80	0,16	0,12	80	0,11	0,08	80	0,09	0,04
2000	0,16	0,12	2800	0,11	0,08	3600	0,09	0,04
20	0,16	0,12	20	0,11	0,07	20	0,09	0,04
40	0,16	0,12	40	0,11	0,07	40	0,09	0,04
60	0,15	0,12	60	0,11	0,07	60	0,09	0,04
80	0,15	0,11	80	0,11	0,07	80	0,09	0,04
2100	0,15	0,11	2900	0,11	0,07	3700	0,09	0,04
20	0,15	0,11	20	0,11	0,07	20	0,08	0,04
40	0,15	0,11	40	0,11	0,07	40	0,08	0,04
60	0,15	0,11	60	0,11	0,07	60	0,08	0,03
80	0,14	0,11	80	0,10	0,07	80	0,08	0,03
2200	0,14	0,11	3000	0,10	0,06	3800	0,08	0,03
20	0,14	0,11	20	0,10	0,06	20	0,08	0,03
40	0,14	0,11	40	0,10	0,06	40	0,08	0,03
60	0,14	0,11	60	0,10	0,06	60	0,08	0,03
80	0,14	0,10	80	0,10	0,06	80	0,08	0,03
2300	0,14	0,10	3100	0,10	0,06	3900	0,08	0,03
20	0,13	0,10	20	0,10	0,06	20	0,08	0,03
40	0,13	0,10	40	0,10	0,06	40	0,08	0,03
60	0,13	0,10	60	0,10	0,06	60	0,08	0,03
80	0,13	0,10	80	0,10	0,06	80	0,08	0,03
						4000	0,08	0,03

2. Bogenlänge = 100 Einheiten.

Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate	
	zu $^1/_2$ b.	zu $^1/_4$ b.		zu $^1/_2$ b.	zu $^1/_4$ b.		zu $^1/_2$ b.	zu $^1/_4$ b.
1000	1,25	0,94	1800	0,69	0,52	2600	0,48	0,36
20	1,22	0,92	20	0,69	0,52	20	0,48	0,36
40	1,20	0,90	40	0,68	0,51	40	0,47	0,36
60	1,18	0,88	60	0,67	0,51	60	0,47	0,35
80	1,16	0,87	80	0,67	0,50	80	0,47	0,35
1100	1,14	0,85	1900	0,66	0,49	2700	0,46	0,35
20	1,12	0,84	20	0,65	0,49	20	0,46	0,35
40	1,10	0,82	40	0,65	0,48	40	0,46	0,34
60	1,08	0,81	60	0,64	0,48	60	0,45	0,34
80	1,06	0,79	80	0,63	0,47	80	0,45	0,34
1200	1,04	0,78	2000	0,63	0,47	2800	0,45	0,34
20	1,02	0,77	20	0,62	0,47	20	0,44	0,33
40	1,01	0,76	40	0,61	0,46	40	0,44	0,33
60	0,99	0,74	60	0,61	0,46	60	0,44	0,33
80	0,98	0,73	80	0,60	0,45	80	0,43	0,33
1300	0,96	0,72	2100	0,60	0,45	2900	0,43	0,32
20	0,95	0,71	20	0,59	0,44	20	0,43	0,32
40	0,93	0,70	40	0,58	0,44	40	0,43	0,32
60	0,92	0,69	60	0,58	0,43	60	0,42	0,32
80	0,91	0,68	80	0,57	0,43	80	0,42	0,31
1400	0,89	0,67	2200	0,57	0,43	3000	0,42	0,31
20	0,88	0,66	20	0,56	0,42	20	0,41	0,31
40	0,87	0,65	40	0,56	0,42	40	0,41	0,31
60	0,86	0,64	60	0,55	0,42	60	0,41	0,31
80	0,85	0,63	80	0,55	0,41	80	0,40	0,30
1500	0,83	0,62	2300	0,54	0,41	3100	0,40	0,30
20	0,82	0,62	20	0,54	0,40	20	0,40	0,30
40	0,81	0,61	40	0,53	0,40	40	0,40	0,30
60	0,80	0,60	60	0,53	0,40	60	0,39	0,30
80	0,79	0,59	80	0,52	0,39	80	0,39	0,29
1600	0,78	0,58	2400	0,52	0,39	3200	0,39	0,29
20	0,77	0,58	20	0,52	0,39	20	0,39	0,29
40	0,76	0,57	40	0,51	0,38	40	0,39	0,29
60	0,75	0,56	60	0,51	0,38	60	0,38	0,29
80	0,74	0,56	80	0,50	0,38	80	0,38	0,29
1700	0,73	0,55	2500	0,50	0,37	3300	0,38	0,28
20	0,73	0,54	20	0,50	0,37	20	0,38	0,28
40	0,72	0,54	40	0,49	0,37	40	0,38	0,28
60	0,71	0,53	60	0,49	0,37	60	0,37	0,28
80	0,70	0,53	80	0,48	0,36	80	0,37	0,28

Halbmesser.	Ordinate zu $^1/_2$ b.	Ordinate zu $^1/_4$ b.	Halbmesser.	Ordinate zu $^1/_2$ b.	Ordinate zu $^1/_4$ b.	Halbmesser.	Ordinate zu $^1/_2$ b.	Ordinate zu $^1/_4$ b.
3400	0,37	0,28	4200	0,30	0,22	5000	0,25	0,19
20	0,37	0,28	20	0,30	0,22	20	0,25	0,19
40	0,36	0,27	40	0,30	0,22	40	0,25	0,19
60	0,36	0,27	60	0,29	0,22	60	0,25	0,19
80	0,36	0,27	80	0,29	0,22	80	0,25	0,19
3500	0,36	0,27	4300	0,29	0,22	5100	0,25	0,19
20	0,36	0,27	20	0,29	0,22	20	0,24	0,18
40	0,36	0,27	40	0,29	0,22	40	0,24	0,18
60	0,35	0,27	60	0,29	0,22	60	0,24	0,18
80	0,35	0,26	80	0,28	0,21	80	0,24	0,18
3600	0,35	0,26	4400	0,28	0,21	5200	0,24	0,18
20	0,35	0,26	20	0,28	0,21	20	0,24	0,18
40	0,34	0,26	40	0,28	0,21	40	0,24	0,18
60	0,34	0,26	60	0,28	0,21	60	0,24	0,18
80	0,34	0,26	80	0,28	0,21	80	0,24	0,18
3700	0,34	0,25	4500	0,28	0,21	5300	0,24	0,18
20	0,34	0,25	20	0,28	0,21	20	0,23	0,18
40	0,33	0,25	40	0,28	0,21	40	0,23	0,18
60	0,33	0,25	60	0,27	0,21	60	0,23	0,18
80	0,33	0,25	80	0,27	0,20	80	0,23	0,17
3800	0,33	0,25	4600	0,27	0,20	5400	0,23	0,17
20	0,33	0,25	20	0,27	0,20	20	0,23	0,17
40	0,33	0,24	40	0,27	0,20	40	0,23	0,17
60	0,32	0,24	60	0,27	0,20	60	0,23	0,17
80	0,32	0,24	80	0,27	0,20	80	0,23	0,17
3900	0,32	0,24	4700	0,27	0,20	5500	0,23	0,17
20	0,32	0,24	20	0,26	0,20	20	0,23	0,17
40	0,32	0,24	40	0,26	0,20	40	0,23	0,17
60	0,31	0,24	60	0,26	0,20	60	0,22	0,17
80	0,31	0,24	80	0,26	0,20	80	0,22	0,17
4000	0,31	0,23	4800	0,26	0,20	5600	0,22	0,17
20	0,31	0,23	20	0,26	0,20	20	0,22	0,17
40	0,31	0,23	40	0,26	0,20	40	0,22	0,17
60	0,31	0,23	60	0,26	0,19	60	0,22	0,17
80	0,31	0,23	80	0,26	0,19	80	0,22	0,17
4100	0,31	0,23	4900	0,26	0,19	5700	0,22	0,17
20	0,30	0,23	20	0,25	0,19	20	0,22	0,16
40	0,30	0,23	40	0,25	0,19	40	0,22	0,16
60	0,30	0,23	60	0,25	0,19	60	0,22	0,16
80	0,30	0,23	80	0,25	0,19	80	0,22	0,16
						5800	0,22	0,16

Tafel Nr. XVIII.

Correspondirende geographische Breiten.

Geographische Breite.					Geographische Breite.					Geographische Breite.				
Kugel.		Ellipsoid.			Kugel.		Ellipsoid.			Kugel.		Ellipsoid.		
46°	40′	46°	41′	24″,75	47°	58′	47°	59′	34″,84	49°	16′	49°	17′	43″,88
	42		43	25,02	48	0	48	1	35,09		18		19	44,09
	44		45	25,29		2		3	35,33		20		21	44,31
	46		47	25,56		4		5	35,58		22		23	44,53
	48		49	25,83		6		7	35,82		24		25	44,74
	50		51	26,10		8		9	36,06		26		27	44,96
	52		53	26,37		10		11	36,30		28		29	45,17
	54		55	26,64		12		13	36,54		30		31	45,39
	56		57	26,91		14		15	36,78		32		33	45,60
	58		59	27,17		16		17	37,02		34		35	45,81
47	0	47	1	27,44		18		19	37,26		36		37	46,02
	2		3	27,70		20		21	37,50		38		39	46,23
	4		5	27,97		22		23	37,74		40		41	46,44
	6		7	28,23		24		25	37,97		42		43	46,65
	8		9	28,49		26		27	38,21		44		45	46,86
	10		11	28,76		28		29	38,44		46		47	47,07
	12		13	29,02		30		31	38,68		48		49	47,28
	14		15	29,28		32		33	38,91		50		51	47,48
	16		17	29,54		34		35	39,14		52		53	47,69
	18		19	29,80		36		37	39,38		54		55	47,89
	20		21	30,06		38		39	39,61		56		57	48,10
	22		23	30,32		40		41	39,84		58		59	48,30
	24		25	30,57		42		43	40,07	50	0	50	1	48,51
	26		27	30,83		44		45	40,30		2		3	48,71
	28		29	31,09		46		47	40,53		4		5	48,91
	30		31	31,34		48		49	40,76		6		7	49,11
	32		33	31,60		50		51	40,98		8		9	49,31
	34		35	31,85		52		53	41,21		10		11	49,51
	36		37	32,10		54		55	41,44		12		13	49,71
	38		39	32,36		56		57	41,66		14		15	49,91
	40		41	32,61		58		59	41,89		16		17	50,11
	42		43	32,86	49	0	49	1	42,11		18		19	50,31
	44		45	33,11		2		3	42,33		20		21	50,50
	46		47	33,36		4		5	42,56		22		23	50,70
	48		49	33,61		6		7	42,78		24		25	50,90
	50		51	33,86		8		9	43,00		26		27	51,09
	52		53	34,10		10		11	43,22		28		29	51,28
	54		55	34,35		12		13	43,44		30		31	51,47
	56		57	34,60		14		15	43,66		32		33	51,66

Geographische Breite.					Geographische Breite.					Geographische Breite.				
Kugel.		Ellipsoid.			Kugel.		Ellipsoid.			Kugel.		Ellipsoid.		
50°	34'	50°	35'	51",86	52°	2'	52°	3'	59",60	53°	30'	53°	32'	6",02
	36		37	52,04		4		5	59,76		32		34	6,15
	38		39	52,23		6		7	59,92		34		36	6,28
	40		41	52,43		8		10	0,08		36		38	6,41
	42		43	52,61		10		12	0,24		38		40	6,54
	44		45	52,80		12		14	0,39		40		42	6,66
	46		47	52,99		14		16	0,55		42		44	6,79
	48		49	53,18		16		18	0,71		44		46	6,92
	50		51	53,36		18		20	0,86		46		48	7,04
	52		53	53,55		20		22	1,02		48		50	7,17
	54		55	53,73		22		24	1,17		50		52	7,29
	56		57	53,92		24		26	1,33		52		54	7,42
	58		59	54,10		26		28	1,48		54		56	7,54
51	0	51	1	54,28		28		30	1,63		56		58	7,66
	2		3	54,46		30		32	1,78		58	54	0	7,79
	4		5	54,64		32		34	1,93	54	0		2	7,91
	6		7	54,82		34		36	2,08		2		4	8,03
	8		9	55,00		36		38	2,23		4		6	8,15
	10		11	55,18		38		40	2,38		6		8	8,27
	12		13	55,36		40		42	2,53		8		10	8,39
	14		15	55,54		42		44	2,68		10		12	8,51
	16		17	55,72		44		46	2,83		12		14	8,62
	18		19	55,90		46		48	2,97		14		16	8,74
	20		21	56,07		48		50	3,12		16		18	8,86
	22		23	56,24		50		52	3,26		18		20	8,97
	24		25	56,42		52		54	3,41		20		22	9,09
	26		27	56,59		54		56	3,55		22		24	9,20
	28		29	56,76		56		58	3,69		24		26	9,31
	30		31	56,94		58	53	0	3,84		26		28	9,43
	32		33	57,11	53	0		2	3,98		28		30	9,54
	34		35	57,28		2		4	4,12		30		32	9,65
	36		37	57,45		4		6	4,26		32		34	9,76
	38		39	57,62		6		8	4,40		34		36	9,87
	40		41	57,79		8		10	4,54		36		38	9,98
	42		43	57,95		10		12	4,67		38		40	10,09
	44		45	58,12		12		14	4,81		40		42	10,19
	46		47	58,29		14		16	4,95		42		44	10,30
	48		49	58,45		16		18	5,08		44		46	10,41
	50		51	58,62		18		20	5,22		46		48	10,52
	52		53	58,78		20		22	5,35		48		50	10,62
	54		55	58,95		22		24	5,49		50		52	10,73
	56		57	59,11		24		26	5,62		52		54	10,83
	58		59	59,27		26		28	5,75		54		56	10,93
52	0	52	1	59,44		28		30	5,89		56		58	11,03

Geographische Breite.			Geographische Breite.			Geographische Breite.		
Kugel.	Ellipsoid.		Kugel.	Ellipsoid.		Kugel.	Ellipsoid.	
54° 58′	55° 0′	11″,14	56° 12′	56° 14′	14″,45	57° 26′	57° 28′	16″,88
55 0	2	11,24	14	16	14,53	28	30	16,93
2	4	11,34	16	18	14,61	30	32	16,99
4	6	11,44	18	20	14,68	32	34	17,04
6	8	11,54	20	22	14,76	34	36	17,09
8	10	11,64	22	24	14,83	36	38	17,14
10	12	11,74	24	26	14,91	38	40	17,19
12	14	11,83	26	28	14,98	40	42	17,24
14	16	11,93	28	30	15,05	42	44	17,29
16	18	12,03	30	32	15,12	44	46	17,34
18	20	12,12	32	34	15,20	46	48	17,39
20	22	12,21	34	36	15,27	48	50	17,44
22	24	12,31	36	38	15,34	50	52	17,48
24	26	12,41	38	40	15,41	52	54	17,53
26	28	12,50	40	42	15,48	54	56	17,57
28	30	12,59	42	44	15,54	56	58	17,62
30	32	12,68	44	46	15,61	58	58 0	17,66
32	34	12,77	46	48	15,68	58 0	2	17,71
34	36	12,86	48	50	15,74	2	4	17,75
36	38	12,95	50	52	15,81	4	6	17,79
38	40	13,04	52	54	15,87	6	8	17,83
40	42	13,13	54	56	15,94	8	10	17,87
42	44	13,22	56	58	16,00	10	12	17,89
44	46	13,30	58	57 0	16,07	12	14	17,95
46	48	13,39	57 0	2	16,13	14	16	17,99
48	50	13,48	2	4	16,19	16	18	18,03
50	52	13,56	4	6	16,25	18	20	18,07
52	54	13,65	6	8	16,31	20	22	18,11
54	56	13,73	8	10	16,37	22	24	18,14
56	58	13,81	10	12	16,43	24	26	18,18
58	56 0	13,89	12	14	16,49	26	28	18,21
56 0	2	13,97	14	16	16,55	28	30	18,25
2	4	14,06	16	18	16,60	30	32	18,28
4	6	14,14	18	20	16,66	32	34	18,31
6	8	14,22	20	22	16,72	34	36	18,35
8	10	14,30	22	24	16,77	36	38	18,38
10	12	14,37	24	26	16,83	38	40	18,41
						40	42	18,44

Tafel Nr. XIX.

Mittlere astronomische Refraction nach Bessel.

Scheinbare Höhe.	Refraction.			Scheinbare Höhe.	Refraction.			Scheinbare Höhe.	Refraction.		
0° 0′	34′	54″,1	121″,9	6° 40′	7′	39″,2	10″,0	13° 20′	3′	58″,8	2″,9
10	32	49,2	116,9	50	7	29,2	9,5	30	3	55,9	2,9
20	30	52,3	108,8	7 0	7	19,7	9,2	40	3	53,0	2,8
30	29	3,5	100,8	10	7	10,5	8,8	50	3	50,2	2,8
40	27	22,7	92,9	20	7	1,7	8,4	14 0	3	47,4	5,3
50	25	49,8	85,2	30	6	53,3	8,2	20	3	42,1	5,1
1 0	24	24,6	77,9	40	6	45,1	7,9	40	3	37,0	4,9
10	23	6,7	71,1	50	6	37,2	7,6	15 0	3	32,1	4,7
20	21	55,6	64,7	8 0	6	29,6	7,3	20	3	27,4	4,5
30	20	50,9	59,0	10	6	22,3	7,1	40	3	22,9	4,3
40	19	51,9	53,9	20	6	15,2	6,8	16 0	3	18,6	4,1
50	18	58,0	49,4	30	6	8,4	6,6	20	3	14,5	4,0
2 0	18	8,6	45,6	40	6	1,8	6,4	40	3	10,5	3,9
10	17	23,0	42,3	50	5	55,4	6,1	17 0	3	6,6	3,7
20	16	40,7	39,8	9 0	5	49,3	6,0	20	3	2,9	3,6
30	16	0,9	37,5	10	5	43,3	5,7	40	2	59,3	3,5
40	15	23,4	35,6	20	5	37,6	5,6	18 0	2	55,8	3,3
50	14	47,8	33,2	30	5	32,0	5,5	20	2	52,5	3,2
3 0		14,6	30,9	40	5	26,5	5,2	40	2	49,3	3,2
10	13	43,7	28,7	50	5	21,3	5,1	19 0	2	46,1	3,0
20	13	15,0	26,7	10 0	5	16,2	5,0	20	2	43,1	2,9
30	12	48,3	24,6	10	5	11,2	4,8	40	2	40,2	2,9
40	12	23,7	23,0	20	5	6,4	4,7	20 0	2	37,3	2,8
50	12	0,7	21,8	30	5	1,7	4,5	20	2	34,5	2,6
4 0	11	38,9	20,6	40	4	57,2	4,4	40	2	31,9	2,6
10	11	18,3	19,7	50	4	52,8	4,3	21 0	2	29,3	2,5
20	10	58,6	19,0	11 0	4	48,5	4,2	20	2	26,8	2,5
30	10	39,6	18,4	10	4	44,3	4,1	40	2	24,3	2,4
40	10	21,2	17,9	20	4	40,2	3,9	22 0	2	21,9	2,3
50	10	3,3	16,8	30	4	36,3	3,9	20	2	19,6	2,2
5 0	9	46,5	15,6	40	4	32,4	3,7	40	2	17,4	2,2
10	9	30,9	14,9	50	4	28,7	3,7	23 0	2	15,2	2,2
20	9	16,0	14,1	12 0	4	25,0	3,6	20	2	13,0	2,1
30	9	1,9	13,5	10	4	21,4	3,4	40	2	10,9	2,0
40	8	48,4	12,8	20	4	18,0	3,4	24 0	2	8,9	1,9
50	8	35,6	12,3	30	4	14,6	3,3	20	2	7,0	1,9
6 0	8	23,3	11,7	40	4	11,3	3,2	40	2	5,1	1,9
10	8	11,6	11,3	50	4	8,1	3,2	25 0	2	3,2	1,8
20	8	0,3	10,8	13 0	4	4,9	3,1	20	2	1,4	1,8
30	7	49,5	10,5	10	4	1,8	3,0	40	1	59,6	1,8

Scheinbare Höhe.	Refraction.		Scheinbare Höhe.	Refraction.		Scheinbare Höhe.	Refraction.	
26° 0′	1′ 57″,8	1″,7	37° 0′	1′ 16″,5	0″,9	58°	36″,1	1″,4
20	1 56,1	1,7	20	1 15,6	0,9	59	34,7	1,4
40	1 54,4	1,6	40	1 14,7	0,9	60	33,3	1,3
27 0	1 52,8	1,6	38 0	1 13,8	0,9	61	32,0	1,3
20	1 51,2	1,5	20	1 12,9	0,9	62	30,7	1,3
40	1 49,7	1,5	40	1 12,0	0,8	63	29,4	1,2
28 0	1 48,2	1,5	39 0	1 11,2	0,8	64	28,2	1,3
20	1 46,7	1,4	20	1 10,3	0,8	65	26,9	1,2
40	1 45,3	1,5	40	1 9,5	0,8	66	25,7	1,2
29 0	1 43,8	1,4	40 0	1 8,7	0,8	67	24,5	1,2
20	1 42,4	1,4	20	1 7,9	0,8	68	23,3	1,1
40	1 41,0	1,3	40	1 7,1	0,8	69	22,2	1,2
30 0	1 39,7	1,3	41 0	1 6,3	0,8	70	21,0	1,1
20	1 38,4	1,3	20	1 5,5	0,8	71	19,9	1,1
40	1 37,1	1,3	40	1 4,7	0,7	72	18,8	1,1
31 0	1 35,8	1,3	42 0	1 4,0		73	17,7	1,1
20	1 34,5	1,2				74	16,6	1,1
40	1 33,3	1,2	42°	64″,0	2″,2	75	15,5	1,0
32 0	1 32,1	1,2	43	61,8	2,1	76	14,5	1,1
20	1 30,9	1,1	44	59,7	2,0	77	13,4	1,1
40	1 29,8	1,1	45	57,7	2,0	78	12,3	1,1
33 0	1 28,7	1,1	46	55,7	1,9	79	11,2	1,0
20	1 27,6	1,1	47	53,8	1,9	80	10,2	1,1
40	1 26,5	1,1	48	51,9	1,7	81	9,1	1,0
34 0	1 25,4	1,1	49	50,2	1,8	82	8,1	1,0
20	1 24,3	1,0	50	48,4	1,7	83	7,1	1,0
40	1 23,3	1,0	51	46,7	1,6	84	6,1	1,0
35 0	1 22,3	1,0	52	45,1	1,6	85	5,1	1,0
20	1 21,3	1,0	53	43,5	1,6	86	4,1	1,0
40	1 20,3	1,0	54	41,9	1,5	87	3,1	1,0
36 0	1 19,3	1,0	55	40,4	1,5	88	2,1	1,0
20	1 18,3	0,9	56	38,9	1,4	89	1,1	1,1
40	1 17,4	0,9	57	37,5	1,4	90	0,0	

Tafel Nr. XX.

Längen der Parallelgrade in geographischen Meilen.

Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.
0°	15,000	2°	14,990	4°	14,963	6°	14,918
30′	14,999	30′	14,986	30′	14,954	30′	14,904
1	14,998	3	14,979	5	14,944	7	14,888
30	14,994	30	14,972	30	14,931	30	14,871

Geogr. Breite.	Länge des Parallel-grads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallel-grads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallel-grads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallel-grads.
8°	14,853	28° 30′	13,182	49°	9,841	69° 30′	5,253
30′	14,835	29	13,119	30′	9,742	70	5,130
9	14,815	30	13,055	50	9,642	30	5,007
30	14,794	30	12,990	30	9,541	71	4,884
10	14,771	30	12,924	51	9,440	30	4,759
30	14,748	31	12,857	30	9,338	72	4,636
11	14,724	30	12,789	52	9,234	30	4,522
30	14,698	32	12,721	30	9,131	73	4,385
12	14,672	30	12,651	53	9,027	30	4,260
30	14,644	33	12,580	30	8,922	74	4,134
13	14,615	30	12,508	54	8,817	30	4,008
30	14,585	34	12,436	30	8,699	75	3,882
14	14,554	30	12,362	55	8,604	30	3,756
30	14,522	35	12,287	30	8,496	76	3,629
15	14,488	30	12,212	56	8,388	30	3,502
30	14,454	36	12,153	30	8,279	77	3,374
16	14,418	30	12,058	57	8,169	30	3,247
30	14,382	37	11,980	30	8,059	78	3,119
17	14,344	30	11,900	58	7,949	30	2,990
30	14,305	38	11,820	30	7,837	79	2,862
18	14,265	30	11,739	59	7,726	30	2,733
30	14,224	39	11,657	30	7,613	80	2,605
19	14,182	30	11,574	60	7,500	30	2,476
30	14,139	40	11,491	30	7,386	81	2,346
20	14,095	30	11,406	61	7,272	30	2,217
30	14,050	41	11,321	30	7,157	82	2,088
21	14,006	30	11,234	62	7,042	30	1,958
30	13,956	42	11,147	30	6,926	83	1,828
22	13,907	30	11,059	63	6,810	30	1,698
30	13,858	43	10,970	30	6,693	84	1,568
23	13,807	30	10,881	64	6,575	30	1,438
30	13,755	44	10,790	30	6,458	85	1,307
24	13,703	30	10,699	65	6,339	30	1,177
30	13,649	45	10,607	30	6,220	86	1,046
25	13,605	30	10,514	66	6,101	30	0,916
30	13,538	46	10,419	30	5,981	87	0,785
26	13,482	30	10,325	67	5,861	30	0,654
30	13,424	47	10,230	30	5,740	88	0,523
27	13,365	30	10,134	68	5,619	30	0,393
30	13,305	48	10,037	30	5,497	89	0,262
28	13,244	30	9,939	69	5,375	30	0,131
						90	0,000

Tafel Nr. XXI.

Halbmesser der Parallelkreise in conischen Kartennetzen.

Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.
5°	9823,4	24°	1930,3	43°	921,6	62°	457,0
30'	8925,6	30'	1885,9	30'	905,6	30'	447,4
6	8177,0	25	1843,0	44	989,9	63	437,9
30	7543,2	30	1801,8	30	874,6	30	428,5
7	6999,6	26	1762,1	45	859,4	64	419,2
30	6528,1	30	1723,8	30	844,6	30	409,9
8	6115,2	27	1686,7	46	829,9	65	400,8
30	5750,6	30	1651,0	30	815,6	30	391,7
9	5426,3	28	1616,4	47	801,4	66	382,6
30	5135,8	30	1582,9	30	787,5	30	373,7
10	4874,1	29	1550,5	48	773,8	67	364,8
30	4637,1	30	1519,0	30	760,4	30	356,0
11	4421,4	30	1488,6	49	747,1	68	347,2
30	4224,3	30	1459,0	30	734,0	30	338,5
12	4043,3	31	1430,3	50	721,2	69	329,9
30	3876,7	30	1402,5	30	708,5	30	321,3
13	3722,6	32	1375,4	51	696,0	70	312,8
30	3579,8	30	1349,0	30	683,6	30	304,3
14	3447,0	33	1323,4	52	671,5	71	295,9
30	3323,2	30	1298,5	30	659,5	30	287,6
15	3207,5	34	1274,2	53	647,6	72	279,2
30	3099,0	30	1250,5	30	635,9	30	271,0
16	2997,2	35	1227,4	54	624,4	73	262,8
30	2901,4	30	1204,9	30	613,0	30	254,5
17	2811,1	36	1182,9	55	601,8	74	246,4
30	2725,8	30	1161,5	30	590,7	30	238,3
18	2645,1	37	1140,5	56	579,7	75	230,2
30	2568,6	30	1120,0	30	568,8	30	222,2
19	2496,0	38	1100,0	57	558,1	76	214,3
30	2427,0	30	1080,5	30	547,5	30	206,3
20	2361,3	39	1061,3	58	537,0	77	198,4
30	2298,7	30	1042,6	30	526,7	30	190,5
21	2238,9	40	1024,2	59	516,4	78	182,7
30	2181,8	30	1006,3	30	506,2	30	174,9
22	2127,2	41	988,7	60	496,2	79	167,0
30	2074,9	30	971,4	30	486,2	30	159,3
23	2024,7	42	954,5	61	476,5	80	151,5
30	1976,6	30	937,9	30	466,6	30	143,5

Tafel Nr. XXII.

Gattung und Höhe der Schrift für Plan- und Karten-Objecte.

Gegenstände	1/5000		1/10000		1/20000	1/50000	1/100000	1/200000	
	Schrift.	Höhe.	Schrift.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Schrift.	Höhe.
		'''		'''	'''	'''	'''		'''
Abtei	S. R	1,1	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	L. R	0,3
Anlage	L. R	0,8	L. R	0,5	0,4	0,3	0,2	—	—
Allee	T. C	0,7	T. C	0,5	0,3	0,3	0,2	—	—
Abhang des Gebirgs . .	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Bahnhof	L. R	0,6	L. R	0,4	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Baum, ausgezeichneter, isolirter	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Bad, grosses	L. R	2,0	S. R	1,3	1,0	0,8	0,6	T. C	0,5
„ kleines	S. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Batterie	T. C	0,5	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Benennungen von Feld, Wiesen, Reben etc. .	L. R	1,0	L. R	0,6	0,5	0,4	0,3	—	—
Bergwerke	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Berg, grosser	L. R	1,3	L. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Bemerkungen	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Brücke, grosse	L. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
„ kleine	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Brunnen	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Bach, grosser	S. R	0,7	S. R	0,5	0,4	0,3	0,3	—	—
„ kleiner	L. R	0,5	L. R	0,4	0,3	0,3	0,3	—	—
Canal	S. R	1,0	S. R	0,8	0,6	0,5	0,3	—	—
Capelle	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Chaussee	S. R	0,8	S. R	0,6	0,5	0,4	0,3	—	—
Damm, grosser . . .	S. R	0,6	S. R	0,5	0,4	0,3	0,2	T. C	0,2
„ kleiner . . .	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Dorf über 400 Einwohner	S. R	2,0	S. R	1,3	1,0	0,8	0,5	T. C	0,4
„ unter 400 Einwohner	S. R	1,5	S. R	1,0	0,7	0,6	0,4	T. C	0,3
Eisenbahn	S. R	0,8	S. R	0,6	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Eisenhammer, grosser .	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
„ kleiner .	S. R	0,7	S. R	0,5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Eiskeller	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Engpass	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Ebene, grosse	L. C	2,5	L. C	1,7	0,2	1,0	0,7	L. C	0,7
„ gewöhnliche . .	S. R	2,0	S. R	1,3	1,0	0,8	0,5	L. R	0,5
Fahrt	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Flecken oder Marktflecken	L. C	2,5	L. C	1,7	1,3	1,0	0,7	L. C	0,6
Fabrik	T. C	0,5	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2

Gegenstände.	$\frac{1}{5000}$		$\frac{1}{10000}$		$\frac{1}{20000}$	$\frac{1}{50000}$	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{200000}$	
	Schrift.	Höhe.	Schrift.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Schrift.	Höhe.
		'''		'''	'''	'''	'''		'''
Fluss, grosser	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,5	S. R	0,4
„ kleiner	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Fussweg	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Garten	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Gebirgskette	L. C	2,0	L. C	2,0	1,5	0,2	0,8	S. R	0,7
Glashütte	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0,3	0,2	L. R	0,2
Graben	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Grenzen	L. R	0,7	L. R	0,5	0,5	0,4	0,3	—	—
Grenzstein	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Haide	L. R	1,3	L. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Häuser, einzelne . . .	T. C	0,5	T. C	0,3	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Höhle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Hof	L. R	0,6	L. R	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Hügel, einzelner . . .	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Hütte	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Insel, grosse	L. R	1,3	L. R	0,9	0,7	0,5	0,3	L. R	0,8
„ kleine	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0,3	0,2	L. R	0,2
Kirche	S. R	0,7	S. R	0,5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Kloster	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Kreuz	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Lache	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Lager	S. R	1,3	S. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Magazin	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Massstab	L. C	0,9	L. R	0,6	0,6	0,6	0,6	S. R	0,6
Mineralquelle	L. R	0,7	T. C	0,5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Monument, einzeln stehendes	S. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	S. R	0,2
Mühle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Obstgarten	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Pfarrhof	S. R	1,0	S. R	0,8	0,6	0,5	0,4	T. C	0,4
Quelle eines Bachs . .	S. R	0,7	S. R	0,5	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Redoute	S. R	0,5	S. R	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Sandbank	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,5	0,4	T. C	0,3
Sandgrube	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Schenke	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Steinbruch	T. C	0,3	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Schloss	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Schleuse	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
See, grosser	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,5	T. C	0,3
„ kleiner (auf Bergen)	S. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Sumpf	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,5	0,4	T. C	0,3
Saline, grosse	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
„ kleine	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—

Gegenstände.	1/5000		1/10000		1/20000	1/50000	1/100000	1/200000	
	Schrift.	Höhe.	Schrift.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Schrift.	Höhe.
		'''		'''	'''	'''	'''		'''
Sägmühle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Stadt über 5000 Einw..	S. C	4,0	S. C	2,7	2,0	1,6	1,1	S. C	0,9
„ unter 5000 Einw..	S. C	3,0	S. C	2,0	1,5	1,2	0,8	L. C	0,7
Signal, grosses . . .	T. C	0,8	T. C	0,5	0,4	0,3	0,2	—	—
„ kleines	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Thurm	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Thal	L. C	3,0	L. C	2,5	2,0	1,5	1,0	—	—
Vorstadt	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,5	S. R	0,4
Wald, grosser	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,5	—	—
„ gewöhnlicher . .	L. R	1,5	L. R	1,0	1,0	0,8	0,6	L. R	0,5
„ kleiner	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,5	0,3	T. C	0,3
Weiher, grosser . . .	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,6	S. R	0,6
„ kleiner . . .	L. R	0,6	T. C	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Weide	T. C	1,0	T. C	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Wiesen	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,4	0,3	—	—
Wildbach	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Wasserwerk, grosses .	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
„ kleines . .	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0,3	0,2	—	—
Weiler	T. C	1,0	T. C	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Weg	T. C	0,6	T. C	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Zugrippung	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Zollstätte	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Ziegelhütte	T. C	0,3	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—

Alphabetisches Sachregister zum zweiten Bande.

Die Zahlen bedeuten die Seiten.

A.

B.

K.

L.

S.

T.

U.

Druckfehler-Verzeichniss.

Im I. Bande.

Seite 16 Zeile 2 v. o. lese man M_1 a statt M, a
„ 226 „ 4 v. o. „ „ bei statt be
„ 253 „ 2 v. u. „ „ Fernrohr statt Ternrohr
„ 281 „ 6 v. u. „ „ $\frac{1''}{\sin 1''}$ statt $\frac{1'}{\sin 1''}$

Im II. Bande.

Seite 17 Zeile 1 v. o. lese man ungleicher statt gleicher
„ 27 „ 16 v. o. „ „ §. 22 statt §. —
„ 27 „ 17 v. o. „ „ o_3 statt n_3
„ 217 „ 12 v. u. „ „ Tenner statt Penner
„ 247 „ 3 u. 7. v. u. lese man u y^2 statt u^2 y^2
„ 263 „ 12 v. u. lese man sechsten statt siebenten
„ 203 „ 2 v. o. fehlt zwischen 4) und 5) „die Ausgleichung des Dreiecksnetzes.“

Digitized by Google